

Astérisque

GÉRARD LAUMON

**Caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux
constructibles sur une surface**

Astérisque, tome 101-102 (1983), p. 193-207

http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__101-102__193_0

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ
DES FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES SUR UNE
SURFACE

par

Gérard LAUMON (Orsay*)

-:-:-

Le point de départ de ce travail est une lettre de Deligne à Illusie [1] où Deligne énonce les résultats principaux de cet exposé et en indique une méthode de démonstration.

Je tiens à remercier Illusie qui m'a signalé ce problème et qui a dirigé avec beaucoup de patience ce travail. Je tiens aussi à remercier Deligne et Gabber qui m'ont aidé à résoudre de nombreuses difficultés.

Les détails des démonstrations de cet exposé seront publiés ultérieurement.

1. Introduction.

1.0. Soit X une courbe connexe, projective et lisse sur un corps k algébriquement clos, soient U un ouvert dense de X , $\mathbb{F}_\lambda$ un corps fini de caractéristique inversible dans k et $\mathfrak{F}$ un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$ -espaces vectoriels sur U . Alors, la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$(1.0.1) \quad \chi_c(U, \mathfrak{F}) \stackrel{\text{dfn}}{=} \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_\lambda} H_c^i(U, \mathfrak{F})$$

se calcule par la formule de Grothendieck-Ogg-Safarevic [4]

$$(1.0.2) \quad \chi_c(U, \mathfrak{F}) = \chi_c(U) \text{rang}(\mathfrak{F}) - \sum_{x \in X-U} S_{w_x}(\mathfrak{F})$$

où, pour $x \in X-U$, $S_{w_x}(\mathfrak{F})$ est un entier, appelé conducteur de

* Equipe de recherche associée au C.N.R.S. n°653.

Swan de $\mathfrak{F}$ en x , qui mesure la ramification sauvage de $\mathfrak{F}$ en x ; en particulier, $\mathfrak{F}$ est modérément ramifié en x (condition automatiquement vérifiée si k est de caractéristique nulle) si et seulement si $Sw_x(\mathfrak{F}) = 0$.

1.1. Soit maintenant X une surface connexe, normale, projective sur le corps k , soient U un ouvert dense de X et $\mathfrak{F}$ un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$ -espaces vectoriels sur U (k et $\mathbb{F}_\lambda$ étant comme en 1.0). Alors on s'attend à une formule du type

$$(1.1.1) \quad \chi_c(U, \mathfrak{F}) = \chi_c(U) \text{rang}(\mathfrak{F}) + \Sigma (\text{termes dépendant de la ramification de } \mathfrak{F} \text{ le long de } X-U) .$$

Ceci nous amène à étudier la ramification de $\mathfrak{F}$ le long de $X-U$. Soit $(Y_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles de $Y=X-U$ qui sont de codimension 1 dans X . Pour chaque $i \in I$, notons δ_i le point générique de Y_i et $X_{(\delta_i)}$ l'hensélisé de X en δ_i . Deux types de ramification de $\mathfrak{F}$ en δ_i sont possibles : soit il existe une extension finie du trait $X_{(\delta_i)}$ ayant une extension résiduelle séparable et qui trivialise le faisceau $\mathfrak{F}|_{U \times_X X_{(\delta_i)}}$, soit toute extension finie du trait $X_{(\delta_i)}$ qui trivialise¹ le faisceau $\mathfrak{F}|_{U \times_X X_{(\delta_i)}}$ a une extension résiduelle non séparable. Dans le premier cas, nous dirons que le faisceau $\mathfrak{F}$ est non férocement ramifié le long de Y_i et, dans le second cas, que le faisceau $\mathfrak{F}$ est férocement ramifié le long de Y_i .

1.2. Nous ne traiterons dans cet exposé que du cas non féroce. Dans ce cas, pour chaque $i \in I$, il existe un ouvert dense Y_i° de Y_i et un entier $Sw_i(\mathfrak{F})$ (cf. 2.2) ayant la propriété suivante : si C est un germe de courbe tracée sur X et transverse à Y en un point x de Y_i° , alors le conducteur de Swan en x du faisceau $\mathfrak{F}|_{U \times_X C}$ est égal à $Sw_i(\mathfrak{F})$. Le résultat principal de cet exposé est le

suivant :

Théorème 1.2.1. Pour chaque point fermé x de X , on peut définir un entier $Sw_x(\mathfrak{F})$ qui ne dépend que du germe de $\mathfrak{F}$ en x , i.e. du faisceau $\mathfrak{F}|_{U_x X_{(x)}}$ où $X_{(x)}$ est l'hensélisé de X en x , et ayant les propriétés suivantes :

- (i) si $x \in U$, $Sw_x(\mathfrak{F}) = \text{rang}(\mathfrak{F})$,
- (ii) si $x \in Y_i^\circ$ pour un $i \in I$, $Sw_x(\mathfrak{F}) = -Sw_i(\mathfrak{F})$,
- (iii) si l'on pose $Y^\circ = \bigcup_{i \in I} Y_i^\circ$, on a

$$(1.2.1.1) \quad \chi_c(U, \mathfrak{F}) = \chi_c(U) \text{rang}(\mathfrak{F}) - \sum_{i \in I} \chi_c(Y_i^\circ) Sw_i(\mathfrak{F}) \\ + \sum_{x \in Y - Y^\circ} Sw_x(\mathfrak{F}).$$

2. Définition des entiers $Sw_i(\mathfrak{F})$ et $Sw_x(\mathfrak{F})$.

2.1. Pour chaque $i \in I$, notons A_i l'anneau de valuation discrète hensélien tel que $X_{(\delta_i)} = \text{Spec}(A_i)$, notons K_i le corps des fractions de A_i , de sorte que $U_x X_{(\delta_i)} = \text{Spec}(K_i)$, et fixons une clôture séparable K_i^{sep} de K_i . Un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$ -espaces vectoriels sur $\text{Spec}(K_i)$ n'est autre qu'un $\mathbb{F}_\lambda[\text{Gal}(K_i^{\text{sep}}/K_i)]$ -module fini ; notons M_i le $\mathbb{F}_\lambda[\text{Gal}(K_i^{\text{sep}}/K_i)]$ -module fini correspondant à $\mathfrak{F}|_{U_x X_{(\delta_i)}}$ et $\rho_i : \text{Gal}(K_i^{\text{sep}}/K_i) \rightarrow \text{GL}(M_i)$ la représentation galoisienne associée. Le noyau de ρ_i est de la forme $\text{Gal}(K_i^{\text{sep}}/L_i)$ où L_i est une sous-extension de K_i^{sep}/K_i finie galoisienne. Alors dire que $\mathfrak{F}$ est non-férocement ramifié le long de Y_i revient à dire que l'extension résiduelle de L_i/K_i (relativement à l'anneau de valuation discrète A_i) est séparable. Par définition $Sw_i(\mathfrak{F})$ sera le conducteur de Swan du $\mathbb{F}_\lambda[\text{Gal}(L_i/K_i)]$ -module fini M_i (cf. [6] 19.3).

2.2. On définit maintenant, pour chaque $i \in I$, l'ouvert dense Y_i° de Y_i de la façon suivante : on commence par considérer l'ouvert dense $Y_i^{\circ\circ}$ de Y_i formé des points x de Y_i en lesquels (X, Y) est un k -couple lisse ; si l'on fait passer par un point x de $Y_i^{\circ\circ}$ un germe de courbe C transverse à Y_i en x , le conducteur de Swan, $Sw_x(\mathfrak{F}|_C)$, du faisceau

$\mathfrak{F}|Ux_X C$ en x est bien défini et il existe un ouvert dense

Y_1° de Y_1° tel que $Sw_x(\mathfrak{F}|C) = Sw_1(\mathfrak{F})$ pour tout $x \in Y_1^\circ$ et tout germe de courbe C transverse à Y en x .

Exemple 2.2.1. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, $X = \text{Spec}(k[x, y])$, $U = X[1/y]$, $Y = X - U$, n un entier strictement positif, $\psi: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_\lambda^*$ un caractère additif non trivial et $\mathfrak{F} = \mathcal{L}(\psi, x/y^n)$ le faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$ -espaces vectoriels sur U obtenu à partir du $\mathbb{F}_p$ -torseur d'Artin-Schreier d'équation $t^p - t = x/y^n$ par extension du groupe structural de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}_\lambda^*$ via ψ^{-1} . Notons $A = k(x)\{y\}$ l'hensélisé de $k[x, y]$ au point générique de Y , K son corps des fractions, $L = K[t]/(t^p - t - x/y^n)$ et B le normalisé de A dans L ; alors L/K est une extension galoisienne de groupe de Galois $\mathbb{F}_p$ et $\mathfrak{F}|\text{Spec}(K)$ est le faisceau associé à la représentation galoisienne $\psi^{-1}: \text{Gal}(L/K) = \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_\lambda^* = \text{GL}(1, \mathbb{F}_\lambda)$; cette représentation est fidèle (ψ est non trivial), donc $\mathfrak{F}$ est non férocement ramifié le long de Y si et seulement si l'extension résiduelle de B/A est séparable.

Montrons que $\mathfrak{F}$ est non férocement ramifié le long de Y si et seulement si n est premier à p . Pour cela, notons $v: L - \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ la valuation de B normalisée par $v(y) = 1$, e l'indice de ramification de B/A et f le degré de l'extension résiduelle; on a $v(L - \{0\}) = \mathbb{Z}[1/e]$ et $e.f = p$. Comme $t^p - t = x/y^n$, on a $v(t) = -n/p$. Si $(n, p) = 1$, $v(t) \notin \mathbb{Z}$ et $e = p$, $f = 1$, donc $\mathfrak{F}$ est non férocement ramifié le long de Y . Si $n = m.p$, avec $m \in \mathbb{N}$, alors $v(ty^m) = 0$ et $v(ty^n) > 0$, donc, si on réduit la relation $(ty^m)^p - ty^n = x$ modulo l'idéal maximal de B , on voit que x admet une racine p -ième dans le corps résiduel de B ; comme x n'admet pas de racine p -ième dans $k(x)$, l'extension résiduelle de B/A est non triviale et purement inséparable, donc $\mathfrak{F}$ est férocement ramifié le long de Y .

Supposons maintenant $(n, p) = 1$ de sorte que l'on est dans le cas non féroce, alors le conducteur de Swan de $\mathfrak{F}$ au point générique de Y , $Sw_Y(\mathfrak{F})$, est égal à n (cf. [7] 4.4).

Si C est le germe de courbe d'équation $x=\phi(y)$, où $\phi(y) \in k[[y]]$, on a $Sw_{(\phi(0),0)}(\mathfrak{F}|C) = n$ si $\phi(0) \neq 0$ et $Sw_{(0,0)}(\mathfrak{F}|C) < n$ si $\phi(0)=0$, donc $Y^\circ = Y - \{(0,0)\}$.

2.3. Pour tout point fermé x de X , nous appellerons projection locale en x tout k -morphisme $f: X_{(x)} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ tel que $f(x)=0$ ($X_{(x)}$ désignant l'hensélisé de X en x). On dira qu'une projection locale f en x est bonne si f est essentiellement lisse en dehors de x et si $f|Y_{X_{(x)}} \rightarrow (\mathbb{A}_k^1)_{(0)}$ est fini étale en dehors de x .

Choisissons une clôture séparable du corps des fractions de l'hensélisé de $\mathbb{A}_k^1$ en 0 et notons I le groupe d'inertie du trait $(\mathbb{A}_k^1)_{(0)}$ correspondant à cette clôture séparable. À toute projection locale en x , $f: X_{(x)} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$, on peut associer alors un foncteur, dit foncteur "cycles évanescents" (cf. [2]),

$$(2.3.1) \quad R\Psi(-, f)_x : D_C^b(X, \mathbb{F}_\lambda) \rightarrow D_F^b(\mathbb{F}_\lambda[I])$$

où $D_C^b(X, \mathbb{F}_\lambda)$ est la catégorie dérivée des complexes de faisceaux de $\mathbb{F}_\lambda$ -espaces vectoriels sur X à cohomologie bornée constructible et où $D_F^b(\mathbb{F}_\lambda[I])$ est la catégorie dérivée des complexes de $\mathbb{F}_\lambda[I]$ -modules à cohomologie bornée et de dimension finie sur $\mathbb{F}_\lambda$. En passant aux groupes de Grothendieck de ces catégories on a donc un homomorphisme

$$(2.3.2) \quad \Psi(-, f)_x : K_C^b(X, \mathbb{F}_\lambda) \rightarrow K_F^b(\mathbb{F}_\lambda[I]).$$

D'autre part, si V est un $\mathbb{F}_\lambda[I]$ -module fini, on pose

$$(2.3.3) \quad \dim_{\text{tot}}(V) = \dim_{\mathbb{F}_\lambda}(V) + Sw(V)$$

où le conducteur de Swan, $Sw(V)$, est défini de la même façon qu'en 2.1. La fonction $\dim_{\text{tot}}(-)$ est additive donc fournit un homomorphisme de groupes

$$(2.3.4) \quad \dim_{\text{tot}}(-) : K_F^b(\mathbb{F}_\lambda[I]) \rightarrow \mathbb{Z}$$

Définition 2.3.5. Pour tout point fermé x de X et pour toute bonne projection locale f en x , on pose

$$(2.3.5.1) \quad Sw_x(\mathfrak{F}, f) = -\dim_{\text{tot}} [\Psi(F, f)_x]$$

où $F \in K_c^b(X, \mathbb{F}_\lambda)$ est le faisceau virtuel défini par

$$(2.3.5.2) \quad F = [u_! \mathfrak{F}] - \text{rang}(\mathfrak{F}) \cdot [\mathbb{F}_{\lambda, U}] + \sum_{i \in I} \text{Sw}_i(\mathfrak{F}) \cdot [\mathbb{F}_{\lambda, Y_i^0}],$$

$u: U \rightarrow X$ désignant l'inclusion et $\mathbb{F}_{\lambda, Z}$ désignant le faisceau constant $\mathbb{F}_\lambda$ sur Z prolongé par 0 à X tout entier, pour toute partie localement fermée Z de X .

Théorème 2.3.6. Pour tout point fermé x de X , $\text{Sw}_x(\mathfrak{F}, f)$ est indépendant de la bonne projection locale en x choisie.

Définition 2.3.7. Pour tout point fermé x de X , $\text{Sw}_x(\mathfrak{F})$ sera la valeur commune des $\text{Sw}_x(\mathfrak{F}, f)$ pour f parcourant les bonnes projections locales en x .

Exemples 2.3.8 . a) Si $X = X_1 \times X_2$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \boxtimes \mathfrak{F}_2$, $x = (x_1, x_2)$ où X_1, X_2 sont deux courbes lisses sur k et où $\mathfrak{F}_i$ est un faisceau constructible de $\mathbb{F}_\lambda$ -espaces vectoriels localement constant sur $X_i - \{x_i\}$ ($i=1,2$), alors

$$\text{Sw}_x(\mathfrak{F}) = \text{Sw}_{x_1}(\mathfrak{F}_1) \cdot \text{Sw}_{x_2}(\mathfrak{F}_2).$$

b) Si $\mathfrak{F}$ est modérément ramifié au point x de Y , au sens où les pro- p -groupes de $\pi_1(U_{X/X(x)}, t)$ agissent trivialement sur $\mathfrak{F}_t$ pour tout point géométrique t de $U_{X/X(x)}$, alors $\text{Sw}_x(\mathfrak{F}) = 0$.

c) Si $f(x, y) \in k[x, y]$ présente en $(0, 0)$ une singularité isolée et si dans la résolution de cette singularité les multipllicités qui apparaissent sont inversibles dans k , on a, pour tout caractère additif non trivial $\psi: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_\lambda^*$,

$$\text{Sw}_{(0,0)}(\mathcal{L}(\psi, 1/f(x, y))) = 1 - u_{(0,0)}(f)$$

où $\mathcal{L}(\psi, 1/f(x, y))$ est le faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$ -espaces vectoriels sur $U = \text{Spec}(k[x, y, 1/f(x, y)])$ obtenu à partir du $\mathbb{F}_p$ -torseur d'Artin-Schreier d'équation $t^p - t = 1/f(x, y)$ par extension du groupe structural de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}_\lambda$ via ψ^{-1} .

3. Principe de la méthode des pinceaux.

3.1. Fibrons la surface par un pinceau d'hyperplans relativement à un plongement projectif de X arbitraire pour l'instant. On choisit le pinceau de telle sorte que son axe ne rencontre pas Y , ni le lieu singulier de X et soit transverse à X . Notons

$$(3.1.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ \mathcal{I} \downarrow & & \\ \mathbb{P}_k^1 & & \end{array}$$

la variété d'incidence du pinceau et $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1$ l'application rationnelle donnée par le pinceau et définie en dehors de l'axe.

Pour prouver (1.2.1.1), on doit montrer que $\chi(X, F)$ (pour F défini en (2.3.5.2)) est somme des $Sw_x(\mathfrak{F})$ pour x parcourant $Y - Y^\circ$. Pour cela on va calculer $\chi(X, F)$ à l'aide du pinceau. On vérifie sans peine que

$$(3.1.2) \quad \chi(X, F) = \chi(X, \pi^* F)$$

et, compte-tenu de la suite spectrale de Leray pour $\mathcal{I}$, on a

$$(3.1.3) \quad \chi(X, \pi^* F) = \chi(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{I}_* \pi^* F).$$

Or, par la formule de Grothendieck-Ogg-Safarevic [4], on a

$$(3.1.4) \quad \chi(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{I}_* \pi^* F) = \chi(\mathbb{P}_k^1) \chi(\mathcal{I}^{-1}(\bar{\eta}), \pi^* F) - \sum_{t \in \mathbb{P}_k^1(k)} a_t(\mathcal{I}_* \pi^* F),$$

avec les notations suivantes : $\bar{\eta}$ est un point géométrique générique de $\mathbb{P}_k^1$, pour tout faisceau constructible $\mathfrak{G}$ de $\mathbb{P}_\lambda^1$ -espaces vectoriels sur $\mathbb{P}_k^1$ et pour tout $t \in \mathbb{P}_k^1(k)$, on pose

$$(3.1.5) \quad a_t(\mathfrak{G}) = \dim_{\mathbb{P}_\lambda^1}(\mathfrak{G}_{\bar{\eta}}) + Sw_t(\mathfrak{G}) - \dim_{\mathbb{P}_\lambda^1}(\mathfrak{G}_t)$$

et l'on étend a_t par additivité à $K_c^b(\mathbb{P}_k^1, \mathbb{P}_\lambda^1)$. La formule de Grothendieck-Ogg-Safarevic entraîne d'autre part :

$$(3.1.6) \quad \chi(\mathcal{I}^{-1}(\bar{\eta}), \pi^* F) = 0.$$

Par suite, on a :

$$(3.1.7) \quad \chi(X, F) = - \sum_{t \in \mathbb{P}_k^1(k)} a_t(\mathcal{F}_* \pi^* F).$$

La théorie des cycles évanescents [2], relativement à chaque trait $(\mathbb{P}_k^1)(t)$, $t \in \mathbb{P}_k^1(k)$, permet de localiser le second membre de (3.1.7) aux points de non locale acyclicité du triplet $(\tilde{X}, \mathcal{F}, \pi^* F)$. Plus précisément, si l'on peut choisir le pinceau de telle sorte que l'ensemble des points de non locale acyclicité de $(\tilde{X}, \mathcal{F}, \pi^* F)$ soit fini, alors la théorie des cycles évanescents relativement au trait $(\mathbb{P}_k^1)(t)$ permet d'expliciter $a_t(\mathcal{F}_* \pi^* F)$ sous la forme

$$(3.1.8) \quad a_t(\mathcal{F}_* \pi^* F) = \sum_{\substack{x \in \tilde{X}(k) \\ \mathcal{F}(\tilde{X}) = t}} \dim_{\text{tot}} [\Phi(\pi^* F, \mathcal{F})_{\tilde{X}}],$$

où l'on a posé

$$(3.1.9) \quad \Phi(-, \mathcal{F})_{\tilde{X}} = \Psi(-, \mathcal{F})_{\tilde{X}} - (-)_{\tilde{X}}$$

dans $\text{Hom}(K_c^b(\tilde{X}, \mathbb{F}_\lambda), K_f^b(\mathbb{F}_\lambda[I]))$, I désignant le groupe d'inertie du trait $(\mathbb{P}_k^1)(t)$ et Ψ , $\dim_{\text{tot}}$ ayant la même signification qu'en 2.3. Donc, si l'on peut choisir le pinceau de telle sorte que l'ensemble des points de non locale acyclicité de $(\tilde{X}, \mathcal{F}, \pi^* F)$ soit fini, on peut réécrire (3.1.7) sous la forme

$$(3.1.10) \quad \chi(X, F) = - \sum_{x \in \tilde{X}} \dim_{\text{tot}} [\Phi(\pi^* F, \mathcal{F})_{\tilde{X}}],$$

où le second membre est en fait une somme finie indexée par les points de non locale acyclicité de $(\tilde{X}, \mathcal{F}, \pi^* F)$.

3.2. Choisissons maintenant le pinceau de telle sorte que :

- a) son axe ne rencontre ni Y , ni le lieu singulier de X et soit transverse à X ,
- b) sa fibre générale ne rencontre pas le lieu singulier de X , ni $Y - Y^\circ$ et soit transverse à X et à Y ,
- c) chacune de ses fibres soit génériquement transverse à X .

Alors, il n'y a qu'un nombre fini de points de non locale acyclicité de $(\tilde{X}, \mathcal{F}, \pi^* F)$ en dehors de $\pi^{-1}(Y)$ (les points singuliers de $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(U)}$) et, comme on a pris soin

d'ôter à $\mathfrak{F}$ le faisceau constant de même rang sur U , on a, pour tout $\tilde{x} \in \pi^{-1}(Y)$,

$$(3.2.1) \quad \dim_{\text{tot}} [\Phi(\pi^*F, \mathfrak{f})_{\tilde{x}}] = 0.$$

D'autre part, pour un point $\tilde{x} \in \pi^{-1}(Y)$, comme l'axe du pinceau ne rencontre pas Y , f est définie en $x = \pi(\tilde{x})$ et

$$(3.2.2) \quad \dim_{\text{tot}} [\Phi(\pi^*F, \mathfrak{f})_{\tilde{x}}] = \dim_{\text{tot}} [\Phi(F, f)_x].$$

De plus, il n'y a qu'un nombre fini de points de non locale acyclicité de (X, f, F) sur Y : d'une part les points de $Y - Y^\circ$, d'autre part les points de tangence du pinceau avec Y° , i.e. les points $y \in Y^\circ$ tels que la section du pinceau qui passe par y ne soit pas transverse à Y° en y . Cela résulte en effet du théorème de semi-continuité du conducteur de Swan démontré par Deligne ([5]) et dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème 3.2.3. Soient S un trait strictement local, $f: X \rightarrow S$ une S -courbe lisse (f séparé, lisse purement de dimension relative 1), $Y \subset X$ un fermé fini et plat sur S , $\mathbb{F}_\lambda$ un corps fini de caractéristique inversible sur S , $\mathfrak{F}$ un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$ -espaces vectoriels, de rang constant r , sur $U = X - Y \xrightarrow{u} Y$. Alors, si l'on pose, pour tout $t \in S$ (t désigne donc soit le point fermé s de S , soit le point générique η de S),

$$\phi(t) = \sum_{y \in Y_{\bar{t}}} [Sw_y(\mathfrak{F}|_{U_x X_{\bar{t}}}) + r],$$

où $\bar{t}$ est un point géométrique arbitraire localisé en t et où $X_{\bar{t}}$ (resp. $Y_{\bar{t}}$) est la fibre en $\bar{t}$ de f (resp. $f|_Y$), on a

$$\phi(s) - \phi(\eta) = - \sum_{y \in Y_s} \dim_{\mathbb{F}_\lambda} [R\Psi^1(u_! \mathfrak{F}, f)_y],$$

les autres $R\Psi^i(u_! \mathfrak{F}, f)_y$ étant nuls ($i \neq 1, y \in Y_s$).

Par définition de Y° , il en résulte que, dans notre situation, si $x \in Y^\circ$ et si $f^{-1}(f(x))$ est lisse et transverse à Y° en x , on a $R\Psi(u_! \mathfrak{F}, f)_y = 0$, ce qui entraîne facilement $\dim_{\text{tot}} [\Phi(F, f)_x] = 0$.

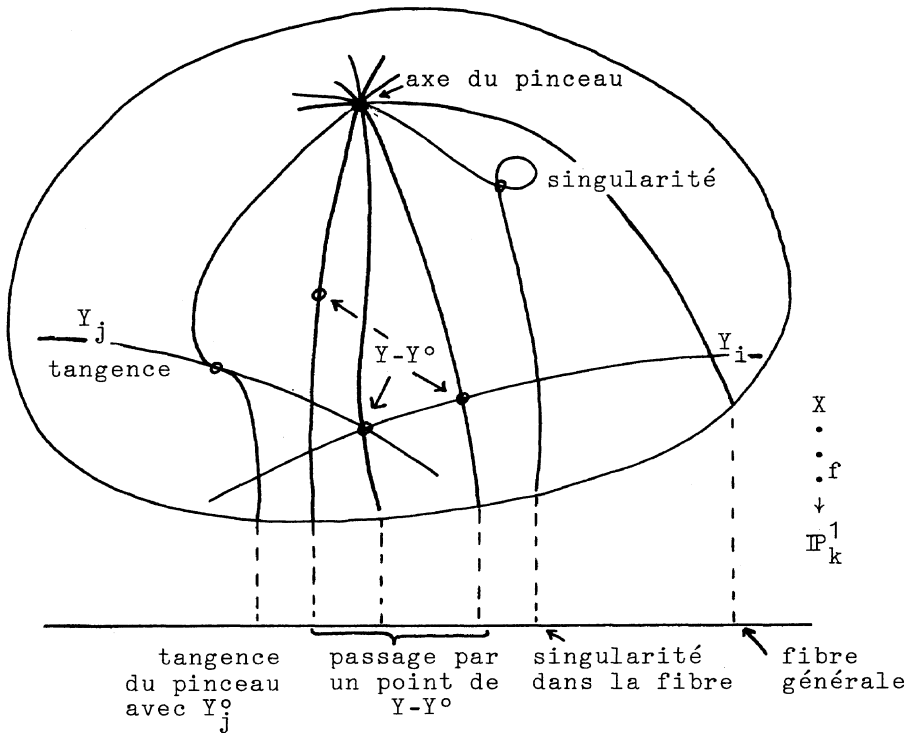


Figure 3.2.4. Les divers types de points de non locale acyclicité de (X, f, F) .

Pour un pinceau vérifiant les conditions a), b) et c) ci-dessus, on a donc

$$(3.2.5) \quad \chi(X, F) = \sum_{x \in Y - Y^0} S_{w_x}(F, f) - \sum_{\substack{y \in Y^0 \\ y \text{ tangence}}} \dim_{\text{tot}}[\Phi(F, f)_x].$$

Pour prouver (1.2.1.1), il reste donc à montrer que la contribution des tangences est nulle et à prouver 2.3.6.

4. Démonstration des théorèmes 1.2.1 et 2.3.6.

Nous nous bornerons à indiquer les principales étapes de la démonstration des théorèmes 1.2.1 et 2.3.6.

4.0. Pour tout plongement projectif $\tau: X \hookrightarrow P = \mathbb{P}_k^m$ de X , notons $P^\vee$ l'espace projectif dual de P , $\text{Grass}(1, P^\vee)$ la grassmannienne des droites de P et $W(\tau)$ l'ouvert de $\text{Grass}(1, P^\vee)$ dont les points fermés sont les pinceaux d'hyperplans de P , $(H_t)_{t \in D}$, qui vérifient les conditions suivantes :

- (i) l'axe, $\Delta = \bigcap H_t$, de D ne rencontre ni Y , ni le lieu singulier de X et est transverse à X ;
- (ii) il existe un ensemble fini de points fermés de D , S , tel que, si $t \in D - S$, H_t ne rencontre pas $Y - Y^\circ$, ni le lieu singulier de X et est transverse à X et à Y ;
- (iii) S est réunion disjointe de trois ensembles finis de points fermés de D , S_{sing} , S_{excp} et S_{tang} , caractérisés par :
 - a) si $t \in S_{\text{sing}}$, H_t est transverse à X sauf en un point x_t , $x_t \in X - Y$, H_t ne rencontre pas $Y - Y^\circ$ et H_t est transverse à Y ,
 - b) si $t \in S_{\text{excp}}$, H_t coupe $Y - Y^\circ$ en un point et un seul, x_t , H_t ne rencontre pas le lieu singulier de X en dehors de x_t et H_t est transverse à X et à Y en dehors de x_t ,
 - c) si $t \in S_{\text{tang}}$, H_t ne rencontre ni le lieu singulier de X , ni $Y - Y^\circ$, H_t est transverse à X et H_t est transverse à Y sauf en un point x_t , qui est un point singulier quadratique ordinaire de $Y.H_t$ (cf. [3] 1.2).

D'autre part, pour tout entier $d > 0$, notons $\tau_{(d)}: X \hookrightarrow P_{(d)}$ le d -ième multiple du plongement τ ($P_{(d)} = \mathbb{P}_k^{m(d)}$ où $m(d)$ est égal à $\binom{m+d}{d} - 1$).

Lemme 4.0.1. Pour tout plongement projectif $\tau: X \hookrightarrow P$ de X et tout entier $d \geq 2$, $W(\tau_{(d)})$ est un ouvert dense de $\text{Grass}(1, P^\vee)$.

4.1. Soit $\tau: X \hookrightarrow P$ un plongement projectif de X tel que $W(\tau)$ soit non vide, alors il existe un ouvert dense $W^\circ(\tau)$ de $W(\tau)$ et des entiers $S_x(\tau)$ ($x \in Y - Y^\circ$), $T_i(\tau)$ ($i \in I$) ayant la propriété suivante : pour tout $D \in W^\circ(\tau)$, si $f_D: X \cdots \rightarrow D$ désigne la projection associée à ce pinceau (f_D est définie en dehors de l'axe de D), on a

$$S_{w_x}(\mathfrak{F}, f_D) = S_x(\tau) \quad (x \in Y - Y^\circ)$$

et

$$\dim_{\text{tot}} [\Phi(F, f_D)_{x_t}] = T_i(\tau) \quad (t \in S_{\text{tang}}, x_t \in Y_i^\circ).$$

4.2. Pour tout point fermé x de X et tout $N \in \mathbb{N}$, notons $J_{N,x}$ le schéma des jets à l'ordre N , i.e. modulo $m_{X,x}^{N+1}$, de bonnes projections locales $f: X_{(x)} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ en x . Si $x \in Y^\circ$, notons $J_{N,x}^{\text{tg}}$ la partie localement fermée de $J_{N,x}$ formée des jets de projections locales $f: X_{(x)} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ qui sont lisses et telles que $f|_{Y_{X_{(x)}}}$ présente en x une singularité quadratique ordinaire ([3] 1.2). Alors

a) pour tout $x \in Y - Y^\circ$, il existe $N_x > 0$ et un ouvert dense de $J_{N_x,x}$ ayant la propriété suivante : si j est dans cet ouvert et si $f, g: X_{(x)} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ sont deux bonnes projections locales en x qui admettent j comme jet à l'ordre N_x , alors

$$S_{w_x}(\mathfrak{J}, f) = S_{w_x}(\mathfrak{J}, g) ;$$

b) pour tout $i \in I$, il existe $N_i > 0$ et, pour tout $x \in Y_i^\circ$, un ouvert dense de $J_{N_i,x}^{\text{tg}}$ ayant la propriété suivante : si j est dans cet ouvert dense et si $f, g: X_{(x)} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ sont deux bonnes projections locales qui admettent j comme jet à l'ordre N_i , alors

$$\dim_{\text{tot}} [\Phi(F, f)_x] = \dim_{\text{tot}} [\Phi(F, g)_x].$$

4.3. Il existe un entier $N \geq 2$ et, pour tout $x \in Y - Y^\circ$ (resp. pour tout $i \in I$), un entier S_x (resp. T_i) ayant la propriété suivante : si $\tau: X \hookrightarrow P$ est un plongement projectif de X et si $d \geq N$, alors

$$\begin{aligned} S_x(\tau(d)) &= S_x & (x \in Y - Y^\circ) \\ (\text{resp.}) \quad T_i(\tau(d)) &= T_i & (i \in I). \end{aligned}$$

4.4. Il résulte de 3.2.5, 4.1 et 4.3 que, pour tout plongement projectif $\tau: X \hookrightarrow P$ et tout entier $d \geq N$ (N étant l'entier défini en 4.3), on a

$$(4.4.1) \quad \chi(X, F) = \sum_{x \in Y - Y^\circ} S_x - \sum_{i \in I} \deg^{\vee}(Y_i, \tau(d)) \cdot T_i,$$

où, pour toute courbe C tracée sur X , $\deg^{\vee}(C, \tau(d))$ désigne

le degré de la variété duale de C relativement au plongement projectif $\tau_{(d)}|C:C \hookrightarrow X \hookrightarrow P(d)$.

Or, il existe des entiers $a_i(\tau) > 0$ et $b_i(\tau)$ tels que pour tout d assez grand on ait

$$(4.4.2) \quad \deg^v(Y_i, \tau_{(d)}) = a_i(\tau) \cdot d + b_i(\tau)$$

donc (4.4.1) n'est tenable que si

$$(4.4.3) \quad \sum_{i \in I} a_i(\tau) \cdot T_i = 0.$$

4.5. Fixons $i_0 \in I$, nous voulons montrer que $T_{i_0} = 0$. Il existe une surface X' connexe, normale, projective sur k et $r: X' \rightarrow X$ fini, étale au dessus du point générique δ_{i_0} de Y_{i_0} et tel que $r^*\mathfrak{F}$, qui est à priori localement constant sur $r^{-1}(U)$, se prolonge en un faisceau localement constant constructible $\mathfrak{F}'$ au dessus de l'ouvert U' de X' défini par $U' = X' - (r^{-1}(Y_{i_0}) \cup r^{-1}(Y - \bigcup_{i \in I} Y_i))$. Notons $(Y'_{i'})_{i' \in I'}$

la famille des composantes irréductibles de codimension 1 dans X' de $Y' = X' - U'$. Alors, le faisceau $\mathfrak{F}'$ est non férocement ramifié le long des $Y'_{i'}$, et, comme on a associé ci-dessus un entier $T_{i'}$ à $(X', \mathfrak{F}')$ et à chaque $i' \in I'$, on peut associer un entier $T_{i'}$ à $(X', \mathfrak{F}')$ et à chaque $i' \in I'$. Il résulte de 4.2 que

$$(4.5.1) \quad T_{i'} = T_{i_0} \quad (\forall i' \in I').$$

Or (4.4.3) s'applique à $(X', \mathfrak{F}')$ et donc, pour tout plongement projectif $\tau': X' \hookrightarrow P'$, on a une relation

$$(4.5.2) \quad \sum_{i' \in I'} a_{i'}(\tau') \cdot T_{i'} = 0$$

où les $a_{i'}(\tau')$ sont strictement positifs. Combinant (4.5.1) et (4.5.2), on obtient

$$(4.5.3) \quad \sum_{i' \in I'} a_{i'}(\tau') \cdot T_{i_0} = 0$$

d'où $T_{i_0} = 0$. Par suite on a montré que

$$(4.5.4) \quad \chi(X, F) = \sum_{x \in Y - Y_0} S_x.$$

4.6. Il ne reste plus qu'à prouver 2.3.6 et l'égalité $S_x = Sw_x(\mathfrak{F})$ pour tout $x \in Y - Y^\circ$. On va le faire par passage du local au global. Soit $f: X_{(x)} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ une bonne projection locale, alors il existe un entier N_f tel que, si $g: X_{(x)} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ est une autre bonne projection locale ayant même jet à l'ordre N_f que f , on ait

$$Sw_x(\mathfrak{F}, g) = Sw_x(\mathfrak{F}, f).$$

D'autre part, il existe un plongement projectif $\tau: X \hookrightarrow P$ tel que $W(\tau) \neq \emptyset$ et un pinceau $D \in W(\tau)$ tel que f et f_D aient même jet à l'ordre N_f en x ; de plus, on peut imposer à D d'être tel que

$$(4.6.1) \quad Sw_x(\mathfrak{F}, f_D) = S_x, \quad (\forall x' \in Y - Y^\circ - \{x\})$$

et que

$$(4.6.2) \quad \dim_{\text{tot}} [\Phi(F, f_D)_{x_t}] = T_i = 0 \quad (\forall t \in S_{\text{tang}}, x_t \in Y_1^\circ).$$

Alors, si on calcule $\chi(X, F)$ à l'aide de f_D , on obtient par (3.2.5)

$$(4.6.3) \quad \chi(X, F) = Sw_x(\mathfrak{F}, f) + \sum_{\substack{x' \in Y - Y^\circ \\ x' \neq x}} S_{x'} ;$$

par suite, si l'on compare avec (4.5.4), on voit que

$$(4.6.4) \quad Sw_x(\mathfrak{F}, f) = S_x$$

et 2.3.6 est démontré ainsi que l'égalité $S_x = Sw_x(\mathfrak{F})$.

Remarque 4.6.5. Si l'on part d'une situation locale $(X, \mathfrak{F})$, où $\bar{X}$ est un schéma strictement local normal, de dimension 2, essentiellement de type fini sur k et où $\mathfrak{F}$ est un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$ -espaces vectoriels sur un ouvert dense $\bar{U}$ de $\bar{X}$, faisceau que l'on suppose non férocement ramifié le long de $\bar{X} - \bar{U}$, alors on peut montrer qu'il existe une surface normale, projective sur k , X , un ouvert dense U de X , un faisceau $\mathfrak{F}$ localement constant constructible de $\mathbb{F}_\lambda$ -espaces vectoriels sur U , non férocement ramifié le long de $X - U$, et un point fermé x de X tels que $\bar{X} = X_{(x)}$, $\bar{U} = U_{X(x)}$ et $\bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}|_{U_{X(x)}}$ (ce point est dû à Gabber). Par suite, l'énoncé 2.3.6 admet une variante purement locale qui se démontre par voie globale.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.DELIGNE.- Lettre à L.Illusie, 28 novembre 1976.
- [2] P.DELIGNE.- Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7) XIII. Le formalisme des cycles évanescents. Springer Lecture Notes in Math. 340, Springer-Verlag (1973) p. 82-115.
- [3] P.DELIGNE.- Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7) XV. La formule de Picard-Lefschetz. Springer Lecture Notes in Math. 340, Springer-Verlag (1973) p. 165-196.
- [4] A.GROTHENDIECK.- Cohomologie ℓ -adique et fonctions L (SGA 5) X. Formule d'Euler-Poincaré en cohomologie étale (rédigé par I.BUCUR). Springer Lecture Notes in Math. 589, Springer-Verlag (1977) p. 372-406.
- [5] G.LAUMON.- Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P.DELIGNE). Séminaire de l'ENS 1978-79. Astérisque n°82-83 (1980) p.173-219.
- [6] J.P.SERRE.- Représentations linéaires des groupes finis. Troisième édition corrigée, Hermann, Paris (1978).
- [7] J.P.SERRE.- Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos. Bull. Soc. Math. France, 89 (1961), p. 105-154.

G.LAUMON
Université Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématiques
Bat.425
91405 Orsay cedex