Astérisque

HUBERT DELANGE

Théorie probabiliste des nombres

Astérisque, tome 94 (1982), p. 31-42

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1982__94__31_0>

THÉORIE PROBABILISTE DES NOMBRES

par

Hubert DELANGE

-:-:-:-

On m'a demandé de donner un aperçu de ce que l'on appelle la "Théorie probabiliste des nombres". Je commence par dire que, si ce terme est consacré par l'usage, il ne me paraît pas bien approprié. Il vaudrait mieux dire "Théorie probabiliste des fonctions arithmétiques".

Il existe une littérature extrêmement abondante sur ce sujet, sur lequel P. D. T. A. Elliott a publié récemment un ouvrage en deux volumes, de 700 pages en tout. Je ne pourrai donc donner ici qu'un aperçu très sommaire.

Je viens de dire qu'il s'agit de "fonctions arithmétiques".

Une fonction arithmétique est simplement une fonction -le plus souvent réelle- définie sur $\mathbb{N}^*$. On s'intéresse naturellement à celles dont la définition dépend de propriétés arithmétiques de l'entier n.

Exemples : $d(n)$ = nombre des diviseurs de n ;

$\omega(n)$ = nombre des diviseurs premiers de n ;

$\varphi(n)$ = nombre des $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \leq n$ et $(m,n) = 1$;

$p(n)$ = nombre des partitions de n.

Certaines fonctions arithmétiques ont un comportement régulier quand n tend vers $+\infty$.

Par exemple, $p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}$.

Par contre, $\omega(n) = 1$ quand n est premier, tandis que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a $\omega(n) > (\log n)^{1-\varepsilon}$ pour une infinité de n. (Le théorème des nombres premiers montre qu'il en est ainsi pour n égal au produit des k premiers nombres premiers dès que k est assez grand.)

D'une façon générale, les fonctions arithmétiques dont la valeur dépend de la structure multiplicative de n ont un comportement très irrégulier. C'est le cas, en particulier, des fonctions additives et des fonctions multiplicatives.

La fonction arithmétique f est dite "additive" si l'on a

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad \text{quand} \quad (m,n) = 1 .$$

Elle est dite "multiplicative" si l'on a

$$f(mn) = f(m)\, f(n) \quad \text{quand} \quad (m,n) = 1 , \quad \text{et} \quad f(1) = 1 .$$

On voit immédiatement que, dans les deux cas, la fonction f est complètement déterminée par ses valeurs sur les puissances des nombres premiers.

Une fonction arithmétique est dite "fortement additive" si elle est additive et en outre, pour chaque nombre premier p, $f(p^r) = f(p)$ pour tout $r \geq 2$. On voit que l'on a alors

$$f(n) = \sum_{p/n} f(p) \qquad (^1) .$$

Les fonctions d et φ sont multiplicatives. La fonction ω est fortement additive.

La plus grande partie des résultats de la théorie probabiliste des nombres concerne les fonctions additives réelles, et je me bornerai ici à celles-ci. (A noter que le cas d'une fonction multiplicative > 0 se ramène à celui d'une fonction additive en prenant les logarithmes.)

Vu le comportement irrégulier d'une telle fonction, au lieu de considérer $f(n)$ pour une valeur isolée de n, on considère globalement les valeurs $f(1), f(2), \ldots, f(N)$ et on examine comment se répartissent ces valeurs quand N est très grand.

Le premier résultat qui ait été établi dans ce domaine a été obtenu par Hardy et Ramanujan en 1917. C'est le suivant :

(^{1}) Il est entendu ici que la lettre p est utilisée pour représenter les nombres premiers.

Soit g une fonction >0 croissante et tendant vers $+\infty$ avec x.

Quand x tend vers $+\infty$,

$$\#\{m \in \mathbb{N}^* : m \leq x \text{ et } |\omega(m) - \log\log x| > g(x)\sqrt{\log\log x}\} = o(x) \quad (2).$$

(Il est à noter que, comme $\log\log x$ varie très lentement avec x, on pourrait remplacer au premier membre $\log\log x$ par $\log\log m$.)

Ceci peut se traduire de la façon suivante :

Si on choisit au hasard m parmi les éléments de $\mathbb{N}^*$ au plus égaux à x, tous ayant la même probabilité d'être choisis, la probabilité pour que l'on ait

$$|\omega(n) - \log\log x| > g(x)\sqrt{\log\log x}$$

tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

On remarque de suite l'analogie avec la loi faible des grands nombres.

Mais Hardy et Ramanujan n'employaient pas une méthode probabiliste. $\pi_\nu(x)$ désignant le nombre des $n \leq x$ tels que $\omega(n) = \nu$, ils montraient que, quel que soit $\nu \in \mathbb{N}^*$, on a pour $x \geq 2$

$$\pi_\nu(x) < A \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x + B)^{\nu-1}}{(\nu-1)!},$$

où A et B sont des constantes indépendantes de ν, et le résultat se déduisait de cette inégalité.

En 1934, Turán a donné une démonstration très simple du résultat de Hardy et Ramanujan. Il montre -très facilement- que

$$\sum_{m \leq x} (\omega(m) - \log\log x)^2 = 0(x \log\log x),$$

$$\text{soit} \quad \leq Mx \log\log x \quad \text{pour} \quad x \geq 3 \quad \text{par exemple.}$$

Il est clair que ceci entraîne que, pour $x \geq 3$,

$$\#\{m \in \mathbb{N}^* : m \leq x \text{ et } |\omega(m) - \log\log x| > g(x)\sqrt{\log\log x}\} \leq \frac{Mx}{g(x)^2}.$$

Ici, il apparaît une méthode probabiliste !

---

(2) E étant un ensemble fini (ou vide), $\# E$ désigne le nombre des éléments de E.

En effet, cette démonstration est semblable à la démonstration classique de la loi faible des grands nombres au moyen de l'inégalité de Tchebychef.

En fait, Turán n'en était pas du tout conscient. D'après une lettre écrite en 1976, citée dans le livre d'Elliott, en 1934 il ignorait ce qu'est l'inégalité de Tchebychef.

J'indique en passant que le calcul de Turán a été étendu par Kubilius au cas d'une fonction additive quelconque. On obtient l'inégalité connue sous le nom d' "inégalité de Turán-Kubilius".

En réalité, on a pour la fonction ω un résultat beaucoup plus précis que celui de Hardy et Ramanujan :

Quand x tends vers $+\infty$, pour tout t réel,

$$\frac{1}{x} \# \{n \in \mathbb{N}^* : n \leq x \text{ et } \frac{\omega(n) - \log\log x}{\sqrt{\log\log x}} \leq t\} \text{ tend vers } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du .$$

Autrement dit, les nombres $\frac{\omega(n) - \log\log x}{\sqrt{\log\log x}}$, où n parcourt l'ensemble des entiers strictement positifs $\leq x$, tendent à se répartir suivant la loi normale de Gauss.

Ceci est un cas particulier du théorème d'Erdös et Kać (1939) qui s'énonce comme suit :

Soit f une fonction arithmétique réelle fortement additive.

On suppose que $f(p)$ est borné et que $\sum \frac{f(p)^2}{p} = +\infty$. On pose $A(x) = \sum_{p \leq x} \frac{f(p)}{p}$ et $B(x) = \left(\sum_{p \leq x} \frac{f(p)^2}{p} \right)^{\frac{1}{2}}$ (donc $B(x)$ tend vers $+\infty$ avec x).

Alors, quand x tend vers $+\infty$, pour tout t réel,

$$\frac{1}{x} \# \{n \in \mathbb{N}^* : n \leq x \text{ et } \frac{f(n) - A(x)}{B(x)} \leq t\} \text{ tend vers } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du .$$

On voit facilement que le résultat subsiste si on remplace $A(x)$ et $B(x)$ par $A_1(x)$ et $B_1(x)$, où

$$B_1(x) \sim B(x) \quad \text{et} \quad A_1(x) - A(x) = o(B(x)),$$

d'où le résultat indiqué plus haut pour la fonction ω, en tenant compte de l'évaluation bien connue de $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$.

La démonstration d'Erdös et Kać utilise la théorie des sommes de variables aléatoires indépendantes, et c'est là le point de départ de la théorie générale développée par Kubilius dans son livre "Probabilistic methods in the theory of numbers".

Après ce rappel des origines de la théorie probabiliste des nombres, je vais maintenant donner un aperçu des problèmes fondamentaux de cette théorie.

Il est entendu que dans toute la suite f sera une fonction arithmétique réelle.

Ces problèmes peuvent s'exprimer indifféremment en termes de probabilité ou en termes de mesure.

Si on veut parler en termes de mesure, on associera à chaque $n \in \mathbb{N}^*$ une mesure μ_n sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{m \leq n} \delta_{f(m)} ,$$

où δ_a désigne la mesure de Dirac au point a, c'est-à-dire, pour tout $E \subset \mathbb{R}$, $\mu_n(E) = \frac{1}{n} \# \{ m \in \mathbb{N}^* : m \leq n \text{ et } f(m) \in E \}$. $\mu_n(E)$ peut s'interpréter comme étant la probabilité pour que $f(m) \in E$ si on choisit au hasard un entier m entre 1 et n, tous ayant la même probabilité $\frac{1}{n}$ d'être choisis.

Un probabiliste pointilleux préférerait sans doute présenter les choses de la façon suivante :

On prend comme espace de probabilité l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, la probabilité de chaque événement élémentaire étant $\frac{1}{n}$, et on introduit une variable aléatoire X_n, qui est la restriction de f à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

$\mu_n(E)$ est la probabilité pour que $X_n \in E$.

La fonction de répartition σ_n de X_n est donnée par

$$\sigma_n(t) = \mu_n(]-\infty, t]) = \frac{1}{n} \# \{ m \in \mathbb{N}^* : m \leq n \text{ et } f(m) \leq t \} .$$

Le premier problème que l'on se pose naturellement est le suivant :

PROBLÈME 1. - La suite $\{\mu_n\}$ est-elle faiblement convergente vers une mesure μ telle que $\mu(\mathbb{R}) = 1$? ou, ce qui est équivalent, la suite $\{X_n\}$ possède-telle une loi limite ? (c'est-à-dire existe-t-il une fonction de répartition σ telle que $\sigma_n(x)$ converge vers $\sigma(x)$ en tout point de continuité de σ ?).

Si la réponse est positive, on dira que f possède une distribution limite.

Si la réponse est négative, on pourra se poser la question suivante :

PROBLÈME 2. - Peut-on, en faisant subir à chaque mesure μ_n une translation convenable, obtenir une suite $\{\mu'_n\}$ faiblement convergente vers une mesure μ telle que $\mu(\mathbb{R}) = 1$?

Autrement dit, peut-on trouver une suite $\{\alpha_n\}$ telle que la suite des variables aléatoires $X_n - \alpha_n$ ait une loi limite ?

Si ceci a lieu, on dira que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite.

Le problème 2 est visiblement une généralisation du problème 1, qui correspond à $\alpha_n = 0$.

On peut généraliser encore en posant la question suivante :

PROBLÈME 3. - Peut-on trouver deux suites $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$, avec $\beta_n > 0$, telles que la suite des variables aléatoires $(X_n - \alpha_n)/\beta_n$ ait une loi limite ?

S'il en est ainsi, on dira que $(f(m) - \alpha_n)/\beta_n$ possède une distribution limite.

Les problèmes 1 et 2 sont complètement résolus pour les fonctions additives.

La réponse au premier est fournie par le théorème d'Erdös-Wintner (1939) :

Pour u réel, définissons $\|u\|$ par $\|u\| = \begin{cases} u \text{ si } |u| \leq 1 , \\ 1 \text{ si } |u| > 1 . \end{cases}$

f a une distribution limite si, et seulement si, les deux séries

$$\sum \frac{\|f(p)\|}{p} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\|f(p)\|^2}{p}$$

sont convergentes.

Erdös avait établi que ces conditions sont suffisantes dans trois articles successifs (où les conditions allaient en s'élargissant) parus dans le "Journal of the London Mathematical Society" (1935-37-38). Il utilisait des méthodes purement arithmétiques, sans aucune considération de probabilité.

Erdös et Wintner ont montré en 1939 la nécessité de ces conditions.

Le théorème d'Erdös-Wintner montre en particulier que les fonctions $\log \frac{\varphi(n)}{n}$ et $\log \frac{\sigma(n)}{n}$ possèdent des distributions limites, d'où il résulte immédiatement

qu'il en est de même pour $\frac{\varphi(n)}{n}$ et $\frac{\sigma(n)}{n}$.

L'existence d'une distribution limite pour $\frac{\varphi(n)}{n}$ avait déjà été démontrée en 1928 par Schönberg, à l'aide d'une généralisation de la théorie de H. Weyl pour la distribution modulo 1, et celle d'une distribution limite pour $\frac{\sigma(n)}{n}$ avait déjà été établie en 1933 par Davenport, par un procédé purement arithmétique.

Schönberg avait aussi donné en 1939 une solution partielle du problème général basée sur le théorème de Paul Lévy d'après lequel, pour qu'une suite de variables aléatoires possède une loi limite, il faut et il suffit que la suite de leurs fonctions caractéristiques converge vers une fonction continue à l'origine.

J'ai montré en 1961 que la solution complète du problème pour les fonctions additives, par le théorème d'Erdös-Wintner, peut s'obtenir à l'aide du théorème de Paul Lévy.

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est la valeur moyenne de e^{itX}, où t est une variable réelle. Pour la variable aléatoire X_n définie plus haut, la fonction caractéristique est

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} F_t(m), \quad \text{où} \quad F_t(m) = e^{itf(m)} .$$

D'après le théorème de Paul Lévy, f a une distribution limite si, et seulement si, la fonction F_t possède une valeur moyenne pour tout t réel, et celle-ci est une fonction de t continue pour $t = 0$.

F_t est une fonction multiplicative de module 1 .

Ma méthode consiste à utiliser un théorème donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction multiplicative F de module ≤ 1 possède une valeur moyenne non nulle. (La condition est que la série $\sum \frac{1-F(p)}{p}$ soit convergente et que $F(2^r) \neq -1$ pour au moins un r ; la convergence de la série suffit à assurer l'existence d'une valeur moyenne.)

Le problème 2 est aussi complètement résolu à l'aide du théorème de Paul Lévy et des résultats de Halász sur les fonctions multiplicatives de module ≤ 1 .

Le théorème de Paul Lévy montre que, pour que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, il faut et il suffit qu'il existe une fonction Φ continue pour $t = 0$, telle que, quand n tend vers l'infini,

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} e^{it(f(m)-\alpha_n)} = \Phi(t) + o(1) ,$$

ce qui équivaut à

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} F_t(m) = \Phi(t)\, e^{it\alpha_m} + o(1) .$$

C'est ici qu'on utilise les résultats de Halász.

On arrive au résultat suivant :

Pour qu'il existe une suite $\{\alpha_n\}$ telle que $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite, il faut et il suffit qu'il existe un $\underline{a}$ réel tel que, si $g(n) = f(n) - a \log n$,

$$\sum \frac{\|g(p)\|^2}{p} < +\infty .$$

S'il en est ainsi, $f(m) - \alpha_n$ possède une distribution limite si, et seulement si,

$$\alpha_n = \sum_{p \le n} \frac{\|g(p)\|}{p} + a \log n + C^{te} + o(1) .$$

Ce résultat a été obtenu indépendamment par Elliott et Ryavek, Kubilius, Timofeev, et moi-même.

Un problème annexe des problèmes 1 et 2 est l'étude de la distribution limite lorsqu'elle existe. On sait que, si $\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p} < +\infty$, la distribution limite existe et correspond à une mesure atomique. Si la distribution limite existe avec $\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p} = +\infty$, elle est continue, soit absolument continue, soit singulière. On ne connaît que des conditions suffisantes pour un des deux cas, mais pas de critère général.

Venons en maintenant au problème 3.

Le théorème d'Erdös et Kać fournit une réponse positive dans le cas particulier des fonctions fortement additives bornées sur les nombres premiers et telles que $\sum \frac{f(p)^2}{p} = +\infty$.

L'idée de base de la démonstration est la suivante :

Pour chaque p premier, considérons la fonction ρ_p définie par

$$\rho_p(n) = \begin{cases} f(p) & \text{si } p/n , \\ 0 & \text{si } p\not/n . \end{cases}$$

On a $f(n) = \sum \rho_p(n)$ (la somme ne contenant qu'un nombre fini de termes non nuls).

L'ensemble des n tels que p/n a une densité égale à $\frac{1}{p}$ et l'ensemble des n tels que $p \not/ n$ a une densité égale à $1 - \frac{1}{p}$.

Ceci conduit à considérer que ρ_p prend la valeur $f(p)$ avec la probabilité $\frac{1}{p}$ et la valeur 0 avec la probabilité $1 - \frac{1}{p}$.

Les fonctions ρ_p apparaîssent comme "statistiquement indépendantes" car, si $p_1, p_2, \ldots, p_k, p'_1, p'_2, \ldots, p'_h$ sont des nombres premiers distincts, l'ensemble des n tels que $p_1, p_2, \ldots, p_k$ divisent n mais $p'_1, p'_2, \ldots, p'_h$ ne divisent pas n a une densité égale à $\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_k}(1 - \frac{1}{p'_1})(1 - \frac{1}{p'_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p'_h})$.

En fait, ceci n'est pas correct car

- les parties de $\mathbb{N}^*$ possédant une densité ne forment pas une tribu,
- la densité n'est pas totalement additive.

Mais on peut arranger les choses en introduisant une "fonction tronquée"

$$f_y = \sum_{p \le y} \rho_p \quad \text{(i.e. } f_y(n) = \sum_{\substack{p/n \\ p \le y}} f(p)\text{)}, \quad \text{où } y \ge 2 .$$

La fonction f_y prend un nombre fini de valeurs distinctes.

Si P_y est l'ensemble des $p \le y$, ce sont les sommes $\sum_{p \in E} f(p)$, où $E \in \mathcal{P}(P_y)$.

Si $\underline{a}$ est une de ces valeurs, l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f_y(n) = a$ possède une densité, car c'est la réunion des ensembles

$$\{n \in \mathbb{N}^* : p/n \text{ si } p \in E \text{ et } p \not/ n \text{ si } p \in P_y \setminus E\} ,$$

où E parcourt l'ensemble des parties de P_y telles que $\sum_{p \in E} f(p) = a$.

Introduisons des variables aléatoires indépendantes X_p, où X_p prend la valeur $f(p)$ avec la probabilité $\frac{1}{p}$ et la valeur 0 avec la probabilité $1 - \frac{1}{p}$.

On voit que la densité de l'ensemble des n tels que $f_y(n) = a$ est la probabilité pour que $\sum_{p \le y} X_p = a$.

Il en résulte que, pour y fixé, tel que $B(y) > 0$, l'ensemble des n tels que

$$\frac{f_y(n) - A(y)}{B(y)} \le t$$

a pour densité $\sigma_y(t)$, où σ_y est la fonction de répartition de $\frac{1}{B(y)}\left(\sum_{p\le y} X_p - A(y)\right)$.

On montre que, si x et y tendent simultanément vers $+\infty$ de façon que $\frac{\log y}{\log x}$ tende vers zéro, la différence

$$\frac{1}{x}\,\#\left\{n\in\mathbb{N}^* \;:\; n\le x \quad \text{et} \quad \frac{f_y(n)-A(y)}{B(y)} \le t\right\} - \sigma_y(t)$$

tend vers zéro. Ceci se fait par une méthode de crible -en fait à l'aide du crible de Brun.

On montre d'autre part que, si en outre $\frac{\log x}{\log y}$, qui tend vers $+\infty$, est $o(B(x))$, la fonction de répartition de l'ensemble des nombres $\frac{f_y(n)-A(y)}{B(y)}$, où $n\le x$, approche celle de l'ensemble des nombres $\frac{f(n)-A(x)}{B(x)}$.

On choisit donc y fonction de x tel que $\frac{\log y}{\log x}$ tende vers zéro et $\frac{\log x}{\log y} = o(B(x))$, et on obtient le résultat voulu en appliquant le théorème central limite pour les sommes de variables aléatoires indépendantes, qui montre que $\frac{1}{B(y)}\left(\sum_{p\le y} X_p - A(y)\right)$ a une distribution limite qui est la distribution normale de Gauss, c'est-à-dire que $\sigma_y(t)$ tend vers $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\,du$. (En effet, la valeur moyenne de X_p est $\frac{f(p)}{p}$ et sa variance est $(1-\frac{1}{p})\frac{f(p)^2}{p}$, de sorte que la somme des valeurs moyennes pour les $p\le y$ est $A(y)$ et la somme des variances est $B(y)^2 + 0(1)$).

L'idée d'introduire des variables aléatoires indépendantes est de Kac. La mise au point de la démonstration à l'aide du crible de Brun est due à Erdös.

Kubilius a systématisé cette méthode de démonstration. Elle peut être utilisée pour établir la suffisance des conditions du théorème d'Erdös-Wintner.

Pour les fonctions fortement additives telles que $\sum \frac{f(p)^2}{p} = +\infty$, elle conduit au résultat général que je vais indiquer maintenant, où $A(x)$ et $B(x)$ sont définis comme plus haut.

Disons qu'une fonction fortement additive appartient à la classe (H) si $B(x)$ tend vers $+\infty$ avec x et $B(x^\lambda)\sim B(x)$ pour tout $\lambda > 1$.

Si f appartient à la classe (H), pour que $\frac{f(m)-A(n)}{B(n)}$ ait une distribution limite, il faut et il suffit qu'il existe une fonction de répartition K telle que, quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{B^2(x)} \sum_{\substack{p\le x \\ f(p)\le uB(x)}} \frac{f(p)^2}{p}$ converge vers $K(u)$ en tous les

points de continuité de K .

La distribution limite a pour fonction caractéristique

$$\exp\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itu} - 1 - itu}{u^2}\, dK(u)\right).$$

Les distributions limites possibles sont les lois infiniment divisibles de variance 1 .

Ici les suites $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ sont données a priori.

Le problème posé initialement était l'existence de suites convenables. Il a été étudié spécialement par Levin et Timofeev, et surtout Elliott.

On montre que β_n doit nécessairement tendre vers une limite finie ou vers $+\infty$. On voit que, dans le premier cas, on peut remplacer β_n par 1 , ce qui ramène au problème 2 .

Pour le cas où β_n tend vers $+\infty$, il est commode de prendre α_n et β_n sous les formes $\alpha(n)$ et $\beta(n)$, où les fonctions α et β sont supposées définies sur l'ensemble des nombres réels au moins égaux à un certain x_o .

On obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des fonctions α et β telles que $\frac{f(m) - \alpha(n)}{\beta(n)}$ ait une distribution limite, avec la condition que, quand x tens vers $+\infty$, $\beta(x)$ tende vers $+\infty$ et $\frac{\beta(x^\lambda)}{\beta(x)}$ tende vers 1 uniformément pour $a \leq \lambda \leq b$, avec a et b quelconques tels que $0 < a < b$.

Ces conditions sont trop compliquées pour que je les énonce ici.

On peut obtenir comme lois limites toutes les lois stables. Par contre, on montre que certaines lois ne peuvent pas être obtenues.

On a aussi des résultats pour le cas où on impose la condition que $\frac{\beta(x^\lambda)}{\beta(x)}$ converge vers λ^δ uniformément sur tout ensemble compact contenu dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Pour terminer, j'indiquerai que l'on peut considérer beaucoup d'autres problèmes que ceux que j'ai cités. On peut, par exemple, examiner la rapidité de la convergence vers les lois limites lorsqu'elles existent, étudier la distribution des valeurs de $f(n)$ lorsque n parcourt certaines suites d'entiers telles que la suite des valeurs d'un polynôme à coefficients entiers sur les entiers > 0 ou bien

sur les nombres premiers, étudier la distribution modulo 1 de f(n), etc.

Le temps dont je dispose ne me permet pas d'aborder ces questions.

-:-:-:-

Hubert DELANGE
Université de Paris-Sud
bât. Mathématiques 425
F 91405 ORSAY