

Astérisque

JACQUES MEYER

**Représentation multiplicative des entiers à l'aide
de l'ensemble $P + I$ (II)**

Astérisque, tome 94 (1982), p. 133-142

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1982__94__133_0>

© Société mathématique de France, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATION MULTIPLICATIVE DES ENTIERS A L'AIDE DE L'ENSEMBLE $\mathcal{P}+1$ (II)

par

Jacques MEYER

-:-:-:-

1.1. - Un cas particulier de la célèbre conjecture (H) de Schinzel est le suivant :

Etant donné un entier $n \geq 1$, il existe une infinité d'entiers u tels que les nombres $u-1$ et $un-1$ soient simultanément des nombres premiers. Autrement dit :

Tout entier $n \geq 1$ s'écrit d'une infinité de façons sous la forme

$$(I) \quad n = \frac{p+1}{q+1}, \quad \text{où } (p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}.$$

En fait Schinzel et Sierpinski [8] ont fait une conjecture un peu plus forte :

Tout nombre rationnel positif r se représente d'une infinité de manières sous la forme :

$$r = \frac{p+1}{q+1}, \quad \text{où } (p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}.$$

On est loin, bien sûr, d'avoir résolu ce problème, mais divers travaux ont permis d'obtenir des résultats concernant la représentation multiplicative des entiers à l'aide de l'ensemble $\mathcal{P}+1$.

Elliott [4] a montré que l'ensemble $\mathcal{F}_1$ des entiers qui admettent une représentation (I) a une densité logarithmique inférieure strictement positive et que l'ensemble $\mathcal{P}+1$ est un ensemble d'unicité pour les fonctions additives, ce qui a pour conséquence (Dress - Volkmann [3], Wolke [10]) que tout entier $n \geq 1$

admet la représentation :

$$n = (p_1+1)^{\alpha_1} (p_2+1)^{\alpha_2} \dots (p_k+1)^{\alpha_k},$$

où les α_i ($1 \leq i \leq k$) sont des nombres rationnels dépendant de n ainsi que l'entier k .

Wirsing [9] a montré qu'il existe deux constantes positives c et c' telles que tout entier $n \geq 1$ admette la représentation :

$$n^a = (p_1+1)^{\varepsilon_1} \dots (p_k+1)^{\varepsilon_k},$$

avec les conditions : $a \leq c$, $k \leq c'$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Il précise également la taille des p_i par rapport à celle de n .

Enfin il est montré dans [7] que la densité asymptotique inférieure de $\mathfrak{F}_1$ est supérieure ou égale à $\frac{1}{118,2}$ et que, grâce à des résultats sur les fonctions multiplicatives obtenus par Delange, il existe un entier $v \leq 8$ tel que tout entier $n \geq 1$ admette la représentation :

$$n^v = (p_1+1)^{a_1} \dots (p_k+1)^{a_k},$$

où les a_i ($1 \leq i \leq k$) sont des entiers relatifs dépendant de n , ainsi que k .

1.2. - On va établir ici les résultats suivants :

$$\cdot d \mathfrak{F}_1 \geq \frac{1}{39,57}$$

. $\mathcal{Q}$ désignant l'ensemble des nombres entiers $d \geq 1$ qui se représentent sous la forme

$$d = \frac{p_1 + 1}{(p_2 + 1)(p_3 + 1)},$$

on a la minoration

$$d \mathcal{Q} \geq \frac{1}{8,88}.$$

. Tout entier $n \geq 1$ se représente d'une infinité de manières sous la forme :

$$n^a = \prod_{i=1}^4 (p_i + 1)^{\varepsilon_i},$$

où $1 \leq a \leq 8$ et $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$.

2.1. - v étant un nombre réel strictement positif et M un nombre entier ≥ 1 , on désigne pour tout nombre réel $x \geq 1$ et tout entier $d \geq 2$ par $G_d(x, v)$ le nombre de couples $(p, q) \in \mathbb{P}_x \times \mathbb{P}$ tels que :

$$p+1 = Md(q+1)$$

$$q \leq x^v - 1.$$

Nous allons évaluer de deux manières distinctes la somme $\sum_{2 \leq d \leq x/M} G_d(x, v)$.

2.2. - $G_d(x, v)$ peut tout d'abord être majoré par la méthode du crible de Selberg ([5], p. 119) :

$$\begin{aligned} G_d(x, v) &\leq \left| \{ q \leq x^v : (Md)q + (Md-1) \text{ premier} \} \right| \\ &\leq 8\alpha_2 g(Md) \frac{x^v}{v^2 \log^2 x} \left[1 + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right) \right] \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\alpha_2 = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)$$

et défini la fonction g sur les entiers ≥ 2 par

$$g(n) = \prod_{2 < p \mid n(n-1)} \frac{p-1}{p-2}.$$

La majoration de $G_d(x, v)$ étant uniforme, on obtient l'inégalité :

$$(1) \quad \sum_{2 \leq d \leq x/M} G_d(x, v) \leq 8\alpha_2 \frac{x^v}{v^2 \log^2 x} \left[1 + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right) \right] \sum_{\substack{2 \leq d \leq x/M \\ G_d(x, v) > 0}} g(Md).$$

2.3. - Par ailleurs nous avons les égalités suivantes :

$$\sum_{2 \leq d \leq x/M} G_d(x, v) = \sum_{q \leq x^v - 1} \sum_{\substack{p \leq x(q+1) - 1 \\ p \equiv -1 \pmod{M(q+1)} \\ p \neq M(q+1) - 1}} 1 = \sum_{q \leq x^v - 1} \pi(x(q+1), M(q+1), -1) + R_1(x, v),$$

où $R_1(x, v) = O(\pi(x^v))$.

Supposons v strictement inférieur à 1. Le théorème bien connu de Bombieri-Vinogradov ([5], p. 111) permet alors d'écrire :

$$\sum_{2 \leq d \leq x/M} G_d(x, v) = \sum_{q \leq x^v - 1} \frac{\varphi(M(q+1))}{\varphi(M(q+1))} + R_2(x, v),$$

où $R_2(x, v) = O_v\left(\frac{x^{1+v}}{\text{Log } x^3}\right)$ et φ désigne la fonction d'Euler.

Et l'on obtient la minoration :

$$\sum_{2 \leq d \leq x/M} G_d(x, v) \geq \frac{x}{(1+v) \text{Log } x} \sum_{q \leq x^v - 1} \frac{q+1}{\varphi(M(q+1))} + O_v\left(\frac{x^{1+v}}{\text{Log } x^3}\right).$$

La fonction multiplicative $f : n \longmapsto \frac{\varphi(Mn)}{\varphi(Mn)} = \prod_{p|n} \frac{p}{p-1}$ a une valeur moyenne sur l'ensemble $\mathcal{P}+1$. Ceci résulte de la convergence de la série $\sum_{p \in \mathcal{P}} (1-f(p))p^{-1}$ et peut se démontrer en utilisant les méthodes de Kataf [6] ou de Deshouillers [2] (bien que les résultats de ces auteurs ne concernent que les fonctions multiplicatives de module au plus égale à 1) :

$$\sum_{q \leq x^v} \frac{(q+1) \varphi(M)}{\varphi(M(q+1))} = \prod_{p \nmid M} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{x^v}{v \text{Log } x} + o_v\left(\frac{x^v}{\text{Log } x}\right).$$

On obtient alors la minoration :

$$\sum_{2 \leq d \leq x/M} G_d(x, v) \geq \frac{1}{\varphi(M)} \prod_{p \nmid M} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{x^{1+v}}{v(1+v) \text{Log } x^2} + o_v\left(\frac{x^{1+v}}{\text{Log } x^2}\right).$$

Tenant compte de la majoration (1), on arrive à l'inégalité :

$$(2) \quad \sum_{\substack{2 \leq d \leq x/M \\ G_d(x, v) > 0}} g(Md) \geq \frac{x}{\varphi(M)} \prod_{p \nmid M} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \frac{v}{1+v} \cdot \frac{1}{8\alpha_2} + o_v(x).$$

2.4. - Il reste maintenant à majorer l'expression de gauche. Définissons une fonction g_M sur les entiers ≥ 2 par

$$g_M(n) = \prod_{\substack{2 < p | n \\ p \nmid M}} \frac{p-1}{p-2}.$$

Il est clair que pour tout entier ≥ 2 ,

$$g(Mn) = g_M(n) \prod_{2 \nmid p \mid M} \frac{p-1}{p-2}$$

Par conséquent :

$$(3) \quad \sum_{\substack{2 \leq d \leq x/M \\ G_d(x, v) > 0}} g_M(d) \geq \frac{x}{\varphi(M)} \prod_{2 \nmid p \mid M} \frac{p-2}{p-1} \cdot \prod_{p \nmid M} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \frac{v}{1+v} \cdot \frac{1}{8\alpha_2} + o_v(x) .$$

Soient u et u' deux nombres réels supérieurs ou égaux à 1 tels que $\frac{1}{u} + \frac{1}{u'} = 1$. Appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$(4) \quad \sum_{\substack{2 \leq d \leq x/M \\ G_d(x, v) > 0}} g_M(d) \leq \left(\sum_{\substack{2 \leq d \leq x/M \\ G_d(x, v) > 0}} 1 \right)^{1/u} \left(\sum_{2 \leq d \leq x/M} g_M(d)^{u'} \right)^{1/u'} .$$

Définissons une fonction fortement multiplicative h par

$$h_M(p) = 1 \quad \text{si } p \mid 2M .$$

$$h_M(p) = \frac{p-1}{p-2} \quad \text{si } p \nmid 2M ,$$

de sorte que

$$\forall d \geq 2 \quad g_M(d) = h_M(d) h_M(Md-1) .$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\sum_{2 \leq d \leq x/M} g_M(d)^{u'} \leq \left(\sum_{1 \leq d \leq x/M} h_M(d)^{2u'} \right)^{1/2} \left(\sum_{1 \leq d \leq x/M} h_M(Md-1)^{2u'} \right)^{1/2} .$$

Pour estimer les deux expressions de droite, on va utiliser des théorèmes bien connus sur la valeur moyenne des fonctions multiplicatives [1] : d'une part,

$$\sum_{1 \leq d \leq x/M} h_M(d)^{2u'} = \frac{x}{M} \prod_{p \nmid 2M} \left(1 + \frac{h_M(p)^{2u'} - 1}{p}\right) + o(x) ;$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq d \leq x/M} h_M(Md-1)^{2u'} &= \sum_{\substack{n \leq x-1 \\ n \equiv -1(M)}} h_M(n)^{2u'} \\
&= \frac{x}{\varphi(M)} \prod_{p|M} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p \nmid 2M} \left(1 + \frac{h_M(p)^{2u'} - 1}{p}\right) + o(x) \\
&= \frac{x}{M} \prod_{p \nmid 2M} \left(1 + \frac{h_M(p)^{2u'} - 1}{p}\right) + o(x) .
\end{aligned}$$

Posons, pour tout nombre réel $t \geq \frac{1}{2}$

$$a_M(t) = \prod_{p \nmid 2M} \left(1 + \frac{\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{2t} - 1}{p}\right) ;$$

on obtient alors :

$$(5) \quad \sum_{2 \leq d \leq x/M} g_M(d)^{u'} \leq \frac{x}{M} a_M(u') + o(x) .$$

Regroupons les inégalités (3), (4), et (5) :

$$\sum_{\substack{2 \leq d \leq x/M \\ G_d(x, v) > 0}} 1 \geq x \left(\frac{v}{1+v} \cdot \frac{1}{8a_2}\right)^u \left[\frac{M^{1/u'} \prod_{2 \leq p|M} \frac{p-2}{p-1} \prod_{p \nmid M} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right)}{\varphi(M) a_M(u')^{1/u'}} \right]^u + o(x) .$$

Notant $\mathfrak{F}_M$ l'ensemble des nombres entiers $d \geq 1$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$d = \frac{p+1}{M(q+1)} ,$$

et tenant compte des égalités ($p \geq 3$) :

$$\frac{p-2}{p-1} = \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \left(\frac{p-1}{p}\right)$$

et

$$\left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{2}{p(p-2)} ,$$

on parvient à la minoration :

$$\underline{d} \mathfrak{F}_M \geq \left(\frac{v}{1+v}\right)^u \left(\frac{c_M}{4 a_M(u')^{1/u'}}\right)^u .$$

(On note $c_M = \prod_{p \nmid 2M} \left(1 + \frac{2}{p(p-2)}\right)$.)

Enfin, comme v est un nombre réel quelconque inférieur à 1, on a l'inégalité :

$$(6) \quad \underline{d} \mathfrak{F}_M \geq \left(\frac{c_M}{8 a_M(u')^{1/u'}} \right)^u .$$

2.5. - Faisons $M=1$ dans l'inégalité (6). On obtient :

$$\underline{d} \mathfrak{F}_1 \geq \left(\frac{c_1}{8 a_1(u')^{1/u'}} \right)^u .$$

La valeur approchée de $c_1 = \prod_{p>2} \left(1 + \frac{2}{p(p-2)} \right)$ est 2,14069 (*). Le calcul de $a_1(u')$ est assez délicat pour les valeurs de u proches de 1, mais le maximum de l'expression de droite de (6), en tant que fonction de u , semble atteint en une valeur voisine de $u = 1,156$.

On obtient alors :

PROPOSITION 1. $\quad \underline{d} \mathfrak{F}_1 \geq \frac{1}{39,57} .$

2.6. - Faisons maintenant le choix $M = M_o = 2 \prod_{2 \leq p \leq 19} p$. On trouve

$$\prod_{p>19} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)} \right) = 1,022 \dots$$

et

$$\underline{d} \mathfrak{F}_{M_o} \geq \frac{1}{8,88}$$

(on a pris $u = u_o = 1,031$).

Or $M_o - 1$ est un nombre premier. On a ainsi démontré :

PROPOSITION 2. $\quad \underline{d} \mathfrak{Q} \geq \frac{1}{8,88} .$

2.7. - On va maintenant montrer que quels que soient les entiers M_1 et $M_2 \geq 1$, M_1 divise M_2 implique

(*) Ce calcul numérique, et tous ceux qui figurent ici, ont été effectués sur ordinateur par A. Laville, de l'Université de Reims.

$$(7) \quad \left(\frac{c_{M_1}}{a_{M_1}(u'_o)} \right)^{u_o} \leq \left(\frac{c_{M_2}}{a_{M_2}(u'_o)} \right)^{u_o}.$$

Il suffit pour cela de montrer que sous cette hypothèse :

$$1 \leq \prod_{\substack{p \mid M_1 \\ p \nmid 2M_1}} \left(1 + \frac{\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{2u'_o} - 1}{p} \right)^{1/u'_o} \left(1 + \frac{2}{p(p-2)} \right)^{-1}$$

Or il est clair que, pour tout nombre premier p impair, on a l'inégalité

$$\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{2u'_o} \geq \left(1 + \frac{2}{p-2}\right)^{u'_o}.$$

D'autre part il existe un nombre réel $c \in]0, \frac{2}{p-2}[$ tel que

$$\frac{\left(1 + \frac{2}{p-2}\right)^{u'_o} - 1}{\left(1 + \frac{2}{p(p-2)}\right)^{u'_o} - 1} = p \frac{\left(1+c\right)^{u'_o} - 1}{\left(1+\frac{c}{p}\right)^{u'_o} - 1}.$$

Par conséquent

$$1 + \frac{\left(1 + \frac{2}{p-2}\right)^{u'_o} - 1}{p} \geq \left(1 + \frac{2}{p(p-2)}\right)^{u'_o};$$

compte tenu de l'inégalité (8), on a alors l'inégalité

$$\left(1 + \frac{\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{2u'_o} - 1}{p} \right)^{1/u'_o} \geq 1 + \frac{2}{p(p-2)}$$

ce qui prouve (7).

L'implication (7) a pour conséquence que si M est un multiple de M_o ,

$$\underline{d} \mathfrak{F}_M \geq \frac{1}{8,88}.$$

Soit maintenant un entier $n \geq 1$. On considère les ensembles

$\mathfrak{F}_{nM_o}, \mathfrak{F}_{2nM_o}, \dots, \mathfrak{F}_{9nM_o}$. Comme pour chaque entier $i = 1, 2, \dots, 9$, on a la minoration

$$\underline{d} \mathfrak{F}_{i n M_o} \geq \frac{1}{8,88},$$

il est clair qu'il existe deux entiers i et i' vérifiant $1 \leq i < i' \leq 9$ et une infinité d'entiers $d \geq 2$ tels que :

$$d \in \mathfrak{F}_{n M_0}^i \cap \mathfrak{F}_{n M_0}^{i'}.$$

Or chacun de ces nombres d admet les représentations :

$$d = \frac{p+1}{n^i(q+1)M_0} \quad \text{et} \quad d = \frac{p'+1}{n^{i'}(q'+1)M_0}.$$

Donc

$$n^{i'-i} = \frac{(p'+1)(q+1)}{(q'+1)(p+1)}.$$

La proposition suivante exprime ce résultat :

PROPOSITION 3. - Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un entier a tel que $1 \leq a \leq 8$ et une infinité de représentations de n sous la forme :

$$n^a = \prod_{i=1}^4 (p_i+1)^{\varepsilon_i}, \quad \text{où} \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

-:-:-:-

RÉFÉRENCES

- [1] H. DELANGE, Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 3ème série, t. 78 (1961), 273-304.
- [2] J.-M. DESHOUILLERS, Sur la fonction de répartition de certaines fonctions arithmétiques définies sur l'ensemble des nombres premiers moins un, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 11ème année (1969-70), n° 17, 13p.
- [3] F. DRESS et B. VOLKMANN, Ensembles d'unicité pour les fonctions additives ou multiplicatives, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 287 (10 juil. 1978).
- [4] P. D. T. A. ELLIOTT, A conjecture of Kataf, Acta Arith. 26 (1974), 11-20.
- [5] H. HALBERSTAM and H. E. RICHET, Sieve Methods, London, Academic Press (1974) (London Mathematical Society Monographs, 4).
- [6] I. KATAF, On distribution of arithmetical functions on the set prime plus one, Compositio Math. 19 (1968), 278-289.
- [7] J. MEYER, Représentation multiplicative des entiers à l'aide de l'ensemble $P+1$, à paraître, Acta Arith. 43, n° 1.
- [8] A. SCHINZEL et W. SIERPINSKI, Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers, Acta Arith. 4 (1958), 191-208.

- [9] E. WIRSING, Additive functions with restricted growth on the numbers of the forme $p+1$, Acta Arith. 37 (1981), 345-357.
- [10] D. WOLKE, Bemerkungen über Eindentigkeitsmengen additiver Funktionen, Elements of Math. 33/1 (1978), 14-16.

-:-:-:-

Jacques MEYER
Faculté des Sciences
Moulin de la Housse
F 51062 REIMS CEDEX