

Astérisque

BERNARD MALGRANGE

**Rapport sur les théorèmes d'indice de Boutet
de Monvel et Kashiwara**

Astérisque, tome 101-102 (1983), p. 230-242

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__101-102__230_0>

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RAPPORT SUR LES THÉORÈMES D'INDICE DE BOUTET DE MONVEL ET KASHIWARA

B. MALGRANGE

1. Introduction

Soit X une variété analytique complexe de dimension n ; on note comme d'habitude $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X , et $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $\mathcal{O}_X$; $\mathcal{D}_X$ est muni de la filtration croissante $\{\mathcal{D}_X(p)\}_{p \in \mathbb{N}}$, définie par le degré des opérateurs différentiels.

Dans la suite, on omettra l'indice X si cela ne crée pas de confusion. Soit M un $\mathcal{D}$ -module cohérent ; rappelons que la variété caractéristique de M , qu'on note $\text{car } M$ peut être définie par l'un ou l'autre des deux procédés suivants :

- i) Soit $\{M(p)\}_{p \in \mathbb{N}}$ une bonne filtration de M , par exemple une filtration quotient d'un morphisme surjectif $\mathcal{B}^p \rightarrow M$ (il en existe toujours localement, et cela nous suffira). Alors $\text{gr } M$ est cohérent sur $\text{gr } \mathcal{D}$; d'autre part, $\text{gr } \mathcal{D}$ s'identifie canoniquement au faisceau (sur X) des fonctions holomorphes sur T^*X , polynomiales par rapport aux variables de la fibre ; donc en tensorisant $\text{gr } M$ par $\mathcal{O}_{T^*X}$, on obtient un faisceau cohérent sur T^*X ; son support, qui ne dépend pas de la bonne filtration choisie, est par définition la variété caractéristique de M ; c'est une sous-variété réduite de T^*X , stable par les homothéties de la fibre.
- ii) Soit π la projection $T^*X \rightarrow X$, et soit $\mathcal{E}$ le faisceau des opérateurs microdifférentiels sur T^*X ; le microlocalisé $\tilde{M} = \mathcal{E} \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D})} \pi^{-1}(M)$ est un $\mathcal{E}$ -module cohérent, et l'on a $\text{car } M = \text{support } (\tilde{M})$.

Rappelons aussi que la variété caractéristique de M est involutive, (voir [S.K.K.] ou [M2]) c'est-à-dire que son idéal $\mathcal{J}(\text{car } M) \subset \mathcal{O}_{T^*X}$, est stable par le crochet de Poisson défini par la structure symplectique canonique de T^*X .

Dans la suite, on notera $\omega = d\lambda$ la 2-forme canonique de T^*X , λ étant la "forme de Liouville" de T^*X (en coordonnées locales, $\lambda = \sum \xi_1 dx_1$). Le résultat précédent, joint à des considérations élémentaires de géométrie symplectique, montre ceci : en tout point a de $\Lambda = \text{car } M$, on a $\dim_a \Lambda \geq n$. Si de plus, on a $\dim_a \Lambda = n$ pour tout $a \in \Lambda$, alors Λ est isotrope, c'est-à-dire que la restriction de λ à la partie lisse de Λ est nulle. On dit alors que Λ est lagrangienne, et que M est holonome.

Dans la suite, on supposera toujours M holonome ; comme les résultats qui nous intéressent sont de caractère local, on pourra aussi supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Soit $x \in \text{support}(M)$, et soit B_ϵ la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ ; du fait que $\Lambda = \text{car } M$ est isotrope et du "curve selection lemma", on déduit facilement ceci : pour ϵ assez petit, disons $\leq \epsilon_0$, ∂B_ϵ est non caractéristique pour M , c'est-à-dire que le fibré conormal à ∂B_ϵ ne rencontre pas Λ en dehors de la section nulle de T^*X . De là, on déduit le résultat suivant par des arguments d'ellipticité (soit un argument direct de Kashiwara, soit un argument utilisant les "opérateurs de Toeplitz" définis par Boutet de Monvel).

THÉORÈME 1.1. (Kashiwara [K2] ou [K4]) - Les espaces

$\text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(B_\epsilon ; M, \mathcal{O})$ sont de dimension finie sur $\mathbb{C}$, et ils ne dépendent pas de $\epsilon \leq \epsilon_0$; en particulier, ils sont égaux aux $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{O})_x$.

Posons alors $\chi_x(M) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{O})_x$. Le but de cet exposé est de donner deux formules pour calculer $\chi_x(M)$ qui ont été obtenues indépendamment, l'une par Boutet de Monvel, l'autre par Kashiwara.

2. La formule de Boutet de Monvel (B)

En fait, on ne va énoncer ici qu'un cas très particulier de cette formule, correspondant au problème ci-dessus ; le cas général s'applique, par exemple, dans la situation suivante : p est un opérateur différentiel à coefficients holomorphes, agissant des sections d'un fibré vectoriel E sur X dans les sections d'un autre fibré vectoriel F ; $\Omega \subset\subset X$ est de Stein, à bord $\partial\Omega$ fortement pseudo convexe et non caractéristique pour p , et l'on calcule alors l'indice de $p : \Gamma(\Omega, E) \rightarrow \Gamma(\Omega, F)$. (Par exemple, si Ω est un voisinage tubulaire convenable d'une variété analytique réelle $X_{\mathbb{R}}$ dans son complexifié X , et si p est elliptique sur $X_{\mathbb{R}}$, ceci redonne le théorème d'Atiyah-Singer.) D'autre part, Boutet de Monvel n'énonce sa formule que pour un opérateur ; mais le procédé usuel de réduction d'un complexe à un opérateur s'applique aussi dans ce contexte.

Prenons alors M holonome au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, et soit $L' \rightarrow M$ une bonne résolution libre de longueur finie, i.e. une résolution libre de longueur finie telle que $\text{gr}(L') \rightarrow \text{gr } M$ soit encore une résolution libre (de telles résolutions existent localement, la filtration de $L^i \simeq \mathcal{F}^{p_i}$ étant la filtration de $\mathcal{F}^{p_i}$ décalée de façon convenable). Alors $\text{gr}(L')$ définit un complexe de fibrés vectoriels triviaux sur $T^*(B_\epsilon)$; pour ϵ assez petit, ce complexe est exact sur le conormal à ∂B_ϵ privé de la section nulle, puisque ∂B_ϵ est non caractéristique pour M ; l'application $x \mapsto (x, \bar{x})$ de ∂B_ϵ dans son conormal fournit alors par image réciproque un complexe exact de fibrés vectoriels triviaux sur ∂B_ϵ , d'où un élément de $K^1(\partial B_\epsilon)$ qu'on notera $\{M\}$. A priori, $\{M\}$ dépend de la résolution choisie ; en fait le théorème de l'indice montrera a posteriori qu'il en est indépendant.

Prenons en particulier $M = \mathcal{O}$, et prenons pour L' le complexe de Koszul $K(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \mathcal{F})$ muni de la filtration évidente ; c'est évidemment une résolution graduée de $\mathcal{O}$ dont le "dual" $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(L', \mathcal{O})$ est le complexe de de Rham usuel. D'après le théorème de Bott, $\{\mathcal{O}\}$ est le générateur de $K^1(\partial B_\epsilon)$, d'où un isomorphisme bien déterminé $\chi_{\text{top}} : K^1(\partial B_\epsilon) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ défini

par $\chi_{\text{top}}(\{\mathcal{O}\}) = 1$. Le théorème est alors le suivant :

THEOREME 2.1. (Boutet de Monvel) - $\chi_0(M) = \chi_{\text{top}}(\{M\})$.

Naturellement, cette formule peut aussi s'écrire en termes de caractère de Chern, ou encore d'intégrale sur ∂B_ϵ : par exemple, si q est une application $\partial B_\epsilon \rightarrow \text{Gl}(m, \mathbb{C})$ telle que $\{M\}$ soit représenté par le complexe $\mathbb{C}^m \xrightarrow{q} \mathbb{C}^m$, on a

$$(2.2) \quad \chi_0(M) = - \frac{(n-1)!}{(2n-1)! (2\pi i)^n} \int_{\partial B_\epsilon} \text{Tr}(q^{-1} dq)^{2n-1}$$

avec $\mathbb{C}^n$ muni de l'orientation usuelle, et ∂B_ϵ orienté comme le bord de B_ϵ .

3. Constructibilité des solutions et formule de Kashiwara

Prenons encore un M holonome sur X , et soit $\Lambda \subset T^*X$ sa variété caractéristique ; des propriétés de Λ , on déduit facilement qu'il existe des sous-variétés fermées $X_i \subset X$, non nécessairement lisses, telles qu'on ait $\Lambda = \bigcup_i N^*X_{i, \text{reg}}$, où N^* désigne le fibré conormal et $X_{i, \text{reg}}$ la partie lisse de X_i ; on déduit de là qu'il existe une stratification de Whitney $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X telle qu'on ait $\Lambda \subset \bigcup_\alpha N^*X_\alpha$ (il est inutile ici d'écrire des adhérences, car la condition a) de Whitney signifie précisément que $\bigcup_\alpha N^*X_\alpha$ est fermé). En précisant les arguments qui conduisent au théorème 1.1, Kashiwara démontre le théorème fondamental suivant [K2], [K4].

THÉORÈME 3.1. - Soit $\{X_\alpha\}$ une stratification de Whitney de X telle que l'on ait $\Lambda \subset \bigcup_\alpha N^*X_\alpha$; alors, pour tout (i, α) le faisceau $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{O})|_{X_\alpha}$ est localement constant. En particulier, les faisceaux $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{O})$ sont constructibles.

Pour énoncer maintenant la formule de l'indice de Kashiwara, nous nous placerons dans la situation du théorème précédent, et nous utiliserons les notations suivantes :

- i) d_α est la codimension de X_α dans X ;
- ii) m_α est la multiplicité de M le long de N^*X_α , c'est-à-dire la multiplicité de $\text{gr } M$ le long de N^*X_α pour une bonne filtration de M (on peut voir que cette multiplicité ne dépend pas de la bonne filtration choisie) ;
- iii) $e(x, \bar{X}_\alpha)$ désigne "l'obstruction d'Euler" au sens de Mac-Pherson [M-P] de $x \in \bar{X}_\alpha$ dans $\bar{X}_\alpha$ (si $x \notin \bar{X}_\alpha$, on lui donne la valeur 0).

A noter que cet invariant est défini de façon indépendante par Kashiwara dans [K3] et [K4] ; pour la relation avec l'obstruction d'Euler, voir Dubson [D] et [B-D-K].

Le théorème de l'indice s'énonce alors ainsi :

THÉOREME 3.2. (Kashiwara, [K3], [K4]) - Dans les hypothèses du théorème 3.1, et avec les notations précédentes, on a

$$\chi_x(M) = \sum_{\alpha} (-1)^{d_\alpha} e(x, \bar{X}_\alpha) m_\alpha.$$

4. Indications sur les démonstrations

4.1. Nous nous contenterons d'indications sommaires, en examinant le cas d'une variable. Soit $p = \sum_0^m a_i(x) \partial^i$ ($\partial = \frac{d}{dx}$) un opérateur différentiel au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$, et posons $M = \mathcal{B}/\mathcal{B}p$; alors $\text{Hom}(M, \mathcal{O})$ (resp. $\text{Ext}^1(M, \mathcal{O})$) est le noyau (resp. le conoyau) de l'application $\mathcal{O} \xrightarrow{p} \mathcal{O}$; si l'on note μ l'ordre du zéro de a_m en 0, il est bien connu que l'indice de l'application $\mathcal{O}_0 \xrightarrow{p} \mathcal{O}_0$, c'est-à-dire le nombre $\chi_0(M)$, est égal à $m - \mu$. Ce résultat,

qui se trouve déjà plus ou moins chez Perron [P] semble avoir été énoncé explicitement pour la première fois, indépendamment dans [K1], [K0], [M1] (il était auparavant bien connu des spécialistes pour la forme affaiblie suivante, dite "théorème de Perron-Lettenmeyer" : $\dim \text{Ker}(p, \mathcal{O}_0) \geq m - \mu$). Une démonstration rapide de ce résultat consiste à se ramener, par perturbation compacte, au cas évident où $p = a_m(x) \partial^m$. Bien entendu, il faut ici travailler avec des Banach ; par exemple, on considère l'application $p: H^m(B_\epsilon) \rightarrow H^0(B_\epsilon)$, où $H^p(B_\epsilon)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^p sur $\bar{B}_\epsilon$ et holomorphes à l'intérieur ; on lui applique l'argument de perturbation compacte et on passe à la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$.

4.2. Indiquons maintenant comment la méthode de Boutet de Monvel marche dans ce cas particulier ; soit Q_+ (resp. $Q_- = 1 - Q_+$) le projecteur de $C^\infty(\partial B_\epsilon)$ sur le sous-espace des fonctions qui se prolongent en des fonctions holomorphes dans B_ϵ (resp. holomorphes dans $\mathbb{C} - \bar{B}_\epsilon$, et nulles à l'infini) ; l'application $Q_+ p Q_+ \oplus Q_-$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique sur $C^\infty(\partial B_\epsilon)$ dont l'indice est visiblement égal à $\chi_0(M)$ pour $\epsilon \ll 1$; or, cet indice se calcule par Atiyah-Singer, et vaut $-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\epsilon} q^{-1} dq$, avec $q = a_m(x) \bar{x}^m$; ceci donne le résultat cherché. Dans le cas général, Boutet de Monvel opère de même par réduction à Atiyah-Singer sur ∂B_ϵ ; inutile de dire que c'est beaucoup plus compliqué !

4.3. Expliquons maintenant la méthode de Kashiwara sur le même exemple, et, plus généralement, sur l'exemple d'un système holonome M au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$; la variété caractéristique est alors contenue dans l'ensemble $x\xi = 0$; soit m (resp. μ) la multiplicité de M sur $x = 0$ (resp. $\xi = 0$) ; il s'agit d'établir qu'on a $\chi_0(M) = m - \mu$.

Comparée aux précédentes, la démonstration va être relativement longue ; mais elle fournira en cours de route des résultats importants, par eux-

mêmes ; de plus, dans cette méthode, modulo le théorème 3.2, l'extension du cas $n=1$ au cas général sera facile (pour ce dernier point, je renvoie à [K4]).

La méthode est fondée sur la microlocalisation réelle. Soit S l'ensemble des directions réelles cotangentes à $\mathbb{C}$ en 0 ; on définit un faisceau sur S , noté $C^{\mathbb{R}}$, de la manière suivante : pour $\theta \in S$, désignons par $Z_{\epsilon, \theta}$ l'intersection du secteur fermé $|\arg(xe^{i\theta}) - \frac{\pi}{2}| < \epsilon$ et de la boule $B_{\epsilon} = \{|x| < \epsilon\}$; on pose alors $C_{\theta}^{\mathbb{R}} = \varinjlim_{\epsilon} \mathcal{O}(B_{\epsilon} - Z_{\epsilon, \theta}) / \mathcal{O}(B_{\epsilon})$. Le résultat-clé est le suivant :

THÉORÈME 4.3.1. -

- i) $\text{Hom}_{\mathcal{D}_0}(M_0, C_{\theta}^{\mathbb{R}})$ est un faisceau sur S localement isomorphe à $\mathbb{C}^{\mu}$;
- ii) $\text{Ext}_{\mathcal{D}_0}^i(M_0, C_{\theta}^{\mathbb{R}}) = 0$ pour $i \geq 1$.

On aurait aussi des résultats analogues pour $\mathcal{O}(B_{\epsilon} - Z_{\epsilon, \theta}) / \mathcal{O}(B_{\epsilon})$ (ϵ assez petit), mais peu importe.

Admettons provisoirement ce théorème, et montrons comment on en déduit le résultat cherché ; on choisit une direction θ et on considère la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_0 \rightarrow \varinjlim_{\epsilon} \mathcal{O}(B_{\epsilon} - Z_{\epsilon, \theta}) \rightarrow C_{\theta}^{\mathbb{R}} \rightarrow 0.$$

Le théorème précédent nous montre que l'indice

$$\chi(M_0, C_{\theta}^{\mathbb{R}}) = \sum (-1)^i \dim_j \text{Ext}_{\mathcal{D}_0}^i(M_0, C_{\theta}^{\mathbb{R}})$$

est égal à μ ; pour terminer, il suffit donc de voir que l'on a $\chi(M_0, \varinjlim_{\epsilon} \mathcal{O}(B_{\epsilon} - Z_{\epsilon, \theta})) = m$. Or, sur $B_{\epsilon} - \{0\}$, M est cohérent sur $\mathcal{O}$ puisque sa variété caractéristique est réduite à $\xi = 0$; par un raisonnement bien connu, on en déduit que $M|_{B_{\epsilon} - \{0\}}$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}^m$ en tant que $\mathcal{D}$ -module ; on est alors ramené au cas évident où $M = \mathcal{O} (= \mathcal{D}/\mathcal{D}\partial)$.

4.4. Reste à démontrer le théorème (4.3.1). Kashiwara montre qu'on peut cette fois-ci se ramener au cas trivial où $M = (\mathcal{B}/\mathcal{D}x)^\mu$. Plus précisément, il montre que, sur S , $M^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{B}} M$ est localement isomorphe à $(\mathcal{E}^{\mathbb{R}}/\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_x)^\mu$; ici, $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ désigne le faisceau sur $T^*\mathbb{C}-\{0\}$ des opérateurs microdifférentiels réels, qui se définit à partir de la diagonale $\Delta \subset \mathbb{C}^2$ de la même manière qu'on a défini $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ à partir de $\{0\} \subset \mathbb{C}$. Ce résultat est important, moins par son utilisation dans le théorème de l'indice que comme point de départ des travaux de Kashiwara-Kawai [K-K] sur les singularités régulières.

Je ne reproduirai pas ici l'argument de Kashiwara, d'ailleurs fort intéressant, qui est fondé sur l'étude d'une équation intégrale [K4]; j'en donnerai un autre, peut-être un peu plus long mais qui donne un résultat supplémentaire, à savoir la structure des $\mathcal{B}$ -modules holonomes à singularités irrégulières en dimension 1; j'explicitai ailleurs cette application.

5. Démonstration du théorème (4.3.1)

Elle est fondée sur deux ingrédients.

5.1. Transformation de Laplace des microfonctions. Soit Γ l'arc de cercle $|x| = \frac{\epsilon}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2} < \arg(xe^{i\theta}) < \frac{3\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2}$; parcouru dans le sens direct; pour $f \in \mathcal{O}(B_\epsilon - Z_{\epsilon, \theta})$, on pose $\hat{f}(\xi) = \int_\Gamma f(x) e^{-\xi x} dx$; on s'intéresse à $\hat{f}$ dans un petit secteur à l'infini $\Sigma_{\epsilon', \theta} : |\arg \xi - \theta| < \epsilon'$, $|\xi| > \frac{1}{\epsilon'}$ (ϵ' petit devant ϵ); il est facile de voir que $\hat{f}$ est à croissance sous-exponentielle dans un tel secteur, i.e. qu'on a $|\hat{f}(\xi)| \leq c_\eta e^{\eta|\xi|}$ pour tout $\eta > 0$ (déformer Γ pour le faire passer très près de 0 dans $B_\epsilon - Z_{\epsilon, \theta}$). D'autre part, si f est holomorphe dans B_ϵ , $\hat{f}$ sera à décroissance exponentielle dans $\Sigma_{\epsilon', \theta}$, i.e. on aura pour un $\eta > 0$, $|\hat{f}(\xi)| \leq ce^{-\eta|\xi|}$, parce qu'ici on pourra déformer Γ de façon à lui faire traverser l'origine; enfin, si

l'on change Γ en diminuant ϵ , on modifie $\hat{f}$ par une fonction à décroissance exponentielle.

Désignons alors par $\mathcal{G}(\Sigma_{\epsilon', \theta})$ (resp. $\mathcal{G}_+(\Sigma_{\epsilon', \theta})$, resp. $\mathcal{G}_-(\Sigma_{\epsilon', \theta})$) l'espace des fonctions holomorphes (resp. holomorphes à croissance sous-exponentielle, resp. holomorphes à décroissance exponentielle) dans $\Sigma_{\epsilon', \theta}$; en faisant tendre ϵ' vers 0, on obtient trois faisceaux sur S , notés respectivement $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_+$, $\mathcal{G}_-$; de la construction précédente, on déduit un morphisme de faisceaux $\mathcal{L} : \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{G}_+/\mathcal{G}_-$.

PROPOSITION (5.1.1). - L'application $\mathcal{L}$ ("transformée de Laplace") est bijective.

Ceci est une conséquence facile de la formule d'inversion de Fourier et de la formule de Cauchy (l'application inverse est donnée par $g \rightarrow -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} g(\xi) \rho^{\xi x} dx$, Δ une demi-droite $\subset \Sigma_{\epsilon', \theta}$, d'origine fixe et de direction variable voisine de θ). D'autre part, cette transformation possède les propriétés usuelles : $\mathcal{L}(xf) = -\frac{d}{d\xi} \mathcal{L}f$; $\mathcal{L}(\frac{df}{dx}) = \xi(\mathcal{L}f)$.

5.2. Structure des $\mathcal{E}$ -modules holonomes au point $(0, 1) \in T^*\mathbb{C}$

On écrit ici $\mathcal{E}$ pour $\mathcal{E}_{(0, 1)}$; soit N un $\mathcal{E}$ -module holonome, de multiplicité μ , et soit $\{N_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ une bonne filtration de N ; alors N_0/N_{-1} est de dimension μ pour $\mathbb{C}$; on en prend une base $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_\mu$, et on relève les $\bar{e}_i$ en des éléments $e_i \in N_0$; par le théorème de préparation, $e_1, \dots, e_\mu$ est une base de N sur $\mathcal{E}(\partial)$, le sous-espace de $\mathcal{E}$ formé des opérateurs microdifférentiels dont le symbole est indépendant de x ; on a les équations suivantes :

$$(5.2.1) \quad x e_i = \sum_{ij} a_{ij}(\partial) e_j, \quad a_{ij}(\partial) \in \mathcal{E}(\partial), \quad a_{ij} \text{ de degrés } \leq 0;$$

de plus la matrice a_{ij} formée des parties principales de degré 0 est nilpotente (puisque'elle exprime l'action de x sur N_0/N_{-1} ; celle-ci est nilpotente parce que N a son support sur $x = 0$).

Rappelons maintenant qu'un $a(\partial) \in \mathcal{E}(\partial)$ s'écrit par définition $a(\partial) = \sum_{k \leq k_0} a_k \partial^k$, la série $\sum_{k \leq 0} \frac{a_k}{(-k)!} \xi^k$ étant convergente pour $|\xi| \gg 1$; en général, la série $a(\xi) = \sum_{k \leq 0} a_k \xi^k$ ne sera pas convergente à l'infini : si c'est cependant le cas, on dira que $a(\partial)$ est strictement convergent. On a alors le théorème suivant [M3] :

THÉORÈME (5.2.2). -

- i) On peut choisir les e_i de manière que, dans (5.2.1), les $a_{ij}(\partial)$ soient strictement convergents.
- ii) Si l'on a deux tels choix, $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$ la matrice $s_{ij}(\partial)$ définie par $e'_i = \sum s_{ij}(\partial) e'_j$ est strictement convergente.

Ce résultat peut encore s'énoncer comme une équivalence de catégories entre $\mathcal{E}$ -modules holonomes et certains $\mathbb{C}\{\xi^{-1}\}[\xi]$ vectoriels à connexion ; voir [M3] pour ce point.

5.3. Nous disposons maintenant de tout ce qu'il nous faut pour démontrer le théorème (4.3.1). Tout d'abord, $\mathcal{E}$ opère dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}[S-K-K]$: ceci se voit en plongeant $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ et en faisant agir $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ par intégration, ou "morphisme trace" ; le lecteur peut admettre ce point en 1ère approximation, et se laisser convaincre par le fait que ∂ est visiblement inversible sur $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ (deux primitives diffèrent par une constante, dont l'image dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ est nulle !) ; en remplaçant alors M_0 par $N = \mathcal{E}_{(0,1)} \otimes_{\mathcal{B}_0} M_0$, on est ramené à démontrer l'analogue de (4.3.1) avec $\mathcal{B}_0$ remplacé par $\mathcal{E}_{(0,1)}$ ($= \mathcal{E}$, dans les notations de ce paragraphe), et M_0 par N .

Ensuite, on voit facilement que N est défini par les équations (5.2.1) ; par suite, le complexe $R\text{Hom}_{\mathcal{E}}(N, \mathbb{C}^{\mathbb{R}})$ est le complexe

$$(\mathbb{C}^{\mathbb{R}})^{\mu} \xrightarrow{x-A(\partial)} (\mathbb{C}^{\mathbb{R}})^{\mu}, \text{ avec } A(\partial) = (a_{ij}(\partial)).$$

Il s'agit de démontrer que le noyau de cette flèche est localement isomorphe à $\mathbb{C}^\mu$, et que le conoyau est nul ; d'après le théorème (5.2.2), on peut supposer $A(\partial)$ strictement convergent, i.e. $A(\xi)$ convergent à l'infini ; par transformation de Laplace, il revient au même d'établir le même résultat pour le complexe $(G_+/G_-)^\mu \xrightarrow{\frac{d}{d\xi} + A(\xi)} (G_+/G_-)^\mu$, complexe que nous noterons $K(\frac{d}{d\xi} + A(\xi), G_+/G_-)$; or le résultat est évident, par le théorème d'existence et d'unicité usuel, si l'on remplace G_+/G_- par G . Par conséquent, il suffit en définitive d'établir le résultat suivant :

LEMME (5.3.1). - Soient i et j les flèches évidentes

$G \xleftarrow{i} G_+ \xrightarrow{j} G_+/G_-$. Alors les flèches

$$K(\frac{d}{d\xi} + A(\xi), G) \xleftarrow{i} K(\frac{d}{d\xi} + A(\xi), G_+) \xrightarrow{j} K(\frac{d}{d\xi} + A(\xi), G_+/G_-)$$

sont des quasi-isomorphismes.

La démonstration se fait en 2 temps :

i) Si $F \in G^\mu$ vérifie $\frac{dF}{d\xi} + A(\xi)F = 0$, on a $F \in G_+^\mu$, autrement dit F est à croissance sous-exponentielle ; ceci résulte facilement du fait que A est holomorphe à l'infini, de partie principale nilpotente (en termes techniques, du fait que l'équation $\frac{d}{d\xi} + A(\xi)$ a un invariant de Katz < 1), et de majorations élémentaires.

ii) Prenons alors $Y = (F^1, \dots, F^\mu)$ une base des solutions de cette équation dans $G_{+, \theta}$; le changement de base $F = YG$ nous ramène au cas où $A(\xi) = 0$, auquel cas le résultat, évident, peut être laissé au lecteur. Ceci achève la démonstration.

Remarques.

i) La réduction à $\frac{d}{d\xi}$ qui vient d'être faite redémontre le résultat suivant : $N^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{E}} N$ est localement isomorphe sur S à $(\mathcal{E}^{\mathbb{R}}/\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_x)^\mu$ (cf. l'énoncé à la fin du §4).

ii) On peut éviter l'emploi du théorème (5.2.2), moins élémentaire que les autres résultats de ce paragraphe ; en effet, $\mathcal{E}(\partial)$ se plonge naturellement dans $\Gamma(\mathbb{S}, \mathbb{C}^{\mathbb{R}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{C}^{\infty}$; par ce plongement, $\mathcal{E}(\partial)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, espace des sections à croissance modérée de $\mathbb{C}^{\infty}$ au voisinage de 0, et, pour $f \in \mathbb{C}_{\theta}^{\mathbb{R}}$, on a $\mathcal{L}(a(\partial)f) = \mathcal{L}(a(\partial))\mathcal{L}(f)$. On part alors de (5.2.1), avec $a_{ij}(\partial)$ non nécessairement strictement convergent ; soit $\tilde{a}_{ij}(\xi)$ un relèvement de $\mathcal{L}(a_{ij}(\partial))$ dans $G_{+, \theta}$; on peut voir que $\tilde{a}_{ij}(\xi)$ admet la série formelle $a_{ij}(\xi)$ comme développement asymptotique à l'infini. Alors, il suffit d'établir le lemme avec $A(\xi)$ remplacé par $\tilde{A}(\xi) = (\tilde{a}_{ij}(\xi))$, ce qui se fait de la même manière.

Bibliographie

- [B] L. BOUTET DE MONVEL, On the index of Toeplitz operators of several complex variables, *Inv. Math.* 50 (1979), pp. 249-272.
- [B-D-K] J.L. BRYLINSKI, A.S. DUBSON, M. KASHIWARA, Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale, *C.R. Acad. Sc.*
- [D] A.S. DUBSON, Calcul des invariants numériques des singularités et applications, Bonn (1981), multigraphié.
- [K1] M. KASHIWARA, Thèse (1970) (en japonais).
- [K2] M. KASHIWARA, On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I, *Publ. RIMS, Kyoto University* 10 (1975), pp. 563-579.
- [K3] M. KASHIWARA, Index theorem for a maximally overdetermined system of linear differential equations, *Proc. Jap. Acad.* 49-10 (1973), pp. 803-804.
- [K4] M. KASHIWARA, Systèmes d'équations microdifférentielles, Paris Nord (1977), notes miméographiées.
- [K-K] M. KASHIWARA, T. KAWAI, On holonomic systems of microdifferential equations III, Systems with regular singularities, *RIMS, Kyoto University*, n° 293 (1979).

- [Ko] H. KOMATSU, On the index of ordinary differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, IA, 18 (1971), pp. 379-398.
- [M1] B. MALGRANGE, Remarques sur les points singuliers des équations différentielles, C.R. Acad. Sc. 273-23 (1971), pp. 1136-1137.
- [M2] B. MALGRANGE, L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels, Séminaire Bourbaki n°522 (1977-78).
- [M3] B. MALGRANGE, Modules microdifférentiels et classes de Gevrey, Advances in Math., 7B, Academic Press (1981), pp. 513-530.
- [M-P] R.D. Mac PHERSON, Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. of Math. 100-2 (1974), pp. 424-432.
- [P] O. PERRON, Ueber Summergleichungen and Poincaréshe Differenzengleichungen, Math. Ann. 84 (1921), pp. 1-15.
- [S-K-K] M. SATO, T. KAWAI, M. KASHIWARA, Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math. n°287, Springer (1973), pp. 265-529.

Institut FOURIER
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques
Pures associé au CNRS
B.P.74
38402 - Saint-Martin-d'Hères
FRANCE