

Astérisque

LUCIEN (RESPONSABLE) SPZIRO

MIREILLE DESCHAMPS

RENÉE LEWIN-MENEGAUX

LUCIEN SZPIRO

MARGUERITE FLEXOR

ROBERT FOSSUM

ARNAUD BEAUVILLE

LAURENT MORET-BAILLY

**Séminaire sur les pinceaux de courbes de
genre au moins deux**

Astérisque, tome 86 (1981)

http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__86__R1_0

© Société mathématique de France, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION

Le séminaire de géométrie algébrique, dirigé par L. Szpiro, qui s'est réuni à l'E.N.S. rue d'Ulm, en 1979 et 80, a été consacré à l'étude des familles algébriques de courbes. L'ensemble des résultats qui y ont été exposés est regroupé dans ce volume d'Astérisque. Certains énoncés et certaines démonstrations ont toutefois été améliorés depuis les exposés oraux. On trouve, d'ailleurs, une version abrégée et plus ancienne des chapitres 2 à 5 dans l'exposé de Szpiro au colloque de Rennes (Astérisque vol.64).

Nous présenterons, d'abord, l'aspect diophantien des théorèmes qui sont au centre de ce volume. Nombre de résultats, auxiliaires pour cette partie, mais intéressants en eux-mêmes, concernent la géométrie des surfaces. (C'est en caractéristique positive qu'on a des énoncés nouveaux dont l'analogue sur $\mathbb{C}$ était dû à Arakelov).

Soient k un corps algébriquement clos et K le corps des fonctions rationnelles sur une courbe B projective lisse sur k . Etant donnée une courbe X_K projective lisse sur K (de genre au moins 2 dans la suite), on sait qu'on peut trouver une surface X projective lisse sur k , munie d'une fibration $f: X \rightarrow B$ dont la fibre générique est X_K . Et une telle fibration est unique si l'on impose en outre qu'elle soit relativement minimale.

L'ensemble (fini) des points de B où la fibre de f est singulière s'appelle alors le lieu de mauvaise réduction de X_K .

Quitte à faire une extension finie K' de K , on peut supposer que X_K a réduction semi-stable (i.e. que les fibres singulières de f sont réduites à singularités quadratiques ordinaires). La démonstration, publiée ici, du théorème de réduction semi-stable (chap. 1) apporte quelques précisions dues à J.-F. Boutot au texte initial d'Artin-Winters (référence à la fin du chap. 1). Le lien avec la réduction semi-stable de la jacobienne de X_K y est fait et, par ce biais on obtient des renseignements sur l'extension K'/K convenable. Les conjectures suivantes sont classiques :

Conjecture de Shafarevich (pour les corps de fonctions) : Etant donné un ensemble fini S , de points de B , l'ensemble des courbes X_K , de genre g , non isotriviales (essentiellement : non définies sur k) et ayant bonne réduction en dehors de S est fini.

Conjecture de Mordell (pour les corps de fonctions) : Si la courbe X_K est non isotriviale l'ensemble $X_K(K)$ de ses points rationnels sur K est fini.

Ces conjectures ont été démontrées par Parshin et Arakelov (voir référence à la fin du chap. 3 de ce volume) lorsque la caractéristique de k est nulle. On démontre ici (Thm. 7 exposé 3) la conjecture de Shafarevich en toute caractéristique pour des courbes X_K admettant réduction semi-stable sur B . On montre ensuite qu'il est facile de se débarrasser de l'hypothèse de semi-stabilité en caractéristique zéro mais qu'elle est indispensable en caractéristique positive (cf. exemple après le théorème 7 loc. cit.). On établit ensuite la conjecture de Mordell, en suivant une méthode esquissée par Parshin pour déduire "Mordell" de "Shafarevich".

Un résultat auxiliaire essentiel est le suivant. Si $f: X \rightarrow B$ est une fibration semi-stable non isotriviale, alors le faisceau dualisant relatif $\omega_{X/B}$ est numériquement positif (et ample sur le modèle stable). Si k est de caractéristique nulle, le vanishing théorème de Ramanujan-Kodaira implique alors la nullité de $H^1(X, \omega_{X/B}^{-1})$. Mumford avait donné des exemples de surfaces normales, puis Raynaud de surfaces lisses, sur un corps de caractéristique $p > 0$, munies d'un faisceau ample L tel que $H^1(X, L^{-1})$ soit non nul. De nouveaux contre-exemples au "vanishing" de Kodaira sont construits dans l'exposé 4. Toutefois l'exposé 2 est consacré à la démonstration d'un théorème d'annulation de cohomologie, qui admet comme corollaire immédiat $H^1(X, \omega_{X/B}^{-1}) = 0$ si $X \xrightarrow{f} B$ est une fibration semi-stable non isotriviale.

Ce théorème d'annulation est utilisé à plusieurs reprises au cours de l'exposé 3 et permet en particulier d'établir la "rigidité" des familles semi-stables (Thm. 6) point essentiel pour démontrer la finitude (Thm. 7).

En termes approchés la rigidité signifie ceci. Soient V un espace de paramètres (connexe) et $\mathcal{X} \xrightarrow{f} B \times V$ tel que pour tout point

INTRODUCTION

$v \in V$, f induise $f_v : X_v \longrightarrow B \times \{v\}$ fibration semi-stable à mauvaise réduction contenue dans $S \subset B$ alors la fibration f_v ne dépend pas du point v .

Les exposés 7 et 8 sont indépendants des chapitres précédents. L. Moret-Bailly construit une famille non constante de variétés abéliennes principalement polarisées, sur $\mathbb{P}_k^1$, pour tout corps k de caractéristique $\neq 2$. (On sait que tout schéma abélien sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ est constant). Le schéma abélien construit par L. Moret Bailly est la jacobienne d'une famille semi-stable de courbes de genre 2 sur $\mathbb{P}_k^1$ dont les fibres singulières sont formées de 2 courbes elliptiques se coupant transversalement en un point. Notons qu'il n'existe pas de famille lisse non constante de courbes de genre supérieur ou égal à 1 sur $\mathbb{P}_k^1$: Si $k = \mathbb{C}$ et sans hypothèse de semi-stabilité il y a au moins 3 fibres singulières. Si on suppose la famille semi-stable et toujours en caractéristique 0, A. Beauville montre (exposé 6) qu'il y a au moins 4 fibres singulières. Si le corps de base est de caractéristique $p \neq 0$ une famille semi-stable de genre au moins 2 sur $\mathbb{P}^1$ a au moins 3 fibres singulières (chap. 3).

Il reste à mentionner qu'on construit au chapitre 5 des surfaces projectives lisses sur un corps de caractéristique $\neq 0$ sur lesquelles il existe des formes différentielles globales non fermées (les premiers exemples étaient dus à D. Mumford).

En guise de conclusion, rappelons qu'on peut étendre dans deux directions, le sujet de ce séminaire d'une part en considérant des familles de variétés abéliennes, d'autre part, en prenant pour K un corps de nombres.

1) Soient d'abord K et B comme précédemment, S un ensemble fini de points de B , g et n deux entiers (n premier à la caractéristique). L'ensemble des variétés abéliennes sur K , de dimension g , munies d'une polarisation de degré n , ayant réduction semi-stable sur K , et bonne réduction en dehors de S , est-il fini ? Dans cette direction, L. Szpiro et L. Moret Bailly, savent montrer que si S est vide, et si on fixe aussi le degré du fibré tangent relatif, restreint à la section nulle, alors l'ensemble des schémas abéliens $X \longrightarrow B$

(de dimension g , munis d'une polarisation de degré n) forme une famille limitée. Mais il manque par exemple un énoncé de "rigidité" pour obtenir la finitude.

2) Soient maintenant K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K , et g un entier ≥ 2 .

a) Conjecture de Mordell : Soit X une courbe de genre g lisse sur K . Alors l'ensemble des points de X rationnels sur K est fini.

Le point sur cette question est fait dans les textes de J.-P. Serre "Autour du Théorème de Mordell-Weil I, II" résumé d'un cours au Collège de France Janvier-Mars 1980, Octobre-Décembre 1980.

b) Conjecture de Shafarevich : L'ensemble des courbes de genre g projectives lisses sur K , ayant bonne réduction en dehors de S est fini.

On sait démontrer cette conjecture en genre 2 (par exemple Parshin : "Minimal models of curves of genus 2..." Math. USSR Isv. vol. 6 1972) et de façon générale pour les courbes hyperelliptiques (ou pour les courbes elliptiques).

c) Existe-t-il des familles de courbes de genre g lisses sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$?

d) On ne connaît pas non plus (bien sûr), l'analogue de b) pour les variétés abéliennes. Même l'énoncé suivant est conjectural : L'ensemble des variétés abéliennes de dimension 2, sur K principalement polarisées, et ayant bonne réduction en dehors de S est fini.

Renée Elkik

TABLE DES MATIÈRES

	pages
1 M. DESCHAMPS	
RÉDUCTION SEMI-STABLE.....	1
Introduction.....	1
1-1 Rappels définitions.....	2
1-2 Enoncé du théorème et premières réductions.....	3
1-3 Etude des points d'ordre fini de la jacobienne.....	10
1-4 Etude combinatoire.....	12
1-5 Rapport avec les jacobiniennes.....	26
Bibliographie.....	34
2 R. MÉNÉGAUX	
UN THÉORÈME D'ANNULATION EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE	35
Bibliographie.....	43
3 L. SZPIRO	
PROPRIÉTÉS NUMÉRIQUES DU FAISCEAU DUALISANT RELATIF	44
Introduction.....	45
3-0 Fibrations semi-stables.....	46
3-1 Invariants entiers.....	48
3-2 Positivité du faisceau dualisant relatif.....	51
3-3 Borne pour la self-intersection du faisceau dualisant relatif.....	58
3-4 Cas où la base est de genre zéro ou un.....	60
3-5 Fibres ordinaires.....	62
3-6 Rigidité.....	63
3-7 Le problème de Chafarevich.....	65
3-8 Le problème de Mordell.....	71
Bibliographie.....	77
4 M. FLEXOR	
NOUVEAUX CONTREEXEMPLES AUX ÉNONCÉS D'ANNULATION A LA KODAIRA EN CARACTÉRISTIQUE $p > 0$	79
Introduction.....	79
4-1 Structure de Tango-Raynaud.....	79
4-2 Fibrations de Kodaira.....	86

TABLE DES MATIÈRES

	Bibliographie.....	89
5	R. FOSSUM	
	FORMES DIFFÉRENTIELLES NON FERMÉES.....	90
	Introduction.....	90
5-1	Les exemples de D. Mumford.....	90
5-2	Les exemples de Raynaud-Szpiro.....	92
	Bibliographie.....	96
6	A. BEAUVILLE	
	LE NOMBRE MINIMUM DE FIBRES SINGULIÈRES D'UNE COURBE STABLE SUR $\mathbb{P}^1$	97
	Introduction.....	97
6-1	Résultats sans hypothèse de stabilité.....	97
6-2	Enoncé du théorème principal.....	100
6-3	Quelques lemmes.....	101
6-4	Démonstration du théorème.....	102
6-5	Exemples.....	106
	Bibliographie.....	108
7	L. MORET-BAILLY	
	FAMILLES DE COURBES ET DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES SUR $\mathbb{P}^1$	
	I. DESCENTE DES POLARISATIONS.....	109
	Introduction.....	109
7-1	Le morphisme φ_L et le groupe $K(L)$	110
7-2	Généralités sur les θ -groupes.....	111
7-3	Le groupe $G(L)$	113
7-4	Descente de faisceaux inversibles.....	115
7-5	Représentations linéaires de $G(L)$	119
	Appendice.....	122
	Bibliographie.....	124
8	L. MORET-BAILLY	
	FAMILLES DE COURBES ET DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES	
	II. EXEMPLES.....	125
	Introduction.....	125
8-1	Construction de $(\mathcal{X}, M)$	126
8-2	Etude de la fibration $D \longrightarrow S$	130
8-3	Calcul de Lie $(\mathcal{X}/S)$ et conséquences.....	136
	Appendice.....	138
	Bibliographie.....	140

RÉDUCTION SEMI-STABLE

par Mireille DESCHAMPS

exposé n° 1

0. Introduction.

Nous nous proposons de démontrer dans cet exposé le théorème suivant, dit de réduction semi-stable : "Soient R un anneau de valuation discrète de corps de fractions K , corps résiduel k , C une courbe propre et lisse de genre $g \geq 2$ sur K . Alors il existe une extension finie K' de K telle que si R' est un localisé de la fermeture intégrale de R dans K' et V' le modèle régulier minimal de $C \times_K K'$ sur R' , V' est semi-stable, c'est-à-dire que sa fibre spéciale est réduite et n'a pour singularités que des points doubles ordinaires".

Le paragraphe 1 est consacré à des rappels et des définitions.

Au paragraphe 2, on fait une première réduction du théorème : si V est le modèle minimal de C sur R , $X = \sum_{i=1}^n r_i C_i$ sa fibre spéciale, si $\text{p.g.c.d}(r_i) = 1$ et si le radical unipotent de $\text{Pic}^0(X/k)$ est nul, alors V est semi-stable.

Au paragraphe 3, nous poursuivons l'étude de la fibre spéciale $X = \sum_{i=1}^n r_i C_i$. Nous introduisons le groupe abélien G engendré par $x_1, \dots, x_n$ avec les n relations $\sum_{i=1}^n (C_i \cdot C_j) x_i = 0$. Il permet d'établir un lien entre les points d'ordre fini de la Jacobienne de C et les points d'ordre fini de $\text{Pic}^0(X/k)$. Plus précisément, pour tout nombre premier q distinct de la caractéristique résiduelle, il existe une suite exacte : $0 \rightarrow_q \text{Pic}^0(X/k) \rightarrow_q \text{Pic}^0(C/K) \rightarrow_q G \rightarrow 0$.

Le paragraphe 4 est essentiellement de nature combinatoire. L'étude des différents types possibles de graphes associés à la fibre spéciale X permet de majorer $\dim_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}(G)$ en fonction du nombre de

Betti du graphe, et de terminer la démonstration du théorème.

Le paragraphe 5 fait le lien entre la notion de réduction semi-stable d'une courbe et celle de réduction semi-stable d'une variété abélienne (rappelons qu'une variété abélienne A sur K a réduction semi-stable sur R si la fibre spéciale de son modèle de Néron a un radical unipotent nul). On démontrera qu'une courbe C de genre $g \geq 2$ propre et lisse sur K a réduction semi-stable sur R si et seulement si sa Jacobienne a réduction semi-stable sur R . La fin du paragraphe est consacrée à des résultats "non publiés mais bien connus des spécialistes" qui déterminent quelle est la meilleure extension K' de K sur laquelle une variété abélienne a réduction semi-stable.

Nous nous sommes inspirés surtout des articles d'Artin-Winters [2] dont nous suivons la démonstration et de Deligne-Mumford [3].

1. Rappels - Définitions.

1.1. Soit k un corps algébriquement clos. Une courbe C projective sur k de genre $g \geq 2$ est stable (resp. semi-stable) si :

- i) elle est réduite et connexe
- ii) ses singularités sont quadratiques ordinaires
- iii) toute composante irréductible de C isomorphe à $\mathbb{P}^1$ rencontre les autres composantes en au moins 3 points (resp. 2 points).

1.2. Soit S un schéma. Une S-courbe stable (resp. semi-stable) de genre $g \geq 2$ est un S -schéma V propre, plat, dont les fibres géométriques sont des courbes stables (resp. semi-stables) de genre g .

1.3. Dans toute la suite on désigne par R un anneau de valuation discrète de corps de fractions K , corps résiduel k , et on note $S = \text{Spec } R$. Soit C une courbe projective lisse, géométriquement connexe sur K , de genre $g \geq 2$.

DÉFINITION 1.4. Un modèle de C sur R (ou S) est un S -schéma propre et plat $f: V \rightarrow S$ tel que $V_K = V \times_S K$ soit muni d'un K -isomorphisme avec C .

DÉFINITION 1.5. Un modèle régulier (resp. stable, resp. semi-stable) de C sur R est un modèle de C qui est un schéma régulier (resp.

une S-courbe stable, resp. une S-courbe semi-stable). S'il existe un modèle stable (resp. semi-stable) on dit que C a réduction stable (resp. semi-stable) sur R .

DEFINITION 1.6. Un modèle minimal de C sur R est un modèle régulier dont la fibre spéciale ne contient pas de courbe exceptionnelle (i.e. de droite de self intersection -1).

REMARQUE 1.7. D'après [1] il existe toujours un modèle régulier et d'après [12] on peut contacter ses courbes exceptionnelles en des points lisses, donc il existe un modèle minimal. On démontre facilement qu'il est unique à S-isomorphisme près (ce qui est faux si $g=0$). De plus, il commute à tout changement de base étale, donc aussi au passage au hensélisé et au hensélisé strict de R . Enfin il est universel au sens suivant : soient $f: V \rightarrow R$ un modèle minimal et $g: W \rightarrow R$ un modèle régulier de C . Alors il existe un R -morphisme $h: W \rightarrow V$.

1.8. Si V est un modèle régulier de C , il existe sur V une théorie des intersections entre un diviseur quelconque et un diviseur à support dans la fibre spéciale X [12]. En particulier, si C est une composante de X , on a : $C.X = 0$

$-C^2 = C(X-C) = \text{nombre de points où } C \text{ rencontre les autres composantes.}$

La condition (iii) de 1.1 équivaut alors à :

(iv) : X ne contient pas de courbe exceptionnelle ni de droite de self-intersection -2 (resp. pas de courbe exceptionnelle).

2. Énoncé du théorème et premières réductions.

Dans la suite, les notations restent celles de 1.2 et 1.3.

Nous nous proposons (et nous y parviendrons après de nombreux intermédiaires) de démontrer le résultat suivant (prouvé par Grothendieck-Deligne-Mumford [3], puis de manière indépendante par Artin-Winters [2] dont nous reprendrons la démonstration).

THÉORÈME 2.1. Soit C une courbe propre, lisse, géométriquement connexe sur K , de genre $g \geq 2$. Alors il existe une extension finie K' de K telle que si R' est un localisé de la clôture intégrale de R dans K' , $C \times_K K'$ a réduction semi-stable sur R' .

PROPOSITION 2.2. Supposons que le corps résiduel k de R soit algébriquement clos. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $\mathcal{C}$ a réduction stable
- ii) $\mathcal{C}$ a réduction semi-stable
- iii) le S -modèle régulier minimal de $\mathcal{C}$ est semi-stable.

DÉMONSTRATION DE (i) $\implies$ (iii). Soit $f: V \longrightarrow S$ une S -courbe stable qui prolonge $\mathcal{C}$. La déformation universelle d'une singularité quadratique ordinaire sur un corps k est l'anneau local complet $W[[X,Y,T]]/XY-T$ au-dessus de l'anneau de base $W[[T]]$ (W étant le corps k si la caractéristique est nulle, l'anneau des vecteurs de Witt sinon) [3]. En d'autres termes, soit x un point singulier de la fibre spéciale ; il existe un homomorphisme $u: W[[T]] \longrightarrow R$ qui induit un isomorphisme

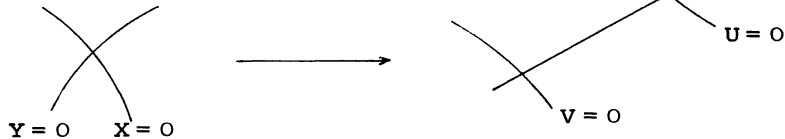
$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{O}}_{V,x} &\xrightarrow{\sim} R \otimes_{W[[T]]} W[[X,Y,T]]/XY-T \\ &\xrightarrow{\sim} R[[X,Y]]/XY-u(T) \\ &\xrightarrow{\sim} R[[X,Y]]/XY-t^n\end{aligned}$$

si t est une uniformisante de R , et x est un point singulier de V si et seulement si $n \geq 2$.

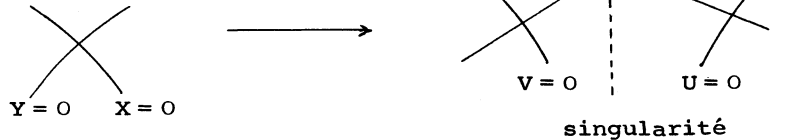
Eclatons dans $\hat{\mathcal{O}}_{V,x}$ l'idéal maximal (X,Y,t) . On obtient le schéma :

$$\text{Proj } \hat{\mathcal{O}}_{V,x}[[U,V,W]]/(UV-t^{n-2}W^2, XV-UY, YW-tV, tU-XW)$$

Si $n = 2$



Si $n \geq 3$

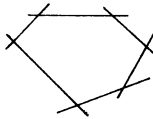


PINCEAUX DE COURBES DE GENRE AU MOINS DEUX I

Si $n=2$, l'éclaté est régulier et on a introduit une droite de self-intersection -2 . Si $n \geq 3$, l'éclaté a une singularité du type $uv - t^{n-2} = 0$, et on a introduit deux droites de self-intersection -2 qui se coupent transversalement au point singulier. Au bout de $\left[\frac{n}{2}\right]$ éclatements, on obtient donc un schéma régulier, et dans la fibre spéciale, on a ajouté $(n-1)$ droites de self-intersection -2 . Ce schéma qui est le S -modèle régulier minimal de C est donc semi-stable.

DÉMONSTRATION DE (iii) $\implies$ (i). Soient V le S -modèle régulier minimal de C , et $E_1, \dots, E_r$ les composantes de la fibre spéciale qui sont des droites de self-intersection -2 .

- Ou bien elles constituent toute la fibre, c'est-à-dire qu'on a un "cycle" :

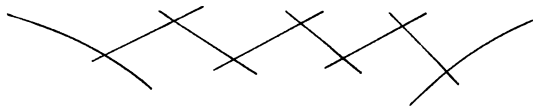


alors $X = \sum_{i=1}^r E_i$. Soit K_O un diviseur dualisant relatif de V sur S :

$$E_i^2 + E_i \cdot K_O = -2 \implies E_i \cdot K_O = 0$$

$X^2 + X \cdot K_O = X \cdot K_O = 2g-2 = 0 \implies g=1$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

- Ou bien elles forment des chaînes :



et d'après un résultat de Lipman [6] on peut les contracter par un procédé inverse du précédent, et on vérifie facilement que les seules singularités qu'on obtient dans la fibre spéciale sont quadratiques ordinaires, c'est-à-dire qu'on obtient une S -courbe stable.

COROLLAIRE 2.3. Le S -modèle stable s'il existe est unique à S -isomorphisme unique près, puisqu'il s'obtient en contractant toutes les droites de self-intersection -2 dans le S -modèle minimal, et il est normal puisque ses singularités sont isolées.

REMARQUE 2.4. Soit $f: V \rightarrow S$ un modèle régulier semi-stable d'une K -courbe C , et soit $\pi: S' \rightarrow S$ un morphisme fini éventuellement ramifié, soit $f': \tilde{V}' \rightarrow S'$ le morphisme de la résolution des singularités $\tilde{V}'$ de $V \times_S S'$ dans S' , de sorte qu'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{V}' & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & V \times_S S' & \xrightarrow{\quad} & V \\ & \searrow f' & \downarrow & & \downarrow f \\ & & S' & \xrightarrow{\quad \pi & } & S \end{array}$$

La théorie des déformations utilisée dans la démonstration précédente montre que pour passer de $V \times_S S'$ à $\tilde{V}'$, on ne rajoute que des droites de self-intersection -2 , de sorte que f' est encore semi-stable.

2.5. Nous allons étudier la fibre spéciale d'une S -courbe régulière V qui prolonge C .

Soit $f: V \rightarrow S = \text{Spec } R$

$$V_K = V \times_S K \xrightarrow{\sim} C \quad \text{la fibre générique}$$

$$X = V \times_S k = \sum_{i=1}^n r_i C_i \quad \text{la fibre spéciale.}$$

Nous supposons que le corps résiduel k est algébriquement clos.

Soit K_0 un diviseur tel que $\mathcal{O}_V(K_0) \simeq \omega_{V/R}$ (faisceau dualisant relatif).

PROPOSITION 2.6. La fibre spéciale possède les propriétés suivantes :

- a) X est connexe et $r_i > 0$ pour $i = 1, \dots, n$
- b) $C_i \cdot C_j = C_j \cdot C_i > 0$ si $i \neq j$ et $X \cdot C_i = 0$ pour $i = 1, \dots, n$
- c) le genre arithmétique $p(C_i)$ de C_i est égal à

$\frac{1}{2}(C_i^2 + C_i \cdot K_O) + 1$, en particulier $\frac{1}{2}(C_1^2 + C_1 \cdot K_O)$ est un entier $\gg 0$ pour
 $i = 1, \dots, n$

d) la matrice symétrique $(C_i \cdot C_j)$ est semi-définie négative et
les seuls diviseurs $Z = \sum_{i=1}^n s_i C_i$ tels que $Z^2 = 0$ sont les multiples
rationnels de X .

DÉMONSTRATION. Seul d) , nécessite une démonstration qui est formelle
 à partir de a) et b) . Soit V le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de base
 $C_1, \dots, C_n$.

1°) Soit $Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{Q}$) un élément de V . Nous allons
 montrer par récurrence sur n que $Z^2 \leq 0$

- pour $n=1, 2$ c'est immédiat

- si $\alpha_n = \alpha_{n-1} = 0$, les vecteurs $C_1, \dots, C_{n-2}$, $r_{n-1}C_{n-1} + r_n C_n$
 forment une base d'un espace vectoriel qui vérifie les propriétés (a)
 et (b) . Par hypothèse de récurrence, $Z^2 \leq 0$.

- Quitte à remplacer Z par $Z - \frac{\alpha_n}{r_n} X$, on peut toujours supposer
 $\alpha_n = 0$. Ecrivons $Z = Z_1 - Z_2$, où Z_1 et Z_2 sont à coefficients $\gg 0$.
 D'après ce qui précède, $Z_1^2 \leq 0$, $Z_2^2 \leq 0$, $Z_1 \cdot Z_2 \geq 0$ donc $Z^2 \leq 0$, si Z_1
 et Z_2 sont non nuls.

Enfin si $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_{n-1} > 0$, supposons $\frac{\alpha_1}{r_1} \gg \frac{\alpha_2}{r_2} \gg \dots \gg \frac{\alpha_{n-1}}{r_{n-1}}$.

Soit $Z' = Z - \frac{\alpha_{n-1}}{r_{n-1}} X = \sum_{i=1}^n (\frac{\alpha_i}{r_i} - \frac{\alpha_{n-1}}{r_{n-1}}) r_i C_i$

$Z'^2 = Z^2 \leq 0$ d'après ce qui précède.

2°) Il reste à montrer que le rang de la forme intersection est
 $(n-1)$.

Soit $W = \{w \in V ; w \cdot v = 0 \ \forall v \in V\} = V^\perp$.

Sur V/W la forme intersection est définie négative. Supposons
 que $C_1, \dots, C_\ell$ ($\ell \in [1, n-1]$) forment une base de V/W .

On peut écrire :

$$C_{\ell+1} = L_1 - L_2 + D \quad \text{où } D \in W$$

$$\text{et } L_i = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} C_j, \quad \lambda_{i,j} \in \mathbb{Q}^+$$

alors $0 \ll C_{\ell+1} \cdot L_1 = L_1^2 - L_1 \cdot L_2 \ll 0 \implies L_1^2 = 0 \implies L_1 = 0$

donc $C_{\ell+1} + L_2 = D \in W$.

Soit r le dénominateur commun des $\lambda_{2,j}$, de sorte que $r(C_{\ell+1} + L_2) = rD$ est un diviseur effectif Δ .

Si la dimension de V/W est inférieure à $n-1$, il existe des indices i tels que C_i ne soit pas une composante de Δ . Pour un tel indice, $C_i \cdot \Delta = 0$ donc C_i est disjoint de Δ . La réunion de ces C_i est disconnexe de la réunion des composantes de Δ , d'où une contradiction.

REMARQUE 2.7. Dans la même situation qu'à la remarque 2.4, au-dessus de chaque point singulier de $V \times_S S'$ il y a dans $\tilde{V}$ une fibre formée de droites de self-intersection -2 qui possède les propriétés a), b), d) de la proposition précédente.

THÉOREME 2.8. Avec les notations de 2.5, si V est le modèle minimal de C , si $\text{pgcd}(r_i) = 1$ et si le radical unipotent de $\text{Pic}^0(X/k)$ est nul, alors V est semi-stable.

LEMME 2.9 (avec les notations de 2.5). Si $\text{pgcd}(r_i) = 1$, alors :

- $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$, $\dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X) = g$
- si X n'est pas réduit, $g > \dim_k H^1(X_{\text{red}}, \mathcal{O}_{X_{\text{red}}})$.

DÉMONSTRATION. Soit Z un diviseur vérifiant : $X_{\text{red}} \subset Z \subset X$, $H^0(Z, \mathcal{O}_Z) = k$, et maximal pour ces propriétés. Posons $Z = \sum_{i=1}^n a_i C_i$ et supposons $Z \neq X$.

$$\text{Alors} \quad 0 = X(X-Z) = (X-Z)^2 + Z(X-Z).$$

Puisque $\text{pgcd}(r_i) = 1$, $X-Z$ n'est pas un multiple de X , donc $(X-Z)^2 \ll 0$. Il existe alors i tel que $r_i > a_i$ et $Z \cdot C_i > 0$.

$$\text{Soit } Z' = Z + C_i.$$

On a des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V(-Z') \longrightarrow \mathcal{O}_V(-Z) \longrightarrow \mathcal{O}_{Z'} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

$$\text{et} \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_V(-C_i - Z) \longrightarrow \mathcal{O}_V(-Z) \longrightarrow \mathcal{O}_{C_i}(-Z) \longrightarrow 0$$

$$\text{d'où :} \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{C_i}(-Z) \longrightarrow \mathcal{O}_{Z'} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

et puisque $Z.C_i > 0$, $H^0(\mathcal{O}_{C_i}(-Z)) = 0$, donc $H^0(\mathcal{O}_Z) = k$ ce qui contredit l'hypothèse.

Ecrivons maintenant $X = Z + C_i$ où $Z \supset X_{\text{red}}$ et $Z.C_i > 0$.

D'après Riemann-Roch sur C_i :

$$h^1(\mathcal{O}_{C_i}(-Z)) = h^0(\mathcal{O}_{C_i}(-Z)) + (Z.C_i - 1) + p(C_i)$$

donc $h^1(\mathcal{O}_{C_i}(-Z))$ est nul si et seulement si $Z.C_i = 1$ et $p(C_i) = 0$ c'est-à-dire, puisque $0 = X.C_i = Z.C_i + C_i^2$, si C_i est une courbe exceptionnelle, ce qui est exclu par hypothèse.

De la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}_{C_i}(-Z) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$ on tire

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{C_i}(-Z)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_Z) \rightarrow 0$$

d'où $h^1(X, \mathcal{O}_X) = g - 1 + h^0(X, \mathcal{O}_X) = g > h^1(Z, \mathcal{O}_Z) \gg h^1(X_{\text{red}}, \mathcal{O}_{X_{\text{red}}})$.

DÉMONSTRATION DU THÉOREME 2.8. Le noyau du morphisme $\text{Pic}^0(X/k) \rightarrow \text{Pic}^0(X_{\text{red}}/k)$ est unipotent. Il est donc nul et d'après le lemme 2.9, X est réduit.

Soit $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ la normalisation de X , et X' le schéma intermédiaire défini par :

- même espace sous-jacent que X
- pour tout ouvert U de X

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{X'}) = \{f \in \Gamma(U, \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}), f(x_1) = f(x_2) \text{ si } \pi(x_1) = \pi(x_2)\}.$$

On voit facilement que les singularités de X' sont du type "axes de coordonnées", c'est-à-dire de la forme $k[[T_1, \dots, T_s]]/(T_i T_j)$. Puisque $\mathcal{O}_{X'}$ est totalement ramifié sur $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{O}_X \neq 0$. Soit x un point singulier de X . Le noyau d'une $\mathcal{O}_X$ -dérivation $\mathcal{O}_{X'} \rightarrow k(x)$ est une $\mathcal{O}_X$ -algèbre $\mathcal{O}_1$ telle que $\lg_k \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{O}_1 = 1$. On construit ainsi de proche en proche une suite d'algèbres :

$$\mathcal{O}_{X'} \supset \mathcal{O}_1 \supset \dots \supset \mathcal{O}_t = \mathcal{O}_X$$

telle que $\lg_k \mathcal{O}_i/\mathcal{O}_{i+1} = 1$.

On a des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{i+1}^* \longrightarrow \mathcal{O}_i^* \xrightarrow{u_i} k \longrightarrow 0$$

(localement, si $\mathcal{O}_i$ correspond à l'anneau local A_i d'idéal maximal $\mathfrak{m}_i$:

$$\begin{array}{ccc} A_{i+1} & \longrightarrow & A_i \\ \downarrow & & \downarrow p \\ k = A_{i+1}/\mathfrak{m}_{i+1} & \longrightarrow & A_i/\mathfrak{m}_{i+1}A_i \longrightarrow A_i/\mathfrak{m}_i = k \end{array}$$

$u_i : A_i^* \longrightarrow k$ est défini par $u_i(a) = \frac{p(a)}{\bar{a}} - 1$

d'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_{i+1}^*) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_i^*) \longrightarrow 0$$

ce qui contredit le fait que le radical unipotent de $\text{Pic}^0(X/k)$ est nul. Alors $X' = X$, et puisque X est tracée sur une surface régulière, ses seules singularités sont quadratiques ordinaires.

3. Étude des points d'ordre fini de la jacobienne.

3.1. Avec les notations de 2.6, soit $X = \sum_{i=1}^n r_i C_i$ la fibre spéciale, qui a les propriétés (a), (b), (c), (d).

Soient L le groupe abélien libre engendré par les C_i , $L^* = \text{Hom}(L, \mathbb{Z})$ le groupe dual, et $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ la base duale. La forme intersection définit un homomorphisme

$$\begin{aligned} \mu : L &\longrightarrow L^* \\ C_i &\longmapsto (C_i, \cdot) = \sum_{j=1}^n (C_i \cdot C_j) x_j = \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \end{aligned}$$

et soit $G = \text{Coker } \mu$, qui est un groupe de rang 1.

PROPOSITION 3.2. Si R est complet, de corps résiduel algébriquement clos, et si $\text{pgcd}(r_i) = 1$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Pic}^0 V \longrightarrow \text{Pic } V_K \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION. On a un diagramme à lignes et colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{Pic}^0 V & \xrightarrow{\sim} & N = \text{Ker } \psi & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 L & \xrightarrow{\lambda} & \text{Pic } V & \xrightarrow{\nu} & \text{Pic } V_K & \longrightarrow & 0 \\
 \parallel & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \\
 L & \xrightarrow{\mu} & L^* & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

- λ associe à C_i la classe du faisceau $\mathcal{O}_V(C_i)$, ν est la restriction, qui est surjective car V est localement factoriel. Son noyau est formé des classes de diviseurs à support dans la fibre spéciale.

- φ est défini par $\varphi(Z) = \sum_{i=1}^n (Z.C_i)x_i$.

Puisque $\varphi\lambda = \mu$, φ induit ψ sur les conoyaux de λ et μ .

Le noyau de φ est formé des classes de diviseurs numériquement, donc algébriquement, équivalents à 0 sur les fibres, c'est-à-dire la composante neutre $\text{Pic}^0 V$. Soit x un point lisse de $C_{i_{\text{red}}} = \bigcup_{j \neq i} C_j$ (qui existe car k est algébriquement clos). Puisque R est complet, il se relève en un diviseur D qui vérifie $D.C_i = \delta_{ij}$. Donc φ est surjectif.

- Puisque $\text{pgcd}(r_i) = 1$, $\text{Ker } \lambda = \text{Ker } \mu = \mathbb{Z}X$, donc $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi$.

COROLLAIRE 3.3. Sous les mêmes hypothèses, soit q un entier premier à la caractéristique de k . On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow {}_q\text{Pic}^0 X \longrightarrow {}_q\text{Pic } V_K \longrightarrow {}_qG \longrightarrow 0.$$

LEMME 3.4. Il existe une suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \text{Pic}^0 V \longrightarrow \text{Pic}^0 X \longrightarrow 0$$

où N est uniquement q -divisible (c'est-à-dire que la multiplication par q est bijective).

DÉMONSTRATION. Soit X_n le $n^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de X dans V . Alors $\text{Pic } V \longrightarrow \varprojlim_n \text{Pic } X_n$ est un isomorphisme (Théorème d'algébrisation des faisceaux cohérents [4]).

Pour tout $n \gg 1$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow J_n \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{n+1}}^* \longrightarrow \mathcal{O}_{X_n}^* \longrightarrow 0$$

d'où : $0 \longrightarrow N_n \longrightarrow \text{Pic } X_{n+1} \longrightarrow \text{Pic } X_n \longrightarrow 0$

et $H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}^*) \longrightarrow H^1(X, J_n) \longrightarrow N_n \longrightarrow 0$.

$H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}^*)$ est un anneau artinien local à corps résiduel algébriquement clos, donc il est q -divisible. $H^1(X, J_n)$ est un espace vectoriel, uniquement q -divisible, donc N_n est uniquement q -divisible, et aussi $N = \varprojlim_n N_n$.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 3.3. $\text{Pic}^0 X$ est un groupe algébrique connexe sur un corps algébriquement clos, donc il est q -divisible. Alors d'après le lemme 3.4, $\text{Pic}^0 V$ est q -divisible, et ${}_q \text{Pic}^0 V \xrightarrow{\sim} {}_q \text{Pic}^0 X$ d'où le résultat.

4. Étude combinatoire.

DÉFINITION 4.1. Un type est une collection d'entiers :

$$n, m_{ij} (i=1, \dots, n; j=1, \dots, n), k_i (i=1, \dots, n), r_i (i=1, \dots, n).$$

A tout type T on associe un graphe $G(T)$ qui a n sommets notés $C_1, \dots, C_n$, et m_{ij} arêtes entre C_i et C_j . Pour des raisons évidentes on se permettra d'appeler courbe un sommet du graphe, et d'écrire $C_i \cdot C_j$ pour m_{ij} , C_i^2 pour m_{ii} . L'entier r_i s'appelle la multiplicité du sommet C_i .

DÉFINITION 4.2. Un type est dit admissible s'il vérifie les conditions suivantes :

- a) $\mathbb{Q}(T)$ est connexe, $r_i \geq 0$
- b) $m_{ij} = m_{ji} \geq 0$ si $i \neq j$ et $\sum_{j=1}^n r_j m_{ji} = 0$ pour $i = 1, \dots, n$
- c) $p(C_i) = \frac{1}{2}(m_{ii} + k_i) + 1$ est un entier ≥ 0 pour $i = 1, \dots, n$
- d) la forme quadratique de matrice (m_{ij}) est semi-définie négative de rang $n-1$ (son noyau est engendré sur $\mathbb{Q}$ par $\sum_{i=1}^n r_i C_i$ d'après b)).

Le genre d'un type admissible est l'entier $g = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i k_i$.

A toute configuration géométrique définie en 2.5 est associé de manière naturelle un type qui est dit géométrique et qui est évidemment admissible.

PROPOSITION 4.3. Soient T un type géométrique et β le premier nombre de Betti de son graphe.

Alors $\beta = \dim \text{Ker}(\text{Pic}^0 X_{\text{red}} \rightarrow \text{Pic}^0(\coprod_{i=1}^n C_i))$.

DÉMONSTRATION. On peut supposer $X = X_{\text{red}}$. On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \prod_{i=1}^n (\mathcal{O}_{C_i}) \rightarrow \varepsilon \rightarrow 0$$

où $\dim_k \varepsilon = \sum_{i < j} (C_i \cdot C_j) = \text{nombre d'arêtes de } \mathbb{Q}(T)$,

$$\text{et : } 0 \rightarrow k \rightarrow k^n \rightarrow H^0(\varepsilon) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{t} \prod_{i=1}^n (H^1(C_i, \mathcal{O}_{C_i})) \rightarrow 0$$

$$\text{donc } \dim \text{Ker } t = 1 - n + \sum_{i < j} (C_i \cdot C_j) = \beta.$$

t est l'application tangente au morphisme $\text{Pic}^0 X \rightarrow \text{Pic}^0 \coprod_{i=1}^n C_i$. Puisqu'elle est surjective, ce morphisme est lisse, donc son noyau est lisse et a même dimension que $\text{Ker } t$.

4.4. Soit C_i une des courbes d'un type admissible T .

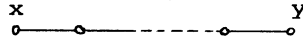
$$\text{D'après (d)} \quad C_i^2 = 0 \iff n = 1.$$

$$\text{D'après (c) et b)} : k_i \geq -2 \quad \text{et} \quad k_i = -2 \iff C_i^2 = 0, \quad p(C_i) = 0.$$

On peut donc diviser les courbes C_i en 4 classes :

- (0) $C^2 = 0$ $n = 1$ $X = rC$
 (i) $k_i = -1$ $C_i^2 = -1$ $p(C_i) = 0$ courbes exceptionnelles
 (ii) $k_i = 0$ $C_i^2 = -2$ $p(C_i) = 0$
 (iii) $k_i > 0$ $C_i^2 < 0$ $p(C_i) < g$.

On appellera chaîne (*) une chaîne du graphe de T de la forme :



où x, y et les sommets $\circ$ ont même multiplicité r , et où les sommets $\circ$ sont des courbes de la classe (ii).

On remarque que toutes les liaisons des sommets $\circ$ sont en évidence sur le dessin ci-dessus.

THÉOREME 4.5. Soient $g \geq 2$ et $m \geq 0$ deux entiers fixés. Il n'existe qu'un nombre fini de types admissibles de genre g sans composante exceptionnelle, et sans chaîne (*) de longueur supérieure à m .

DÉMONSTRATION. On peut laisser de côté la classe (0).

Soient $C_1, \dots, C_s$ les courbes de T de la classe (iii)

$C_{s+1}, \dots, C_n$ les courbes de T de la classe (ii).

$g = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s r_i k_i \implies s$ est non nul, borné supérieurement et les nombres r_i et k_i sont bornés supérieurement pour $i = 1, \dots, s$.

Soit Γ le graphe de $C_1, \dots, C_s$, $\Theta_1, \dots, \Theta_t$ les graphes des composantes connexes de $C_{s+1}, \dots, C_n$.

$$p(C_i) = 1 + \frac{1}{2}(C_i^2 + C_i \cdot K) \geq 0 \implies C_i^2 \text{ borné inférieurement}$$

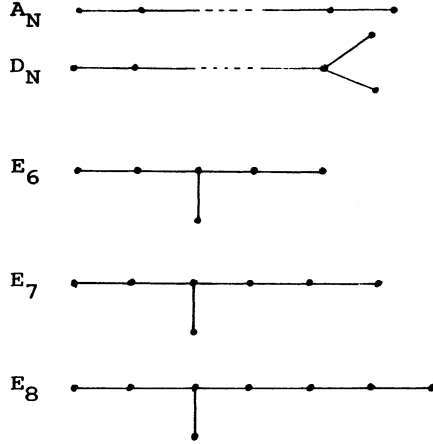
$$(C_i + C_j)^2 \leq 0 \implies C_i \cdot C_j \text{ borné supérieurement pour } i \neq j.$$

Donc on n'a qu'un nombre fini de possibilités pour Γ .

Quel que soit $j = 1, \dots, t$, la forme intersection sur Θ_j est définie négative. Admettons le résultat suivant :

LEMME 4.6. Θ_j est l'un des diagrammes A_N, D_N, E_6, E_7, E_8 .

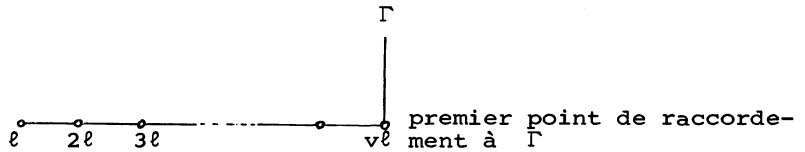
PINCEAUX DE COURBES DE GENRE AU MOINS DEUX I



Puisque X est connexe, $\Theta_j \cdot \Gamma > 0$ pour $j = 1, \dots, t$.

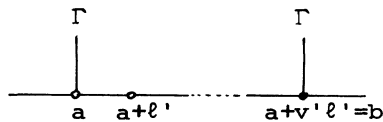
D'autre part, $0 = X \cdot \Gamma = \Gamma \cdot \Gamma + \sum_{j=1}^t \Theta_j \cdot \Gamma$, donc t est borné ainsi que $\Theta_j \cdot \Gamma$ pour $j = 1, \dots, t$, donc les multiplicités des sommets de raccordement de Θ_j à Γ ainsi que le nombre de ces sommets, sont bornés. Dans le cas où $\Theta_j = E_6$, E_7 ou E_8 , les multiplicités des autres sommets sont aussi bornées (on utilise ici la propriété b) : si $C_i^2 = -2$, $2r_i = \sum_{i \neq j} r_j (C_i \cdot C_j)$.

Il reste à voir que si $\Theta_j = A_N$ ou D_N , les multiplicités des sommets ainsi que la longueur N sont bornés. Faisons-le dans le cas de A_N (sur le dessin on indique sous chaque sommet sa multiplicité) :



vl est borné, donc v et l aussi ;

pour deux points de raccordement successifs :



a et b sont bornés :

- ou bien $\ell' \neq 0$, alors ℓ' et v' sont bornés
- ou bien $\ell' = 0$, on a alors une chaîne (*) et sa longueur est bornée.

Donc la longueur entre deux points de raccordement est bornée, d'où le résultat.

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.6. Soit donc Θ un graphe connexe formé de m courbes de la classe (ii). On lui associe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^m$ muni de la base $(e_1, \dots, e_m)$ défini par :

$$\begin{aligned} e_i \cdot e_j &= -\frac{1}{2}(C_i \cdot C_j) \text{ pour } i \neq j \\ e_i \cdot e_i &= +1 . \end{aligned}$$

Muni de ce produit scalaire, $\mathbb{R}^m$ est donc un espace euclidien. Le produit $e_i \cdot e_j$ est un cosinus qui prend ses valeurs dans $[-\frac{1}{2}, 1]$, il vaut donc 0 ou $-\frac{1}{2}$.

1°) Θ n'a pas de cycles.

Sinon il existe des e_{i_α} , $\alpha \in \mathbb{Z}/m'\mathbb{Z}$, $m' \ll m$, tels que $e_{i_\alpha} \cdot e_{i_{\alpha+1}} = -\frac{1}{2}$.

Soit $x = \sum_{\alpha} e_{i_\alpha}$

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha} e_{i_\alpha}^2 + 2 \sum_{\alpha < \alpha'} e_{i_\alpha} \cdot e_{i_{\alpha'}} = m' + 2m'(-\frac{1}{2}) = 0$$

ce qui est impossible car les e_{i_α} sont indépendants.

2°) Les points de branchement sont d'ordre au plus 3 .

Soit i fixé, $J = \{j; e_i \cdot e_j \neq 0\}$

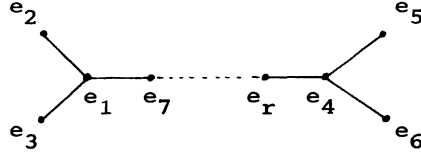
pour j, j' dans J , $j \neq j'$, $e_j \cdot e_{j'} = 0$ car Θ n'a pas de cycle.

Soit F le sous-espace engendré par les $(e_j, j \in J)$ qui en constituent une base orthonormée.

$$\begin{aligned} (e_i, F) &= 1 - \sum_{j \in J} (e_i \cdot e_j)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4} \text{card } J > 0 \implies \text{card } J \leq 3 . \end{aligned}$$

3°) Il y a au plus un point de branchement d'ordre 3 .

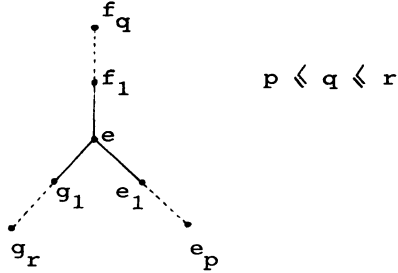
Supposons qu'il y en ait deux :



$$x = 2(e_1 + e_4 + e_7 + \dots + e_r) + e_2 + e_3 + e_5 + e_6$$

$$\|x\|^2 = 4(r-4+4) - [8+8+4(r-7)] = 0 \text{ ce qui est impossible.}$$

4°) S'il y a un sommet d'ordre 3



$$x = e_p + 2e_{p-1} + \dots + pe_1$$

$$y = f_q + 2f_{q-1} + \dots + qf_1$$

$$z = g_r + 2g_{r-1} + \dots + rg_1$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^p [k^2 - (k-1)k] = \frac{p(p+1)}{2} \text{ et } e \cdot x = -\frac{p}{2}.$$

Soit $V(x, y, z)$ l'espace engendré par x, y, z , dont $(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}, \frac{z}{\|z\|})$ est une base orthonormée.

$$\begin{aligned} d(e, V(x, y, z))^2 &= 1 - [(e \cdot \frac{x}{\|x\|})^2 + (e \cdot \frac{y}{\|y\|})^2 + (e \cdot \frac{z}{\|z\|})^2] \\ &= 1 - \frac{1}{2} [1 - \frac{1}{p+1} + 1 - \frac{1}{q+1} + 1 - \frac{1}{r+1}] \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} [\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1}] \end{aligned}$$

donc $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1$.

On en déduit alors $p=1$, $q=1$ ou 2 , et si $q=2$, $2 \leq r \leq 4$.

4.7. Classification des modèles de courbes elliptiques.

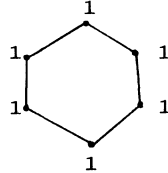
On se propose d'étudier maintenant les types admissibles de genre 1 , sans composante exceptionnelle. La démonstration est analogue à celle du lemme 4.6 et nous nous contenterons d'énoncer les résultats qui sont classiques [5].

Remarquons que $g = 1 = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i k_i$, donc les r_i ne sont déterminés qu'à multiplication près par une constante non nulle, et nous supposons dans ce qui suit $\text{pgcd}(r_i) = 1$. Sur les dessins, le nombre qui figure en un sommet est sa multiplicité. Soit $\mathcal{G}$ le graphe du type étudié.

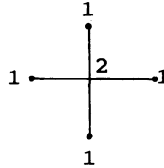
1°) Il existe une composante C de genre 1. Alors $n=1$ et $X=C$.

2°) Toutes les composantes sont de la classe (ii).

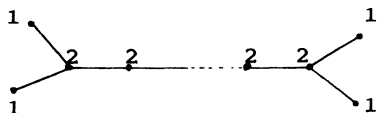
- Si $\mathcal{G}$ a des cycles c'est un polygone convexe. Tous les sommets ont même multiplicité.



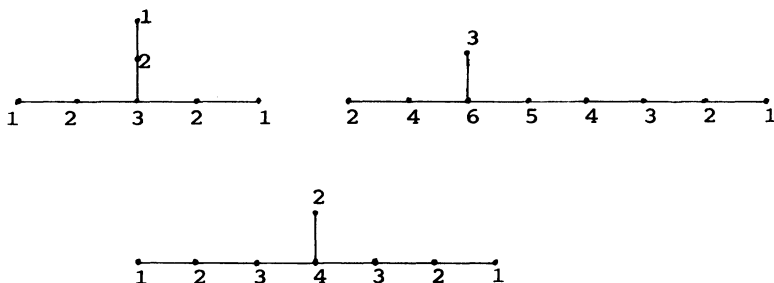
- Si $\mathcal{G}$ a des points de branchement d'ordre au moins 4 , on est dans le cas suivant :



- Si $\mathcal{G}$ n'a pas de point de branchement d'ordre 4, et plusieurs points de branchement d'ordre 3, on est dans le cas suivant :



- Si $\mathcal{Q}$ a un seul sommet d'ordre 3, on est dans un des cas suivants :



REMARQUE 4.8. Il n'est pas évident que tous les types trouvés soient géométriques.

COROLLAIRE 4.9. Soit m un entier fixé. Il n'existe qu'un nombre fini de types de genre 1, sans chaîne (*) de longueur supérieure à m , tels que $\text{pgcd}(r_i) = 1$.

DÉFINITION 4.10. Soient c un entier positif, G un groupe abélien de type fini. On définit $\rho_c(G)$ par $\rho_c(G) = \inf\{r ; \exists \text{ un sous-groupe de } G \text{ à } r \text{ générateurs d'indice fini divisant } c\}$.

PROPOSITION 4.11. Soient $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ une suite exacte de groupes abéliens de type fini, c et d deux entiers.

$$\begin{aligned} \text{Alors} \quad \rho_{cd}(A) &\leq \rho_c(A') + \rho_d(A'') \\ \rho_c(A) &\geq \rho_c(A'') \end{aligned}$$

et si la suite est scindée, $\rho_{cd}(A) = \rho_c(A') + \rho_d(A'')$.

LEMME 4.12. Soient T un type admissible, L le groupe abélien libre engendré par les C_i , L^* son dual et $\{x_i\}$ la base duale (notations

de 3.1) G le groupe de rang 1 associé et c un entier positif.

Alors $\rho_{cr_1}(G/(x_1)) \leq \rho_c(G) - 1$.

DÉMONSTRATION. $L \xrightarrow{\mu} L^* \longrightarrow G = \text{Coker } \mu \longrightarrow 0$

$$C_i \longmapsto (C_i, \cdot).$$

Soit $w: L^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ défini par $w(x_i) = r_i$

$$w \circ \mu(C_i) = \sum_{j=1}^n m_{ij} r_j = X \cdot C_i = 0$$

donc w se factorise par G :

$$\begin{array}{ccc} L^* & \longrightarrow & G \\ & \searrow w & \downarrow v \\ & & \mathbb{Z} \end{array} \quad v(\bar{x}_i) = r_i$$

De plus, v est nul sur la partie de torsion G_{tor} de G , donc se factorise par G/G_{tor}

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G_{\text{tor}} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/G_{\text{tor}} \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & \searrow v & & \downarrow \bar{v} \\ & & & & & & \mathbb{Z} \end{array}$$

et $\bar{v}$ est la multiplication par $d = \text{pgcd}(r_i)$. Donc l'image de x_i dans G/G_{tor} est égale à $\frac{r_i}{d}$.

Quotientons la suite exacte précédente par x_1 . On obtient :

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G/(x_1) \longrightarrow \mathbb{Z}/\left(\frac{r_1}{d}\right) \longrightarrow 0$$

où H est un quotient de G_{tor} , d'où $\rho_c(H) \leq \rho_c(G_{\text{tor}}) = \rho_c(G) - 1$

$$\rho_{cr_1}(G/(x_1)) \leq \rho_c(H) + \rho_{r_1}\left(\mathbb{Z}/\left(\frac{r_1}{d}\right)\right) = \rho_c(H) \leq \rho_c(G) - 1.$$

THÉOREME 4.13. Il existe un entier $c(g)$ ne dépendant que de g tel que, si T est un type admissible de genre g sans composante exceptionnelle $G(T)$ le groupe associé et $\beta(T)$ le premier nombre de Betti du graphe $\mathcal{G}(T)$ on ait :

$$\rho_{c(g)}(G(T)) \leq 1 + \beta(T).$$

LEMME 4.14. Soit T un type admissible de genre g tel que C_n soit une courbe exceptionnelle. Supposons de plus $m_{n,n-1} = 1$ et $m_{n,i} = 0$ $\forall i = 1, \dots, n-2$. Le type T' défini par les $(n-1)$ courbes $C_1, \dots, C_{n-1}$ et les entiers :

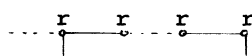
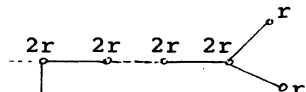
$$\begin{cases} m'_{ij} = m_{ij} + m_{in} m_{jn} & i, j \in [1, n-1] \\ k'_i = k_i - m_{in} & i \in [1, n-1] \\ r'_i = r_i & i \in [1, n-1] \end{cases}$$

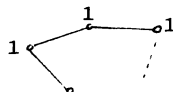
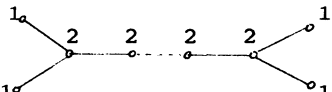
est un type admissible de genre g , $G(T) \approx G(T')$ et $\beta(T) = \beta(T')$.

REMARQUE 4.15. Si T est un type géométrique, T' est le type géométrique obtenu en contractant C_n .

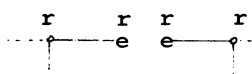
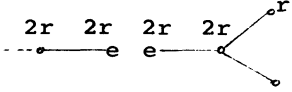
DÉMONSTRATION DU THÉOREME 4.13. La démonstration de [2] ne nous semblant pas très claire, nous avons préféré adopter la modification proposée par J.-F. Boutot [13].

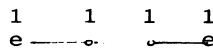
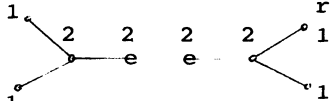
Soit T un type de genre g sans courbe exceptionnelle et tel que $\text{pgcd}(r_i) = 1$ (on ne change ni $G(T)$, ni $\beta(T)$ en multipliant tous les r_i par une constante). Supposons que T possède n chaînes $(*)$ ($n \gg 0$) notées $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ de longueur au moins 3. Ces chaînes sont de la forme suivante :

si $g \gg 2$:  ou  (1)

si $g = 1$:  ou  (1')

Considérons les types T_j ($j = 0, 1, \dots, n$), $T_0 = T$, obtenus en remplaçant dans T les chaînes $\Sigma_1, \dots, \Sigma_j$ par les configurations suivantes :

si $g \gg 2$:  ou  (2)

si $g = 1$:  ou  (2')

où e désigne une courbe exceptionnelle. Soit w_j l'ensemble des composantes connexes du type T_j .

Soit T'_n le type obtenu en remplaçant dans T les n chaînes $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ par des chaînes ayant exactement 4 sommets de la classe (ii). C'est un type admissible de genre g sans composante exceptionnelle. D'après le théorème 4.5, il appartient à un ensemble fini de types. Par suite les composantes connexes de T'_n appartiennent aussi à un ensemble fini de types. Il existe donc une constante c , ne dépendant que de g , qui vérifie les conditions du théorème pour chacun des éléments de W_n .

Soit s_j ($j \in [1, n]$) la multiplicité commune des sommets de Σ_j . Nous allons montrer par récurrence descendante que la constante c_j ($j \in [0, n]$) définie par

$$\begin{aligned} c_n &= c \\ c_j &= c^{2^{n-j}} (s_n^{2^{n-j+1}} s_{n-1}^{2^{n-j+2}} \dots s_{j+1})^3 \quad \text{pour } j \in [0, n-1] \end{aligned}$$

vérifie les conditions du théorème pour les éléments de W_j .

Soit θ un élément de W_{j-1} . Si θ ne contient pas la chaîne Σ_j , θ appartient à W_j . Supposons donc que θ contienne Σ_j et coupons la chaîne Σ_j en deux temps :

a) Soit θ' un type obtenu à partir de θ en introduisant des courbes exceptionnelles en deux sommets consécutifs de la chaîne Σ_j

passant de :

$$\begin{array}{c} C_3 \quad C_1 \quad C_2 \quad C_4 \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \quad \begin{aligned} m_{11} &= m_{22} = m_{33} = m_{44} = -2 \\ r_1 &= r_2 = r_3 = r_4 = s_j \end{aligned}$$

à :

$$\begin{array}{c} C'_3 \quad C'_1 \quad C'_2 \quad C'_4 \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{aligned} m'_{11} &= m'_{22} = -1 & m'_{21} &= 0 & m'_{ij} &= m_{ij} & \text{si } (i, j) \neq (1, 2) & \text{et } (i, j) \neq (2, 1) \\ k'_i &= k_i - 1 = -1 & \text{si } i &= 1, 2 & k'_i &= k_i & \text{si } i \neq 1, 2 \\ r'_i &= r_i & i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \right.$$

a.1) θ' connexe $\beta(\theta') = \beta(\theta) - 1$.

$$G = G(\theta) = L^*/M \quad G' = G(\theta') = L^*/M'$$

où M est engendré par : $\{(\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j)_{i \neq 1,2}, x_3 - 2x_1 + x_2, x_1 - 2x_2 + x_4\}$

et M' est engendré par : $\{(\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j)_{i \neq 1,2}, x_3 - x_1, x_4 - x_2\}$

donc $M' \subset M + (x_1 - x_2)\mathbb{Z}$

et $\rho_{c_j}(G) \leq \rho_{c_j}(G/x_1 - x_2) + 1 \leq \rho_{c_j}(G') + 1$.

a.2) $\theta' = \theta_1 \cup \theta_2$, θ_1 et θ_2 connexes, $\beta(\theta_1) + \beta(\theta_2) = \beta(\theta)$.

$$G = G(\theta) = L^*/M \quad G' = G(\theta') = L^*/M' = G(\theta_1) \oplus G(\theta_2) = G_1 \oplus G_2.$$

Soient u et u' les deux homomorphismes de L dans L^* correspondant à θ et θ' . Pour tout $k=1, \dots, n$ $X_1.C_k = 0$ donc $u'(X_1) = 0$

$$X_1 = r_1 C_1 + \sum_{\substack{C_j \in \theta_1 \\ j \neq 1}} r_j C_j$$

$$0 = u'(X_1) = r_1(x_3 - x_1) + \sum_{\substack{C_j \in \theta_1 \\ j \neq 1}} r_j u(C_j) \quad \text{car } u(C_j) = u'(C_j) \text{ pour } C_j \in \theta_1, j \neq 1$$

donc $r_1(x_3 - x_1) \in M$

et puisque $u(C_1) = x_3 - x_1 + x_2 - x_1 \in M$, $r_1(x_2 - x_1) \in M$

donc $M + (x_1, x_2)/M$ est un quotient de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/r_1\mathbb{Z}$.

On a une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M + (x_1, x_2)/M & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/(x_1, x_2) \longrightarrow 0 \\ & & & & & \downarrow & \\ & & & & & G/(x_1, x_2) & \xrightarrow{\sim} G_1/x_1 \oplus G_2/x_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{alors } \rho_{c_j r_1^3}^{2,3}(G) &\leq \rho_{r_1}(M + (x_1, x_2)/M) + \rho_{c_j r_1^2}^{2,2}(G/(x_1, x_2)) \\ &\leq 1 + \rho_{c_j r_1}(G_1/x_1) + \rho_{c_j r_1}(G_2/x_2) \\ &\leq 1 + \rho_{c_j}(G_1) + \rho_{c_j}(G_2) - 2. \end{aligned}$$

b) Soit θ'' obtenu à partir de θ' en contractant les courbes exceptionnelles introduites en a) jusqu'à obtenir la configuration (2) ou (2'). D'après le lemme 4.14, on ne change ni le groupe G ni le premier nombre de Betti du graphe. Les composantes connexes de θ'' appartiennent à W_j , on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et en déduire :

$$\text{dans le cas a.1) : } \rho_{c_j}(G') \leq 1 + \beta(\theta')$$

$$\text{et } \rho_{c_j}(G) \leq 1 + \beta(\theta)$$

$$\text{dans le cas a.2) : } \rho_{c_j}(G_1) + \rho_{c_j}(G_2) \leq 2 + \beta(\theta_1) + \beta(\theta_2)$$

$$\text{et } \rho_{c_j s_j^3}(G) \leq 1 + \beta(\theta) .$$

En particulier, $c_o = c^{2^n} (s_n^{2^{n-1}} s_{n-1}^{2^{n-2}}, \dots, s_1)^3$ vérifie les conditions du théorème pour $T_o = T$, la constante c ne dépendant que de g . Puisque le nombre et la multiplicité des sommets des chaînes (*) sont bornés, on conclut à l'existence d'une constante vérifiant les conditions du théorème pour tous les types de genre g sans composante exceptionnelle.

THÉOREME 4.16. Il existe un entier $N(g)$ ne dépendant que de g tel que pour tout anneau de valuation discrète R de corps de fractions K à corps résiduel k algébriquement clos, pour tout R -schéma régulier V , propre et plat sur k , dont la fibre générique est une courbe lisse de genre g , et dont la fibre spéciale $X = \sum_{i=1}^n r_i C_i$ est connexe, avec $\text{pgcd}(r_i) = 1$, la propriété suivante est réalisée: si pour un nombre premier $q > N(g)$, distinct de la caractéristique de k , les points de ${}^q\text{Pic } V_K$ sont rationnels sur K , alors $\text{Pic}^o X/k$ a un radical unipotent nul.

DÉMONSTRATION. On peut supposer R complet, puisque le passage de R à son complété ne change ni les hypothèses, ni la conclusion.

$\text{Pic}^o X/k$ est extension d'une variété abélienne de dimension a par le produit d'un tore de dimension m et d'un groupe unipotent de dimension u

$$g = a + m + u .$$

On a vu (Corollaire 3.3) que pour tout entier q premier à la caractéristique, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_q\text{Pic}^0 X \longrightarrow {}_q\text{Pic } V_K \longrightarrow {}_qG \longrightarrow 0.$$

Sous les hypothèses du théorème (les points de ${}_q\text{Pic } V_K$ sont rationnels sur K)

$$\dim_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} {}_q\text{Pic } V_K = 2g$$

$$\dim_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} {}_q\text{Pic}^0 X = 2a + m$$

donc

$$\dim_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} {}_qG = m + 2u.$$

Soit $c = c(g)$ la constante trouvée dans le théorème 4.13, et supposons $q \nmid c$. Il existe un sous-groupe H de G engendré par $\rho_c(G)$ générateurs, et dont l'indice divise c , donc est premier à q , donc ${}_qG = {}_qH \subset H_{\text{tor}}$. Le sous-groupe H_{tor} est engendré par au plus $\rho_c(G) - 1$ éléments, donc

$$\dim_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} {}_qG = \dim_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} {}_qH \leq \rho_c(G) - 1 \leq \beta(T).$$

On a vu (Proposition 4.3) que $\beta = \dim \text{Ker} (\text{Pic}^0 X_{\text{red}} \rightarrow \text{Pic}^0 \mathbb{A}^1_{C_i})$ et puisque $\mathbb{A}^1_{C_i} \rightarrow X_{\text{red}}$ est propre et surjectif, ce noyau est affine

[9] donc sa dimension est au plus $m+u$.

D'où $m+2u \leq \beta(T) \leq m+u$ c'est-à-dire $u=0$.

COROLLAIRE 4.17. Soient R un anneau de valuation discrète de corps de fractions K , corps résiduel k , C une courbe propre et lisse géométriquement connexe sur K de genre $g \geq 2$. Il existe une extension finie K' de K telle que si R' est un localisé de la fermeture intégrale de R dans K' , $C \times_K K'$ a réduction semi-stable sur R' .

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer que les points de ${}_q\text{Pic } V_K$ sont rationnels sur K et que C a un point rationnel (dans ce cas, avec les notations de 2.5, $V \rightarrow S$ possède une section, donc l'un des r_i vaut 1).

D'autre part, il existe un anneau local noethérien R' fidèlement plat non ramifié sur R , limite inductive filtrante d'anneaux locaux R_i finis sur R (R' et les R_i sont donc des anneaux de valuation discrète) dont le corps résiduel k' est la clôture algébrique du corps résiduel k de R [4]. Soit K' son corps de fractions. D'après le théorème 4.16, $\mathbb{C} \times_K K'$ a réduction semi-stable sur R' . Mais un modèle semi-stable de $\mathbb{C} \times_K K'$ sur R' est déjà défini sur une extension finie R_i de R , d'où le résultat.

5. Rapport avec les jacobiniennes.

Nous gardons les mêmes notations : R est un anneau de valuation discrète, de corps de fractions K , corps résiduel k , $S = \text{Spec } R$. Soit A une variété abélienne sur K .

DÉFINITION 5.1. Un modèle de Néron de A est un S -schéma en groupes lisses $\mathcal{A}$ qui prolonge A , et universel pour cette propriété, en ce sens que pour tout S -schéma lisse Y , on a un isomorphisme fonctoriel en Y :

$$\text{Hom}_S(Y, \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_K(Y \times_S K, A) .$$

Néron [7] dans le cas où k est parfait, et Raynaud [9] dans le cas général, ont montré l'existence du modèle de Néron. Il est bien sûr unique à S -isomorphisme unique près, et il est séparé sur S .

PROPOSITION 5.2 [9]. Le modèle de Néron commute au changement de base étale, au passage au hensélisé et au hensélisé strict.

DÉFINITION 5.3. A a réduction semi-stable sur R s'il existe un S-schéma en groupes lisse qui prolonge A et qui est de rang unipotent nul. Un tel schéma est un modèle semi-stable de A sur R.

PROPOSITION 5.4. A a réduction semi-stable sur R si et seulement si la fibre spéciale de son modèle de Néron est de rang unipotent nul.

DÉMONSTRATION. On peut supposer R hensélien.

Soient $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A, $\mathcal{A}'$ un modèle semi-stable de A, $\mathcal{A}'^0$ sa composante neutre (c'est-à-dire le schéma en groupes ouvert de $\mathcal{A}'$ dont les fibres sont les composantes neutres des fibres de $\mathcal{A}'$). D'après la propriété universelle du modèle de Néron, il existe un S-morphisme $\mathcal{A}'^0 \rightarrow \mathcal{A}$.

Soit ℓ un entier premier à la caractéristique de k. Puisque R est hensélien et $\mathcal{A}'^0$ étale et séparé sur R tout point d'ordre ℓ de la fibre spéciale de $\mathcal{A}'^0$ se prolonge en un point d'ordre ℓ de $\mathcal{A}'^0$, donc le morphisme $\mathcal{A}'^0 \rightarrow \mathcal{A}$ est une injection sur les points d'ordre ℓ . Son noyau n'a pas de point d'ordre ℓ et est de rang unipotent nul, donc il est de dimension nulle. Alors $\mathcal{A}'^0 \rightarrow \mathcal{A}$ est plat, à noyau plat de dimension nulle et de fibre générique nulle, et par suite $\mathcal{A}'^0 \rightarrow \mathcal{A}$ est une immersion ouverte, donc $\mathcal{A}'^0$ s'identifie à $\mathcal{A}^0$.

COROLLAIRE 5.5. Si A a réduction semi-stable, la composante neutre de son modèle de Néron commute à tout changement de base.

Dans toute la suite, on supposera désormais que le corps résiduel k est algébriquement clos.

On a un résultat analogue à celui qu'on a démontré pour les courbes de genre ≥ 2 , et qui peut d'ailleurs se déduire du théorème d'Artin-Winters :

THÉORÈME 5.6. Soit A une variété abélienne sur K. Il existe une extension finie K' de K telle que, si R' est un localisé de la clôture intégrale de R dans K', $A' = A \times_K K'$ a réduction semi-stable sur R'.

La proposition suivante va établir le lien entre ces deux notions de réduction semi-stable.

PROPOSITION 5.7. Soient C une courbe propre et lisse sur K , de genre $g \geq 2$, J sa Jacobienne. Alors C a réduction semi-stable sur R si et seulement si J a réduction semi-stable sur R .

On utilisera le résultat suivant dû à Raynaud :

THÉOREME 5.8 [9]. Soient $\mathcal{J}$ le modèle de Néron de J sur R , $\mathcal{J}^O$ sa composante neutre, V le modèle régulier minimal de C sur R ,

$X = \sum_{i=1}^n r_i C_i$ sa fibre spéciale. Si $\text{pgcd}(r_i) = 1$, $\mathcal{J}^O$ représente le foncteur $\text{Pic}^O V/S$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.7. Supposons que C ait réduction semi-stable. Soient $X = \sum_{i=1}^n C_i$ la fibre spéciale, et $\tilde{X}$ sa normalisée, $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$ les points de $\tilde{X}$ au-dessus des points singuliers de X .

D'après le théorème 5.8, $\text{Pic}^O(X/k) = \mathcal{J}^O \times_S k$.

On a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}^* \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Sigma} k^* \longrightarrow 1$$

où la flèche $\mathcal{O}_{\tilde{X}}^* \longrightarrow \prod_{\alpha} k^*$ est définie par : $a \longmapsto \left(\frac{a(x_\alpha)}{a(y_\alpha)} \right)_{\alpha \in \Sigma}$

d'où : $\prod_{\alpha} k^* \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{X*}) \longrightarrow H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}^*) \longrightarrow 0$

donc $\text{Pic}^O X/k$ est extension d'une variété abélienne par un tore.

Inversement, supposons que J ait réduction semi-stable, si $C(K) \neq \emptyset$, alors $\text{pgcd}(r_i) = 1$ donc le théorème 5.8 s'applique, $\text{Pic}^O X/k$ est de rang unipotent nul et X est semi-stable d'après le théorème 2.8. Dans le cas général, il existe donc une extension finie K' de K telle que $C \times_K K'$ ait réduction semi-stable sur R' , clôture intégrale de R dans K' (qui est locale puisque R est hensélien).

Soit $S' = \text{Spec } R'$, $V' \longrightarrow S'$ un modèle stable de $C \times_K K'$.

$$u_1, u_2 : \text{Spec } K' = \text{Spec } K' \otimes_K K' \rightrightarrows \text{Spec } K'$$

$$v_1, v_2 : \text{Spec } R' = \text{Spec } R' \otimes_R R' \rightrightarrows \text{Spec } R'.$$

On va construire un isomorphisme entre $v_1^*(V') = V_1''$ et $v_2^*(V') = V_2''$ qui prolonge celui qui existe sur K'' . La condition des cocycles sera automatiquement vérifiée puisque π , uniformisante de R , n'est pas diviseur de 0 dans V' .

Puisque $\mathcal{I}^0$ commute au changement de base, il existe un isomorphisme :

$$\psi : \text{Pic } V_1''/R'' \longrightarrow \text{Pic } V_2''/R''$$

qui prolonge l'isomorphisme défini au-dessus de K'' .

Soit T le sous-schéma fermé de $\text{Isom}_{R''}(V_1'', V_2'')$ formé des isomorphismes qui induisent ψ . Nous allons utiliser les propriétés suivantes des courbes stables, que nous ne démontrerons pas :

PROPOSITION 5.9 [3]. 1°) $\text{Isom}_{R''}(V_1'', V_2'')$ est représentable par un schéma fini et net sur R'' .

2°) Soient k un corps algébriquement clos, X une courbe stable sur k , de genre $g \geq 2$. Alors $\text{Aut}_k X \longrightarrow \text{Aut}_k \text{Pic}^0 X$ est une injection.

On en déduit que T est fini, net et radiciel sur S'' , donc $T \longrightarrow S''$ est un isomorphisme puisque c'en est un sur les fibres génériques. Donc V' se redescend.

Nous allons maintenant préciser sur quelle extension de K on a réduction semi-stable. Les résultats qui suivent nous ont été communiqués oralement par M. Raynaud. Ils sont "bien connus des spécialistes" et s'inspirent de l'article de J.-P. Serre et J. Tate "Good reduction of abelian varieties" [1].

Dans toute la suite, nous supposons R strictement hensélien, à corps résiduel algébriquement clos.

PROPOSITION 5.10. Soit A une variété abélienne sur K . Il existe une extension finie galoisienne K' de K telle que si R' est un localisé de la clôture intégrale de R dans K' , $A \times_K K'$ a réduction semi-stable sur R' .

DÉMONSTRATION. Soient $K \longrightarrow K'$ une extension radicielle, R' la clôture intégrale de R dans K' (qui est un anneau local strictement hensélien) et supposons que le modèle de Néron $\mathcal{A}'$ de

$A' = A \times_K K'$ sur R' soit de rang unipotent nul. Les notations étant les mêmes que celles utilisées dans la démonstration de la proposition 5.7, nous allons construire un isomorphisme de $v_1^*(\mathcal{A}'^{\circ}) = \mathcal{A}_1''$ dans $v_2^*(\mathcal{A}'^{\circ}) = \mathcal{A}_2''$, qui prolonge l'isomorphisme générique

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathcal{A}_1'' \times_{R''} K'' & \longrightarrow & \mathcal{A}_2'' \times_{R''} K'' \\ \parallel & & \parallel \\ u_1^* A' & & u_2^* A' \end{array}$$

ce qui nous permettra de redescendre $\mathcal{A}'^{\circ}$ de R' à R .

Pour tout entier ℓ premier à la caractéristique de k , le sous-schéma $\ell \mathcal{A}'^{\circ}$ des points d'ordre ℓ de $\mathcal{A}'^{\circ}$ est quasi-fini sur R' , donc décomposé en une partie finie étale $\ell \mathcal{A}'$ et une partie $\ell \mathcal{A}'$ contenue dans la fibre générique.

Soit $\ell \mathcal{A}_i'' = v_i^*(\ell \mathcal{A}')$ pour $i=1,2$. Le foncteur $\underline{\text{Hom}}_{R''}(\ell \mathcal{A}_1'', \ell \mathcal{A}_2'') = \ell \mathcal{H}''$ est représentable par un R' -schéma fini étale.

Sur la partie générique ψ induit un isomorphisme $\ell \mathcal{A}_1'' \times_{R''} K'' \longrightarrow \ell \mathcal{A}_2'' \times_{R''} K''$ qui correspond à un point σ de $\ell \mathcal{H}''$ à valeur dans K'' . Puisque K' est radiciel sur K , $K''_{\text{red}} = K'$ et $R''_{\text{red}} = R'$. On a donc :

$$\begin{array}{ccc} & & \ell \mathcal{H}'' \\ & \nearrow \sigma & \downarrow \\ \text{Spec } K'' & \longleftrightarrow & \text{Spec } R'' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Spec } K''_{\text{red}} = \text{Spec } K' & \longleftrightarrow & \text{Spec } R''_{\text{red}} = \text{Spec } R' \end{array}$$

Par le critère valuatif de propreté, on prolonge $\sigma|_{K''_{\text{red}}}$ en une section $\sigma' : \text{Spec } R''_{\text{red}} \longrightarrow \ell \mathcal{H}''$. Ce dernier schéma étant étale sur R'' , cette section se relève en une section $\text{Spec } R'' \longrightarrow \ell \mathcal{H}''$. Donc $\ell \mathcal{A}'$ et aussi $\ell \mathcal{A}'^{\circ}$ se redescendent à R . On termine grâce au lemme :

LEMME 5.11. Si pour tout ℓ premier à la caractéristique de k , $\ell \mathcal{A}'^{\circ}$ se redescend sur R , alors $\mathcal{A}'^{\circ}$ se redescend sur R .

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A sur R . Il existe un S^1 -morphisme : $\mathcal{A}^{\circ} \times_S S^1 \longrightarrow \mathcal{A}'$ qui est un isomorphisme sur les fibres génériques.

Soit ℓ^B le S -schéma en groupes tel que :

$$\ell^{\mathcal{A}^0} = \ell^B \times_S S'.$$

D'après la propriété universelle des modèles de Néron, il existe un S -morphisme $\ell^B \rightarrow \mathcal{A}^0$ et le morphisme composé :

$$\ell^{\mathcal{A}^0} = \ell^B \times_S S' \rightarrow \mathcal{A}^0 \times_S S' \rightarrow \mathcal{A}'$$

est l'injection de $\ell^{\mathcal{A}^0}$ dans $\mathcal{A}'$, donc l'image de $\mathcal{A}^0 \times_S S' \rightarrow \mathcal{A}'$ contient les points d'ordre ℓ pour tout ℓ premier à la caractéristique, c'est donc la composante neutre $\mathcal{A}'^0$. La partie unipotente de $\mathcal{A}^0 \times_S S'$ est contenue dans le noyau qui est de dimension nulle, donc A a réduction semi-stable et $\mathcal{A}'^0 = \mathcal{A}^0 \times_S S'$.

5.12. Soit $K \rightarrow K'$ une extension finie galoisienne telle que $A \times_K K'$ ait réduction semi-stable sur R' (clôture intégrale de R dans K'). Avec les notations de la démonstration de la proposition 5.10, soient ℓ un entier premier à la caractéristique de k , et $\ell^{\mathcal{B}'}$ la partie finie de $\ell^{\mathcal{A}'^0}$. Soit $\ell^E = \ell^{\mathcal{B}'} \times_{R'} K'$.

LEMME 5.13. Il existe un sous- K -schéma ℓ^E de ℓ^A tel que $\ell^E = \ell^E \times_K K'$.

DÉMONSTRATION. Soient $G = \text{Gal}(K'/K)$, $d = \text{card } G$.

Pour tout élément g de G , le carré :

$$\begin{array}{ccc} R'' = R' \otimes_R R' & \xrightarrow{1 \otimes g} & R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ K'' = K' \otimes_K K' & \xrightarrow{1 \otimes g} & K' \end{array}$$

commute et induit :

$$\begin{array}{ccc} R'' & \longrightarrow & R'^d \simeq \widetilde{R''} \text{ (normalisé de } R'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ K'' & \xrightarrow{\sim} & K'^d. \end{array}$$

Pour montrer que E'_ℓ se redescend, il suffit de voir que

$$\psi : v_1^*(\ell^{\mathcal{A}'}) \otimes_{R''} K'' \rightarrow v_2^*(\ell^{\mathcal{A}'}) \otimes_{R''} K''$$

induit un K'' -isomorphisme $u_1^*(E'_\ell) \rightarrow u_2^*(E'_\ell)$, ce qui provient du fait que $K'' \simeq K'^d$.

REMARQUE 5.14.- On vérifie que E_ℓ ne dépend pas de l'extension K' .

THÉOREME 5.15. Soit R un anneau strictement hensélien de corps de fractions K , corps résiduel k . Soient ℓ un entier ≥ 3 , premier à la caractéristique de k , A une variété abélienne sur K , E_ℓ le sous-schéma de ${}_\ell A$ défini au lemme 5.13.

Alors A a réduction semi-stable si et seulement si les points de E_ℓ sont rationnels sur K .

DÉMONSTRATION. Supposons que A a réduction semi-stable sur R . Soient $\mathcal{A}$ son modèle de Néron, $\bar{\mathcal{A}}$ sa fibre spéciale. Puisque R est strictement hensélien, ${}_\ell \bar{\mathcal{A}}(k) \simeq E_\ell(K)$ donc tous les points de E_ℓ sont rationnels sur K .

Inversement, supposons que les points de E_ℓ soient rationnels sur K . Il existe une extension finie galoisienne K' de K , de groupe de Galois G , telle que $A \times_K K'$ ait réduction semi-stable sur R' , clôture intégrale de R dans K' . Soit k' le corps résiduel de R' .

LEMME 5.16. Le groupe de Galois G agit sur la fibre spéciale $\bar{\mathcal{A}}'^0$ et cette action est triviale si et seulement si $\bar{\mathcal{A}}'^0$ se redescend sur R .

DÉMONSTRATION. Pour tout élément g de G , on a un morphisme $g^* \bar{\mathcal{A}}'^0 \rightarrow \bar{\mathcal{A}}'^0$ compatible avec l'action de g sur R' , qui induit un k' -morphisme $\bar{\mathcal{A}}'^0 \rightarrow \bar{\mathcal{A}}'^0$ (car G agit trivialement sur k'). Si $\bar{\mathcal{A}}'^0$ se redescend, cette action est évidemment triviale.

Inversement supposons cette action triviale. Pour tout entier q premier à la caractéristique de k , on définit $\mathcal{A}''_1$ et $\mathcal{A}''_2$, et comme à la proposition 5.10, on construit un morphisme

$\text{Spec } \tilde{R}'' \xrightarrow{\tau} {}_q \mathcal{H}'' = \underline{\text{Hom}}_{R''}({}_q \mathcal{A}''_1, {}_q \mathcal{A}''_2)$. On a donc

$$\begin{array}{ccc} & & {}_q \mathcal{H}'' \\ & \nearrow \tau & \downarrow \\ \text{Spec } \tilde{R}'' & \xrightarrow{\pi} & \text{Spec } R'' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Spec } k'^d & \longrightarrow & \text{Spec } k'' \end{array} .$$

Sur la fibre spéciale, on obtient d homomorphismes qui diffèrent par des automorphismes de ${}_q \bar{\mathcal{A}}'^0$, et on vérifie facilement que c'est l'ac-

tion de G sur la fibre fermée définie précédemment. Donc $\tau|_{k,d}$ se factorise à travers k' . La section $\bar{\tau}' : \text{Spec } k' \rightarrow \mathbb{A}^1_{k'}$ se relève alors en une section $\tau' : \text{Spec } R'' \rightarrow \mathbb{A}^1_{R''}$ et on vérifie que $\tau = \tau' \circ \pi$. On conclut en utilisant 5.11.

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉOREME 5.15. Si les points de E_ℓ sont rationnels sur K , l'action de G sur $E'_\ell(K')$ est triviale. Or ${}_\ell \mathbb{Z}'^0(k') \simeq E'_\ell(K')$, donc l'action de G sur ${}_\ell \mathbb{Z}'^0$ est triviale. On termine grâce au lemme 5.16 et au résultat suivant :

LEMME 5.17. Critère de Serre [10]. Soient H un k -schéma en groupes, extension d'une variété abélienne par un tore, u un endomorphisme d'ordre fini de H , ℓ un entier premier à la caractéristique de k , $\ell \gg 2$. Si $u-1$ est nul sur les points d'ordre ℓ de H , alors :

- ou bien $\ell = 2$ et $u^2 = 1$
- ou bien $\ell \gg 3$ et $u = 1$.

Le corollaire suivant est une conséquence triviale du théorème, mais vaut la peine d'être cité car il est plus utilisable en pratique.

COROLLAIRE 5.18. Soient K un corps, A une K -variété abélienne, ℓ un entier $\gg 3$, tel que les points de ${}_\ell A$ soient rationnels sur K . Pour tout anneau R d'une valuation discrète de K dont la caractéristique résiduelle est première à ℓ , A a réduction semi-stable sur R .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ABHYANKAR.- Resolution of Singularities of arithmetical surfaces. Proc. Conf. on Arith. Alg. Geom. at Purdue (1963).
- [2] M. ARTIN and G. WINTERS.- Degenerate fibers and reduction of curves. Topology vol. 10 (1971), p. 373-383.
- [3] P. DELIGNE and D. MUMFORD.- The irreducibility of the space of curves of given genus. Publ. Math. I.H.E.S. n° 36 (1969).
- [4] A. GROTHENDIECK.- E.G.A. III.1. Publ. Math. I.H.E.S. n° 11
- [5] K. KODAIRA.- On compact analytic surfaces. Analytic Functions. Princeton (1960).
- [6] J. LIPMAN.- Rational Singularities. Publ. Math. I.H.E.S. n° 36 (1969).
- [7] A. NERON.- Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux. Publ. Math. I.H.E.S. n° 21 (1964).
- [8] M. RAYNAUD.- Compactification du module des courbes. Séminaire Bourbaki n° 385 (1970).
- [9] M. RAYNAUD.- Spécialisation du foncteur de Picard. CRAS n° 264, p. 941 et p. 1001 (1967).
- Modèles de Néron. CRAS n° 262, p. 413 (1966).
- [10] J.-P. SERRE.- Rigidité du foncteur de Jacobi d'échelon n° 3 . Application à l'exposé 17 du séminaire Cartan 1960/61.
- [11] J.-P. SERRE and J. TATE.- Good reduction of Abelian Varieties. Ann. of Math. 88 (1968), p. 492-517.
- [12] I.R. SHAFAREVITCH.- Algebraic Surfaces. Publ. of the Steklov Institute of Mathematics.
- [13] J.-F. BOUTOT.- A propos de "degenerate fibers and stable reduction of curves".

Mireille DESCHAMPS
Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématique, bât. 425
91405 ORSAY

UN THÉOREME D'ANNULATION EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE

par Renée LEWIN-MENEGAUX

exposé n° 2

Le but de cet exposé est de démontrer le théorème suivant :

THÉOREME (Szpiro) [5]. Soient X une surface projective lisse, C une courbe projective lisse, $f : X \rightarrow C$ un morphisme à fibres géométriquement réduites de genre supérieur ou égal à 2.

Alors, pour tout faisceau inversible L , numériquement positif, de la forme $L = \omega_{X/C}^{\otimes m} \otimes f^* A$, où $\omega_{X/C}$ est le faisceau dualisant relatif, m un entier positif, et A un faisceau sur C , on a :

$$H^1(X, L^{\otimes -1}) = 0 .$$

Un faisceau inversible L sur une surface X est dit numériquement positif si on a les inégalités $(L^2) > 0$ et $L \cdot O_X(D) > 0$ pour toute courbe D tracée sur X .

On verra que si $f : X \rightarrow C$ est une fibration semi-stable non isotriviale, le faisceau dualisant relatif $\omega_{X/C}$ est numériquement positif (Szpiro, exposé n° 3). Le théorème ci-dessus entraîne donc en particulier que $H^1(X, \omega_{X/C}^{\otimes -1})$ est nul dans ce cas.

En caractéristique nulle, on connaît le théorème de Ramanujam [1], [2]:

THÉOREME. Soit X une surface projective lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et soit L un faisceau inversible numériquement positif.

Alors $H^1(X, L^{\otimes -1}) = 0 .$

En particulier si L est ample (ce qui est équivalent à $(L^2) > 0$, $L \cdot O_X(C) > 0$ pour toute courbe C sur X , d'après le théorème de Nakaï-Moishezon), on retrouve le théorème d'annulation de Kodaira.

Ce théorème est faux en caractéristique positive : un premier contre-exemple a été construit par M. Raynaud [3], et on en verra d'autres, trouvés par M. Raynaud et L. Szpiro, dans l'exposé 4 (M. Flexor) de ce séminaire.

Cependant, on donne ici des critères d'annulation de $H^1(X, L^{\otimes -1})$ en caractéristique positive.

Pour simplifier l'écriture, on notera à partir de maintenant L^n pour le faisceau $L^{\otimes n}$.

CRITÈRE. Soit X une variété projective lisse sur un corps k , de caractéristique p positive.

Soit L un faisceau inversible tel que :

$$H^0(X, L^{-p^n} \otimes \Omega_{X/k}^1) = 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$H^1(X, L^{-p^{n_0}}) = 0 \quad \text{pour un } n_0 \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Alors} \quad H^1(X, L^{-1}) = 0.$$

La démonstration utilise la proposition suivante :

PROPOSITION 1. Soit X une variété projective normale sur un corps k algébriquement clos de caractéristique p positive. Soit F l'endomorphisme de Frobenius de X .

Si E est un fibré vectoriel de rang fini sur X tel que $H^0(X, F^*E \otimes \Omega_X^1) = 0$, alors l'homomorphisme $H^1(X, E) \rightarrow H^1(X, F_*F^*E)$ est injectif.

Considérons l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules : $F_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} F_*\Omega_X^1$. Soit K son noyau. Puisque les différentielles des puissances p -ièmes sont nulles, on a une flèche $\mathcal{O}_X \rightarrow K$. Cette flèche est un isomorphisme aux points de lissité de X . De plus K est sans torsion, et $\mathcal{O}_X$ de profondeur au moins 2. Cette flèche est donc un isomorphisme partout.

Soit B l'image de d . On a la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & F_*\mathcal{O}_X & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\ & & & & \searrow d & & \downarrow \\ & & & & & & F_*\Omega_X^1 \end{array}$$

En tensorisant par E , on obtient la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E \otimes F_* \Omega_X^1 & \longrightarrow & E \otimes B \longrightarrow 0 \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & F_* F^* E & & . \end{array}$$

D'où la suite exacte :

$$H^0(X, E \otimes B) \longrightarrow H^1(X, E) \longrightarrow H^1(X, F_* F^* E) .$$

Or $H^0(X, E \otimes B)$ s'injecte dans $H^0(X, E \otimes F_* \Omega_X^1) = H^0(X, F_*(F^* E \otimes \Omega_X^1))$, qui est nul par hypothèse, et on en déduit la proposition.

COROLLAIRE. Si L est un faisceau inversible tel que

$$\begin{cases} H^0(X, L^{-p} \otimes \Omega_X^1) = 0 , \\ H^1(X, L^{-p}) = 0 \end{cases}$$

alors $H^1(X, L^{-1}) = 0$.

On obtient alors le critère par dévissage :

$$\left. \begin{array}{l} H^0(X, L^{-p} \otimes \Omega_X^1) = 0 \\ H^1(X, L^{-p}) = 0 \end{array} \right\} \implies H^1(X, L^{-p} \otimes \Omega_X^{n-1}) = 0$$

etc...

Pour les faisceaux numériquement positifs sur les surfaces, on peut énoncer la forme particulière suivante du critère d'annulation :

CRITÈRE. Soit X une surface projective lisse sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit L un faisceau inversible numériquement positif.

Alors si $H^0(X, L^{-p^n} \otimes \Omega_X^1) = 0 \quad \forall n \geq 1$, on a $H^1(X, L^{-1}) = 0$.

La seule chose à démontrer est l'annulation de $H^1(X, L^{-p^n})$ pour au moins une valeur de $n \geq 1$, ce qui sera assuré par la proposition suivante :

PROPOSITION 2. Soit X une surface projective lisse sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$.

Soit L un faisceau inversible numériquement positif.

Alors $H^1(X, L^{-n}) = 0$ pour n suffisamment grand.

Par le théorème de Riemann-Roch, on a :

$$h^0(X, L^n) - h^1(X, L^n) + h^2(X, L^n) \sim \frac{n^2}{2}(L^2) .$$

Pour n grand, $h^2(X, L^n) = h^0(X, L^{-n} \otimes \omega_X) = 0$. (Si $L^{-n} \otimes \omega_X$ avait une section, le produit d'intersection $(L \cdot (L^{-n} \otimes \omega_X)) = -n(L^2) + (L \cdot \omega_X)$ serait positif, ce qui est impossible pour n grand).

Donc $h^0(X, L^n)$ tend vers l'infini avec n ce qui entraîne qu'il existe un entier positif n_0 tel que pour tout $n \gg n_0$, $h^0(X, L^n)$ soit non nul, et un entier positif n_1 tel que pour tout $n \gg n_1$, $h^0(X, L^{-n} \otimes \omega_X^1)$ soit nul.

On prendra $n \gg \sup(n_0, n_1)$. Alors on peut supposer $L^n = \mathcal{O}_X(D)$, où D est un diviseur effectif, et on va montrer que $H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) = 0$.

On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

et la suite de cohomologie :

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(D, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D) \longrightarrow \dots$$

On va d'abord montrer (Ramanujam [1]) que $H^0(D, \mathcal{O}_D) = k$, ce qui entraîne que la flèche $H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est une injection.

DÉFINITION. Un diviseur effectif D est dit numériquement connexe si pour toute décomposition $D = D_1 + D_2$, avec D_1 et D_2 effectifs, on a $D_1 \cdot D_2 > 0$.

LEMME 1 (Ramanujam [1]). Si D est numériquement positif, alors D est numériquement connexe.

REMARQUES. a) Si D n'a pas de composantes multiples, D est numériquement connexe si et seulement si son support est connexe.

b) Si D est numériquement connexe, son support est connexe.

c) Si D est numériquement connexe, D_{red} numériquement est connexe.

DÉMONSTRATION DU LEMME. Supposons D numériquement positif et $D = D_1 + D_2$, avec D_1 et D_2 effectifs, et $(D_1 \cdot D_2) \leq 0$.

$$\text{On a } \begin{cases} (D_1 \cdot (D_1 + D_2)) = (D_1^2) + (D_1 \cdot D_2) \gg 0, \\ (D_2 \cdot (D_1 + D_2)) = (D_2^2) + (D_1 \cdot D_2) \gg 0 \end{cases}$$

l'une au moins des inégalités étant stricte, soit par exemple :

$$(*) \quad \begin{cases} 0 \leqslant -(D_1 \cdot D_2) < (D_1^2) \\ 0 \leqslant -(D_1 \cdot D_2) \leqslant (D_2^2) \end{cases}$$

On considère la forme intersection sur le sous-espace de $NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ engendré par D_1 et D_2 .

Si D_1 et D_2 étaient colinéaires, on aurait $aD_1 = bD_2$, a et b étant des entiers positifs, et donc $(D_1 \cdot D_2) > 0$, ce qui contredit (*).

Les vecteurs D_1 et D_2 étant indépendants, le théorème de l'index de Hodge montre que le déterminant $\begin{vmatrix} D_1^2 & D_1 \cdot D_2 \\ D_1 \cdot D_2 & D_2^2 \end{vmatrix}$ est négatif, ce qui contredit les inégalités (*)

LEMME 2 (Ramanujam). Si D est numériquement connexe, $H^0(D, \mathcal{O}_D) = k$.

La démonstration qui suit est sensiblement différente de celle de Ramanujam [1].

Puisque D_{red} est connexe et réduit, on a $H^0(D_{\text{red}}, \mathcal{O}_{D_{\text{red}}}) = k$. On va démontrer que s'il existe un diviseur effectif D_1 tel que $0 < D_1 < D$ et $H^0(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) = k$, alors il existe un diviseur effectif D_2 tel que $D_1 < D_2 \leqslant D$ et $H^0(D_2, \mathcal{O}_{D_2}) = k$. En effet, soit D_1 tel que $H^0(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) = k$ et $0 < D_1 < D$. Posons $D = D_1 + D'$. Comme D est numériquement connexe, on a $(D_1 \cdot D') > 0$, ce qui entraîne qu'il existe au moins une composante réduite et irréductible C de D telle que $(D_1 \cdot C) > 0$.

On a la suite exacte : $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-D_1)|_C \rightarrow \mathcal{O}_{D_1+C} \rightarrow \mathcal{O}_{D_1} \rightarrow 0$.
D'où : $0 \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_X(-D_1)|_C) \rightarrow H^0(D_1+C, \mathcal{O}_{D_1+C}) \rightarrow H^0(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) = k$.

Le faisceau $\mathcal{O}_X(-D_1)|_C$ étant de degré négatif sur C , qui est réduite et irréductible, on a $H^0(C, \mathcal{O}_X(-D_1)|_C) = 0$. Donc $H^0(D_1+C, \mathcal{O}_{D_1+C}) = k$.

En appliquant ce qu'on vient de démontrer à $D_1 = D_{\text{red}}$, et en itérant, on trouve $H^0(D, \mathcal{O}_D) = k$.

Revenons à la proposition 2 :

On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(D, \mathcal{O}_D) \\
 & & \downarrow F & & \downarrow F & & \\
 H^1(X, \mathcal{O}_X(-pD)) & \xleftarrow{c} & H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(D, \mathcal{O}_D) \\
 & & \downarrow a & & & & \\
 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(D, \mathcal{O}_D)
 \end{array}$$

où c est l'application canonique :

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(X, L^{-1}) & \longrightarrow & H^1(X, F_* F^*(L^{-1})) \\
 \parallel & & \parallel \\
 H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) & & H^1(X, \mathcal{O}_X(-pD))
 \end{array}$$

1°) c est injectif : par la proposition 1, car on a $H^0(X, L^{-p^n} \otimes \mathcal{O}_X^1) = 0$.

2°) a est injectif : en effet, pD étant numériquement connexe, la flèche $H^1(X, \mathcal{O}_X(-pD)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est injective, et puisqu'elle se factorise par a et la flèche injective $H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$, a est nécessairement une injection.

3°) F est nilpotent sur $H^1(X, \mathcal{O}_X(-D))$.

Le k -espace vectoriel $H^1(X, \mathcal{O}_X(-D))$ est muni d'un endomorphisme p -linéaire F . Il se décompose en somme directe $V_n \oplus V_s$, F étant nilpotent sur V_n . De plus, si V_s n'est pas nul, il existe un élément non nul de V_s qui est fixe par F .

Soit Z un élément de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, fixé par F , dont l'image dans $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ est nulle. Nous allons montrer que Z est nécessairement nul.

De la suite exacte pour la topologie étale

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{1-F} \mathbb{G}_a \longrightarrow 0$$

on tire, en remarquant que $H_{\text{et}}^i(\mathbb{G}_a, X) = H^i(X, \mathcal{O}_X)$ pour $i=0,1$:

$$\underbrace{H_{\text{et}}^0(\mathbb{G}_a, X)}_k \xrightarrow{1-F} \underbrace{H_{\text{et}}^0(\mathbb{G}_a, X)}_k \longrightarrow H_{\text{et}}^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, X) \longrightarrow H_{\text{et}}^1(\mathbb{G}_a, X) \xrightarrow{1-F} H_{\text{et}}^1(\mathbb{G}_a, X)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & 0 \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{1-F} H^1(X, \mathcal{O}_X) .
 \end{array}$$

A l'élément Z , qui est dans le noyau de $1-F$, correspond donc un revêtement galoisien $\pi : Y \longrightarrow X$, de groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, qui est trivial sur D [4].

Si Y n'est pas connexe, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ n'ayant pas d'autre sous-groupe que (0) et lui-même, π est trivial.

On suppose Y connexe. Il est clair que π^*D est numériquement positif :

$$\begin{cases} (\pi^*D \cdot \pi^*D) = p(D^2) > 0 \\ (\pi^*D \cdot C) = (D \cdot \pi_*C) \gg 0 \end{cases} \text{ pour toute courbe } C \text{ sur } Y \text{ ce qui}$$

entraîne que π^*D est connexe, donc que π n'est pas trivial sur D (Lemme 1).

Donc Z est nul, et par conséquent V_S est nul, et F est nilpotent sur $H^1(X, \mathcal{O}_X(-D))$.

L'endomorphisme F étant à la fois injectif et nilpotent sur $H^1(X, \mathcal{O}_X(-D))$, on a $H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) = 0$.

APPLICATION A LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME ANNONCÉ. Il suffit de démontrer : $H^0(L^{-p^n} \otimes \Omega_X^1) = 0 \quad \forall n \geq 1$.

On a les suites exactes :

$$0 \longrightarrow f^* \Omega_C^1 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_{X/C}^1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/C}^1 \longrightarrow \omega_{X/C} \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

D'où l'exactitude des suites suivantes :

$$H^0(L^{-p^n} \otimes f^* \Omega_C^1) \longrightarrow H^0(L^{-p^n} \otimes \Omega_X^1) \longrightarrow H^0(L^{-p^n} \otimes \Omega_{X/C}^1) \longrightarrow \dots$$

et

$$0 \longrightarrow H^0(L^{-p^n} \otimes \Omega_{X/C}^1) \longrightarrow H^0(L^{-p^n} \otimes \omega_{X/C}) \longrightarrow \dots$$

$$H^0(L^{-p^n} \otimes \omega_{X/C}) = H^0(\omega_{X/C}^m \otimes f^* A)^{-p^n} \otimes \omega_{X/C} = 0.$$

En effet, s'il y avait une section S , son intersection avec une fibre F serait $S \cdot F = (1 - mp^n) \omega_{X/C} \cdot \mathcal{O}_X(F)$, qui est négatif puisque $(\omega_{X/C} \cdot \mathcal{O}_X(F)) = 2g - 2 > 0$, (où g est le genre de F , supposé supérieur ou égal à 2). Par conséquent, on a $H^0(L^{-p^n} \otimes \Omega_{X/C}^1) = 0$.

D'autre part, et pour la même raison, $H^0(L^{-p^n} \otimes f^* \Omega_C^1) = 0$. Donc, $H^0(L^{-p^n} \otimes \Omega_X^1) = 0$.

REMARQUE. Par un argument de réduction modulo p , le critère ci-dessus permet de donner une démonstration en caractéristique 0 du théorème

d'annulation de Ramanujam. En voici les détails :

Soit X une surface projective lisse sur un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle, et soit L un faisceau inversible sur X , numériquement positif.

Il existe un anneau intègre R , de type fini sur $\mathbb{Z}$, et un morphisme propre et lisse $f: Y \rightarrow S = \text{Spec } R$, tels qu'au point générique η de S on ait $k(\eta) \subset k$ et $Y_\eta \times_{k(\eta)} k \simeq X$ et que L induise un faisceau inversible $\mathcal{L}_\eta$ sur la fibre générique Y_η .

En choisissant convenablement le schéma S , on va montrer qu'il possède un point fermé s tel que $\mathcal{L}_s$ est numériquement positif sur Y_s , et, si p est la caractéristique du corps $k(s)$, on a

$$H^0(Y_s, \mathcal{L}_s^{-p^n} \otimes \Omega_{Y_s}^1) = 0 \text{ pour tout entier } n \gg 1.$$

En effet, le faisceau L étant numériquement positif sur X , on peut choisir un entier positif m tel que $L^m = \mathcal{O}_X(D)$, D étant un diviseur effectif sur X . Comme le produit d'intersection est conservé dans une famille plate, pour tout point fermé s d'un ouvert non vide U de S , on a $(D_s^2) \gg 0$. D'autre part, pour toute courbe C de Y_s , le produit d'intersection $(D_s.C)$ est positif ou nul si C et D_s n'ont aucune composante commune. Quitte à remplacer S par un schéma S' fini sur S , on peut supposer que toute composante géométriquement réduite et irréductible de D reste géométriquement réduite et irréductible modulo l'idéal de s dans S , pour tout point fermé s d'un ouvert non vide U' de S . Alors, pour $s \in U \cap U'$, si c est une composante de D_s , on a $(C.D_s) \gg 0$ parce que c'est vrai sur la fibre générique. Pour tout point fermé s de $U \cap U'$, le faisceau $\mathcal{L}_s$ est donc numériquement positif.

En ce qui concerne $H^0(Y_s, \mathcal{L}_s^{-p^n} \otimes \Omega_{Y_s}^1)$, on choisit S de façon que $f_*(\Omega_{Y/S}^1)$ soit plat sur S .

Comme $h^0(X, L^m)$ tend vers l'infini avec m , on a, pour p assez grand, $h^0(X, L^{-p^n} \otimes \Omega_X^1) = 0$, quel que soit l'entier positif n . Par le théorème de semi-continuité de la cohomologie, on en déduit qu'il existe un ouvert non vide W de S tel que, pour tout point s de cet ouvert, p_s désignant la caractéristique du corps $k(s)$, on a

$$h^0(Y_s, L^{-p_s^n} \otimes \Omega_{Y_s}^1) = 0.$$

PINCEAUX DE COURBES DE GENRE AU MOINS DEUX II

Pour tout point fermé s de $U \cap U' \cap W$, on a les propriétés énoncées plus haut, et, en vertu du critère d'annulation que nous avons démontré, $H^1(Y_s, L_s^{-1}) = 0$.

Le théorème de semi-continuité de la cohomologie permet alors d'en déduire : $H^1(X, L^{-1}) = 0$.

Bibliographie

- [1] C.P. RAMANUJAM.- "Remarks on the Kodaira vanishing theorem".
Journal of the Indian Math. Soc. 36 (1972), p. 41-51.
- [2] C.P. RAMANUJAM.- "Supplément" au précédent. Journal of the Indian
Math. Soc. 38 (1974), p. 121-124.
- [3] M. RAYNAUD.- "Contre-exemple au "Vanishing" de Kodaira en caractéristique p ". T.I.F.R. Studies in Mathematics Ramanujam's, volum I.
- [4] J.P. SERRE.- "Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p ". Symp. Alg. Top. Mexico (1956).
- [5] L. SZPIRO.- "Sur le théorème de rigidité d'Arakelov et Parsin".
Colloque de Rennes, Juil. 1978, Astérisque 1979, vol. 2.

Renée LEWIN-MÉNÉGAUX
Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématique, bât. 425
91405 ORSAY

L. SZPIRO

PROPRIÉTÉS NUMÉRIQUES DU FAISCEAU DUALISANT RELATIF

par Lucien SZPIRO

exposé n° 3

- 0. Fibrations semi-stables
- 1. Invariants entiers
- 2. Positivité du faisceau dualisant-relatif
- 3. Borne pour la self-intersection du faisceau dualisant-relatif
- 4. Cas où la base est de genre zéro ou un
- 5. Fibres ordinaires
- 6. Rigidité
- 7. Le problème de Chafarevich
- 8. Le problème de Mordell

Introduction.

On trouvera ici une version augmentée et enrichie de la partie de mon article [16] se rapportant au titre. Le théorème principal (théorème 2) est comme dans [16] la généralisation en toute caractéristique du théorème d'Arakelov sur la positivité numérique du faisceau dualisant relatif d'un pinceau de courbes. La démonstration fournie ici n'utilise que la théorie des surfaces algébriques et de nombreuses réductions à une situation sur un corps fini. En particulier, nous n'avons plus besoin des arguments modulaires tirés de l'article [12] de D. Mumford, qui ont cependant été une source d'inspiration pour ce travail.

Le théorème 3, qui donne une borne pour la self intersection du faisceau dualisant relatif en fonction des genres de la fibre et de la base et du nombre de fibres singulières, est la partie la plus nouvelle de ce texte, par rapport aux travaux de Parshin et Arakelov. Ce résultat est décisif en caractéristique positive.

Nous donnons, comme dans [16] l'application de ces résultats aux problèmes de Chafarevich et de Mordell. De plus nous donnons (théorème 5), une application du théorème 1, suggérée par M. Raynaud, aux familles dont toutes les fibres sont ordinaires. Le résultat est que de telles familles sont isotriviales. Ceci se généralise aux familles de variétés abéliennes comme on le verra dans un prochain séminaire.

Au paragraphe 4, nous montrons (en toute caractéristique) qu'une fibration semi-stable sur P^1 , dont la classe de Kodaira-Spencer n'est pas nulle possède au moins quatre fibres singulières si l'espace total est une surface de type général. Ce résultat est amélioré en caractéristique nulle par A. Beauville dans l'exposé 6 de ce séminaire. Notons que la classe de Kodaira-Spencer est un outil technique que nous utilisons bien souvent dans ce texte.

En de nombreuses occasions l'aide de M. Raynaud m'a été capitale. J'ai essayé d'indiquer au cours du texte ce que je lui dois, j'espère n'en avoir pas trop oublié. Je tiens aussi à remercier L. Moret-Bailly et "le referee" d'Astérisque pour l'intérêt critique qu'ils ont bien voulu porter à ces pages.

0. Fibrations semi-stables.

DÉFINITION 1. Dans cet exposé nous appellerons fibration semi-stable un morphisme $f: X \rightarrow C$ d'une surface X , lisse connexe et projective sur un corps k , sur une courbe C , lisse connexe et projective sur k , possédant les propriétés suivantes :

a) f est projectif de fibre générique une courbe lisse et géométriquement connexe de genre $g \geq 2$

b) les fibres de f qui ne sont pas lisses sont semi-stables au sens de l'exposé 1 de ce séminaire [2].

Nous ferons d'autre part les conventions suivantes :

- sauf mention expresse du contraire k sera supposé algébriquement clos. Le lecteur vérifiera lui-même que les théorèmes de cet exposé sont valables sans cette hypothèse.

- S sera l'ensemble des points de C dont la fibre n'est pas lisse, s sera son cardinal.

- g sera le genre de C .

On adoptera le vocabulaire suivant : une fibration semi-stable $f: X \rightarrow C$ est isotriviale (ou possède un module constant) s'il existe un morphisme fini $C' \xrightarrow{\pi} C$ tel que $X \times_C C'$ soit birationnellement sur C' , isomorphe à un produit de C' par une courbe fixe. On montre qu'on peut dans ce cas supposer que π est étale sur $C-S$. D'autre part l'unicité du modèle semi-stable implique qu'une fibration, semi-stable et isotriviale, est lisse.

Remarquons enfin que si $\bar{M}_g$ est le module grossier des courbes stables de genre g et si $f: X \rightarrow C$ est une fibration semi-stable, on a un morphisme $\alpha_f: C \rightarrow \bar{M}_g$. Ce morphisme a pour image un point si et seulement si f est isotriviale.

DÉFINITION 2. Soit k un corps de caractéristique p et soit $f: X \rightarrow C$ une fibration semi-stable à fibres de genre g . Soit $\alpha_f: C \rightarrow \bar{M}_g$ le morphisme qui s'en déduit. On appellera exposant d'inséparabilité modulaire de f l'entier e tel que α_f se factorise en :

$$C \xrightarrow{\gamma_f} C' \xrightarrow{\beta_f} \bar{M}_g$$

où β_f est fini et séparable et γ_f purement inséparable de degré p^e .

Il est clair que e est fini si et seulement si f n'est pas isotriviale.

Rappelons que pour un morphisme lisse et propre $f: Y \rightarrow Z$ l'application de Kodaira-Spencer de f , notée $K.S.(f)$ est l'application canonique de T_Z^1 dans $R^1 f_* T_{Y/Z}^1$ déduite de la suite exacte des espaces tangents : $0 \rightarrow T_{Y/Z}^1 \rightarrow T_{Y/k}^1 \rightarrow f^* T_Z^1 \rightarrow 0$. On sait que c'est l'application tangente de la base Z dans le module formel des fibres de f . Si $f: X \rightarrow C$ est une fibration semi-stable, avec les notations du début de ce paragraphe, l'application $K.S.(f)$ est l'application tangente à $C-S \rightarrow M_g$. On en déduit que e , l'exposant d'inséparabilité modulaire de f , est nul, si et seulement si α_f est séparable. Si la caractéristique du corps de base est nulle d'exposant e on a : $e=0 \iff f$ non isotriviale $\iff K.S.(f) \neq 0$. En particulier si T est un schéma de type fini sur Z avec un point générique η de caractéristique zéro et, si $f: X \rightarrow C$ est une famille plate sur T de fibrations semi-stables telle que $X(\eta) \rightarrow C(\eta)$ soit non-isotriviale, il existe un ouvert U , dense dans T , tel que pour tout point $t \in U$ $X(t) \rightarrow C(t)$ ait une application de Kodaira-Spencer non nulle, donc soit non isotriviale et d'exposant d'inséparabilité modulaire égal à zéro.

On montre facilement le lemme suivant :

LEMME 0. Soit $f: X \rightarrow C$ une fibration semi-stable, et soit $\pi: X' \rightarrow X$ un revêtement fini et galoisien tel que $f' = f \circ \pi$ fasse de X' une fibration semi-stable. Alors l'exposant d'inséparabilité modulaire de f' est au plus égal à celui de f .

REMARQUE. Si $f: X \rightarrow C$ est une fibration semi-stable, non isotriviale, d'exposant d'inséparabilité modulaire égal à e , il existe des courbes C' et C'' , un morphisme semi-stable $f': X' \rightarrow C'$, des morphismes finis $\pi: C'' \rightarrow C$ et $\pi': C'' \rightarrow C'$ tel que :

- a) $X \times_C C''$ soit C'' -birationnellement isomorphe à $X' \times_{C'} C''$
- b) π soit séparable et π' purement inséparable
- c) l'exposant d'inséparabilité modulaire de f' soit égal à zéro.

1. Invariants-entiers.

Soit $f: X \longrightarrow C$ une fibration semi-stable. On définit les entiers suivants :

$$d = \text{degré}(f_* \omega_{X/C})$$

où $\omega_{X/C}$ est le faisceau dualisant relatif.

$$\delta = \sum_{P \in S} \delta_P$$

où δ_P est le nombre de points singuliers dans la fibre de P .

LEMME 1. La "self-intersection" $(\omega_{X/C} \cdot \omega_{X/C})$ est égale à $(12d - \delta) \cdot (1)$.

Le théorème de Riemann-Roch sur X donne

$$X(\Theta_X) = \frac{c_1^2 + c_2}{12} = X(f_* \Theta_X) - X(R' f_* \Theta_X)$$

comme $\Omega_{X/k}^2 = \omega_{X/C} \otimes f^* \Omega_C^1$ on a

$$c_1^2 = (\omega_{X/C} \cdot \omega_{X/C}) + 8(g-1)(q-1) .$$

D'autre part on a les deux suites exactes fondamentales :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow f^* \Omega_C^1 \longrightarrow \Omega_{X/k}^1 \longrightarrow \Omega_{X/C}^1 \longrightarrow 0$$

$$(**) \quad 0 \longrightarrow \Omega_{X/C}^1 \longrightarrow \omega_{X/C} \longrightarrow N \longrightarrow 0 .$$

Remarquons tout de suite que N est de longueur finie égale à δ .

En effet en un point $P \in X$ qui est singulier dans sa fibre, on peut après complétion écrire son anneau local $\widehat{\Theta_{X,P}} = k[[X,Y,T]]/XY-T = A$.

Notant $R = k[[X,Y,T]]$, $V = k[[T]]$ on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} \text{Ad}X \oplus \text{Ad}Y \longrightarrow \Omega_{A/Y}^1 \longrightarrow 0$$

où $\varphi(1) = YdX \oplus XdY$.

L'anneau local A étant régulier son idéal maximal m étant engendré par X et $-Y$, le complexe de Koszul sur X et $-Y$ donne une résolution projective de $A/m = k$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus A \longrightarrow A \oplus A \longrightarrow A \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

et la flèche de gauche s'identifie à φ . $\Omega_{A/Y}^1$ est donc isomorphe à m . N étant de longueur finie on peut identifier l'injection $0 \rightarrow \Omega_{A/V}^1 \rightarrow \omega_{A/V}$ à l'injection canonique $0 \rightarrow m \rightarrow A$ ce qui montre

$$N \simeq \bigoplus_{\substack{P \text{ sing} \\ \text{dans sa fibre}}} k(P)$$

On déduit de (*)

$$c_2 = c_1(f^* \Omega_C^1) \cdot c_1(\Omega_{X/C}^1) + c_2(\Omega_{X/C}^1)$$

et de (**)

$$c_1(\Omega_{X/C}^1) = c_1(\omega_{X/C}) \quad \text{et} \quad c_2(\Omega_{X/C}^1) = \delta.$$

D'où la formule

(2)

$$c_2(X) = 4(g-1)(q-1) + \delta$$

ce qui implique

$$(\omega_{X/C} \cdot \omega_{X/C}) = 12(1-q-\chi(R^1 f_* \mathcal{O}_X)) - 12(g-1)(q-1) - \delta$$

par dualité on a $R^1 f_* \mathcal{O}_X \simeq (f_* \omega_{X/C})^\vee$ donc $\chi(R^1 f_* \mathcal{O}_X) = -d-g(q-1)$.

On a ainsi le lemme 1. Notons, en passant, que nous venons de montrer

(3)

$$c_1^2(X) = 12d - \delta + 8(g-1)(q-1).$$

LEMME 2. Pour tout entier $n \geq 2$ on a :

(4)

$$\text{degré}(f_* \omega_{X/C}^{\otimes n}) = \binom{n}{2} (12d - \delta) + d.$$

On peut, comme dans l'article [12] obtenir cette formule par le théorème de Riemann-Roch relatif de A. Grothendieck. Il est cependant plus simple, dans ce contexte, d'appliquer les théorèmes de Riemann-Roch classiques à X et à C :

- sur C , comme $n \geq 2$ $g \geq 2$ impliquent $R^1 f_* \omega_{X/C}^{\otimes n} = 0$

$$\chi(\omega_{X/C}^{\otimes n}) = \chi(f_* \omega_{X/C}^{\otimes n}) = \text{degré}(f_* \omega_{X/C}^{\otimes n}) - (2n-1)(g-1)(q-1)$$

- sur X , $\chi(\omega_{X/C}^{\otimes n}) = \frac{n^2}{2}(\omega_{X/C} \cdot \omega_{X/C}) - \frac{n}{2}(\omega_{X/C} \cdot f^* \Omega_C^1) + \chi(\mathcal{O}_X)$

d'où le lemme 2.

LEMME 3 (Arakelov [1]). Soit $\pi : C' \rightarrow C$ un morphisme fini d'une courbe lisse C' dans C et considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & & \xrightarrow{\pi'} & & X \\
 \searrow \rho & \nearrow & & \searrow & \\
 & X \times_C C' & \xrightarrow{\quad} & & X \\
 \searrow f' & \downarrow f_{C'} & & & \downarrow f \\
 & C' & \xrightarrow{\pi} & & C
 \end{array}$$

dans lequel X' est la résolution relativement minimale des singularités de $X \times_C C'$. Alors :

a) X' est semi-stable

b) $\omega_{X'/C'} = \pi'^* \omega_{X/C}$

c) $d' = \deg f'_*(\omega_{X'/C'}) = \deg(\pi) \cdot d$

d) $\delta' = \deg(\pi) \cdot \delta$

Les singularités de $X \times_C C'$ ont été décrites dans l'exposé 1 de M. Deschamps, de ce séminaire [2]. La résolution X' est aussi décrite dans [2] en particulier a) et d) sont déjà dans cet exposé. Rappelons que les composantes E_i du diviseur exceptionnel de X' sont des P' de self-intersection -2 (loc. cit.) et que leur matrice d'intersection est non dégénérée.

Montrons alors b). On a $\omega_{X'/C'} = \pi'^* \omega_{X/C}(\sum r_i E_i)$.

D'autre part $(\pi'^* \omega_{X/C} \cdot E_i) = 0 \quad \forall r_i$ et

$(\omega_{X'/C'} \cdot E_i) + (E_i \cdot E_i) = -2$ (adjonction) donc $(\omega_{X'/C'} \cdot E_i) = 0 \quad \forall i$

ceci donne $\sum_i r_i (E_i \cdot E_j) = 0 \quad \forall j$

donc $r_i = 0 \quad \forall i$ c.q.f.d.

La formule c) se déduit de b) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 f'_* \omega_{X'/C'} &= f'_* \pi'^* \omega_{X/C} = f_{C'}_* \rho_* \pi'^* \omega_{X/C} \\
 &= f_{C'}_* \rho_* \rho^* \omega_{X \times_C C'/C'}
 \end{aligned}$$

comme $X \times_C C'$ est normale, $\rho_* \rho^* \omega_{X \times_C C'/C'} = \omega_{X \times_C C'}$

donc $f'_* \omega_{X'/C'} = f_{C'}_* \omega_{X \times_C C'} = \pi^* f_* \omega_{X/C}$

puisque $\omega_{X/C}$ est cohomologiquement plat. On a ainsi c) en prenant les degrés.

2. Positivité du faisceau dualisant relatif.

PROPOSITION 1. Soit $X \xrightarrow{f} C$ une fibration semi-stable alors la self-intersection du faisceau dualisant relatif est positive ou nulle.

Il est clair qu'il suffit de montrer cet énoncé avec $p = \text{car}(k) \nmid 0$.

DÉFINITION 3. Soit F_n le morphisme de Frobenius absolu de C . $X^{(n)}$ sera la résolution relativement minimale de $X \times_{F^n C}$.

On a ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 X^{(n)} & \xrightarrow{\psi_n} & X \times_{F^n C} & \longrightarrow & X \\
 & \searrow f_n & \downarrow F^n & & \downarrow f \\
 & & C & \xrightarrow{F^n} & C
 \end{array}$$

Remarquons que ψ_n est un isomorphisme si f est un morphisme lisse.

Pour montrer la proposition 1 on peut grâce aux formules (1), (5) (lemme 2) supposer que le genre g de C est au moins deux. $X^{(n)}$ est alors une surface minimale (pas de P^1 de self-intersection -1 dans les fibres et pas de P^1 du tout qui soit fini sur C).

Par les formules (5) (1) et (3) on voit que $C_1^2(X^{(n)}) = p^n(12d - \delta) + 8(g-1)(q-1)$. Si $(12d - \delta)$ était strictement négatif $C_1^2(X^{(n)})$ le serait aussi pour $n \gg 0$. D'après la classification des surfaces à la Enriques, menée à bien par D. Mumford [13] en caractéristique $p > 0$, $X^{(n)}$ posséderait une infinité de courbes isomorphes à P^1 (loc. cit. §1 step VI). Ceci est impossible quand $g \geq 2$.

THÉOREME 1. Soit $f: X \rightarrow C$ une fibration semi-stable et non isotriviale alors, le degré de $f_* \omega_{X/C}$ est strictement positif.

Si $\delta \neq 0$ (f non lisse) la proposition 1 implique $d > 0$. Il reste à traiter le cas d'un morphisme lisse et non isotrivial. C'est étonnement le cas le plus délicat, de tels morphismes existent comme on le verra à l'exposé 4 de ce séminaire [3].

Pour finir de montrer le théorème 1 il est loisible de supposer le corps k fini, $d = 0$, $K.S.(f) \neq 0$ (cf. §0).

Les formules (1) et (5) nous autorisent à supposer genre $(C) = q > g = \text{genre des fibres}$ et f possède une section s .

Soit, $X^{(n)} \xrightarrow{f_n} C$ défini comme au début de ce § par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X^{(n)} & \longrightarrow & X \\ f_n \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{F^n} & C \end{array}$$

où cette fois F est le Frobénius géométrique de C sur k (fini) i.e. F laisse fixe k .

Les surfaces $X^{(n)}$ sont minimales ($q \geq 2$) de type général ($C_1^2(X^{(n)}) = 8(g-1)(q-1)$) et comme f_n est lisse il n'y a pas de P^1 de self-intersection (-2) dans $X^{(n)}$. Le faisceau dualisant $\omega_{X^{(n)}}$ est donc ample sur $X^{(n)}$. Son polynôme de Hilbert donné par la formule :

$$\chi(\omega_{X^{(n)}}^{\otimes m}) = \frac{m^2 - m}{2} 8(g-1)(q-1) + (g-1)(q-1)$$

est indépendant de n . D'après le travail [10] de Matsusaka et Mumford, valable en toute caractéristique pour les surfaces, l'ensemble des $X^{(n)}$ est contenu dans une famille bornée de variétés algébriques sur k . Le corps k étant fini il n'y a qu'un nombre fini de $X^{(n)}$ à k isomorphismes près. Nous allons alors, montrer que f est isotrivial.

Pour ce faire nous allons montrer qu'il existe une suite infinie n_i d'entiers positifs, telle que

- a) $X(n_i) \xrightarrow[\varphi_{i,j}]{k} X(n_j) \quad \forall i, j$
- b) $f_{n_j} \circ \varphi_{i,j} = f_{n_i} \quad \forall i, j$.

Le morphisme f_{n_i} étant trivial à l'ordre p^{n_i} et $n_i \rightarrow \infty$ on en déduit l'isotrivialité de f_{n_0} , donc de f ce qui contredit

$K.S(f) \neq 0$. Montrons qu'on peut réaliser ces conditions :

- a) On peut choisir une suite infinie m_i satisfaisant a) d'après la finitude du nombre de $X^{(n)}$ à k isomorphismes près.

- b) Notons $Y = X^{(m_0)}$ par composition on a pour chaque i un morphisme

$$\begin{array}{ccc} g_i : Y & \longrightarrow & C \\ \varphi_{i_0, i} \searrow & & \nearrow f_{m_i} \\ & X^{(m_i)} & \end{array}$$

Le genre des fibres de g_i étant plus grand que le genre de C , une fibre de g_i est contenue dans une fibre de $g_j \forall i, j$, donc lui est égale puisque ces fibres sont lisses et connexes. Mais par hypothèse g_{i_0} possède une section s_{i_0} , $g_j \circ s_{i_0}$ est séparable donc est un automorphisme de C . Le genre de C étant au moins deux, il n'y a qu'un nombre fini d'automorphismes de C . Il n'y a donc qu'un nombre fini de morphismes g_i . On prend alors pour suite n_i une sous-suite de m_j , infinie, telle que les g_i correspondants soient les mêmes, ce qui montre b) et finit la démonstration du théorème 1.

THÉOREME 2. Soit $f : X \rightarrow C$ une fibration semi-stable et non isotriviale. Alors le faisceau dualisant relatif est numériquement positif. De plus les seules courbes réduites et irréductibles dans X dont l'intersection avec $\omega_{X/C}$ est nulle sont les P^1 de self-intersection (-2) contenus dans les fibres. En particulier pour un pinceau de Lefschetz, pour une fibration stable (ou lisse) et non isotriviale $\omega_{X/C}$ est ample.

Rappelons qu'un faisceau inversible L sur une surface est dit numériquement positif si :

a) $(L.L) > 0$

b) $(L \cdot D) > 0$ pour tout diviseur effectif D . D'après le critère de Nakaï-Mořhezon [8] si l'inégalité b) est stricte L est ample.

LEMME 4. Soit D un diviseur effectif réduit et irréductible contenu dans une fibre de f. Alors $(\omega_{X/C} \cdot \mathcal{O}_X(D)) \gg 0$. De plus si $(\omega_{X/C} \cdot \mathcal{O}_X(D)) = 0$ alors D est un D' de self-intersection -2 .

On sait que le faisceau dualisant de D est donné par la formule d'adjonction $\omega_D = \omega_X(D)|_D$. Donc si D est une fibre irréductible $\omega_{X/C} \otimes \mathcal{O}_D$ et de degré $(2g-2)$ puisque $\mathcal{O}_X(D)/D \simeq \mathcal{O}_D$ ceci règle le cas où D est une fibre. Dans le cas contraire si $P = f(D)$ écrivons $E = f^{-1}(P) - D$. On a $(D.(D+E)) = 0$ donc $(D.D) = -(E.D) < 0$ car les fibres sont connexes. On a donc

$$(\omega_{X/C} \cdot \mathcal{O}_X(D)) = 2p_D - 2 - D^2, \quad p_D = \dim H^1(D, \mathcal{O}_D).$$

Donc si $p_D \gg 1$ $(\omega_{X/C} \cdot \mathcal{O}_X(D)) \gg 0$.

Il reste $p_D = 0$ donc $D \simeq \mathbb{P}^1$, comme X est relativement minimale $D^2 \neq -1$ donc $-D^2 \gg 2$ ce qui conclut le lemme.

Pour montrer le théorème 2 nous allons vérifier les conditions a) et b) ci-dessus. Nous supposons k de caractéristique positive ce qui suffit. Le lemme 5 qui suit permettra en fait de vérifier a) et b) à la fois. Nous ferons ceci en vérifiant que pour tout diviseur effectif D qui n'est pas contenu dans une fibre (on dit que D est horizontal) alors $(\omega_{X/C} \cdot \mathcal{O}_X(D)) \gg 0$.

LEMME 5. Soit A un faisceau inversible de degré $a > 0$ sur C. Alors il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \gg n_0$ $0 \neq H^0(X^{(n)}, \omega_{X^{(n)}/C} \otimes f_n^* A^{\otimes -1})$.

Rappelons que $X^{(n)}$ a été définie juste après l'énoncé de la proposition 1.

DÉMONSTRATION. $\omega_{X/C}^{(n)}$ étant cohomologiquement plat

$$\text{rang}(f_{n*}(\omega_{X/C}^{(n)} \otimes f_n^* A^{\otimes -1})) = g$$

$$\text{degré}(f_{n*}(\omega_{X^{(n)}/C} \otimes f_n^* A^{\otimes -1})) = p^n d - ga.$$

Donc par le théorème de Riemann-Roch sur C

$$\dim H^0(X^{(n)}, \omega_{X^{(n)}/C} \otimes f_n^* A^{\otimes -1}) \gg p^n d - ga - g(q-1)$$

ce qui prouve le lemme 5 puisque $d > 0$ (Théorème 1).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. On choisit A , puis n comme dans le lemme 5. On peut donc écrire

$$\omega_{X^{(n)}/C} = \mathcal{O}_{X^{(n)}}(H+V) \otimes f_n^* A$$

où H est un diviseur effectif horizontal et où V est un diviseur effectif vertical. Remarquons que $H \neq 0$ car $\omega_{X^{(n)}/C}$ ne peut pas être le faisceau associé à un diviseur supporté dans les fibres.

Il est facile de voir qu'il existe une courbe lisse C' , munie d'un morphisme fini $\pi: C' \rightarrow C$ telle que sur X' le désingularisé minimal de $X^{(n)} \times_C C'$ on ait (notations du lemme 3)

$$\pi^* \omega_{X^{(n)}/C} = \omega_{X'/C'} = \mathcal{O}_{X'}(\sum_{i=1}^t r_i E_i + V') \otimes f'^* \pi^* A$$

où les E_i sont des sections de f' et les r_i des entiers positifs non tous nuls.

Nous allons alors montrer que pour tout diviseur $\neq 0$, horizontal et effectif D de X' : $(\omega_{X'/C'} \cdot \mathcal{O}_{X'}(D)) \succ 0$.

Ceci finira la démonstration du théorème 2 en vertu du lemme 3 b) et du lemme 4. Si $D \neq E_i \quad \forall i=1 \dots t$ alors

$$(\omega_{X'/C'} \cdot \mathcal{O}_{X'}(D)) \succ a \cdot \deg(M) \cdot \deg(D/C') \succ 0.$$

Si D est égal à un des E_i alors

$$(\omega_{X'/C'} \cdot \mathcal{O}_{X'}(E_i)) = -(E_i \cdot E_i) \text{ par adjonction,}$$

donc $-(1+r_i)(E_i \cdot E_i) \succ a \deg(M) \succ 0$ ce qui finit la démonstration du théorème 2.

COROLLAIRE. Soit $f: X \rightarrow C$ une fibration semi-stable et non isotriviale, et soit E une section de f alors $(E \cdot E) < 0$.

REMARQUES. 1) M. Raynaud [15] a construit des contre-exemples au "vanishing" de Kodaira en caractéristique positive en fabriquant des surfaces lisses X muni d'un morphisme projectif $f: X \rightarrow C$ dans une courbe lisse et projective, tel que f ait une section E avec $(E \cdot E) \succ 0$. Les fibres de f sont toutes non lisses. On verra d'autres contre-exemples dans l'exposé 4 de ce séminaire [3] (cf. aussi [16]).

2) L'utilisation de la formule d'adjonction à la fin de la démonstration du théorème 2 est due à Arakelov [1].

La généralisation suivante du théorème 2 nous a été indiquée par M. Raynaud.

THÉORÈME 2'. Soient k un corps, X une surface projective et lisse sur k , C une courbe projective et lisse sur k et soit $f: X \rightarrow C$ un morphisme projectif, relativement minimal, non isotrivial, de fibre générique une courbe lisse de genre au moins égal à deux. Alors le faisceau dualisant relatif $\omega_{X/C}$ est numériquement positif. De plus les seules courbes réduites et irréductibles dont l'intersection avec $\omega_{X/C}$ est nulle sont les $\mathbb{P}^1$ de self-intersection (-2) contenus dans les fibres.

Soit $C' \xrightarrow{\pi} C$ un morphisme fini d'une courbe lisse C' dans C , tel que $X \times_C C'$ ait un modèle semi-stable : X' (cf. [2]). Bien entendu on dit que $X \xrightarrow{f} C$ n'est pas isotrivial si $X' \xrightarrow{f'} C'$ n'est pas isotrivial au sens du §0. Soit $\tilde{Y}$ la normalisation de $Y = X \times_C C'$ et soit Z une surface lisse qui domine $\tilde{Y}$ et X' et qui leur soit birationnel. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & b & & & \\
 & & & \curvearrowright & & & \\
 & & \tilde{Y} & \xrightarrow{a} & Y & \longrightarrow & X \\
 & \nearrow h & & & \downarrow & & \downarrow \\
 Z & & & & & & \\
 & \searrow g & X' & \xrightarrow{f'} & C' & \xrightarrow{\pi} & C
 \end{array}$$

Soit d le degré de π nous allons montrer l'existence d'un morphisme "norme"

$$\alpha : H^0(X', \omega_{X'/C'}^{\otimes n}) \longrightarrow H^0(X, \omega_{X/C}^{\otimes nd})$$

pour tout entier n .

a) Le morphisme $\omega_{Y/C'}^{[n]} \rightarrow b^* \omega_{X/C}^{\otimes n}$.

Soit $\mathfrak{f}$ le conducteur de $\tilde{Y}$ sur Y , $\mathfrak{f} = \underline{\text{Hom}}(a_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}}, \mathcal{O}_Y)$ est un idéal de $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$.

Comme $\omega_{Y/C'}$ est inversible on a

$$\omega_{Y/C'} = \mathfrak{f} \otimes a^* \omega_{Y/C} = \mathfrak{f} \otimes b^* \omega_{X/C}$$

en composant avec les morphismes

$$f^{\otimes n} \rightarrow f^n \hookrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$$

on obtient :

$$\omega_{\tilde{Y}/C'}^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} b^* \omega_{X/C}^{\otimes n}.$$

Comme $b^* \omega_{X/C}^{\otimes n}$ est inversible, notant $\omega_{\tilde{Y}/C'}^{[n]}$ le bidual de $\omega_{\tilde{Y}/C'}^{\otimes n}$ on obtient

$$\omega_{\tilde{Y}/C'}^{[n]} \rightarrow b^* \omega_{X/C}^{\otimes n}.$$

b) Le morphisme $h_* \omega_{Z/C'}^{\otimes n} \hookrightarrow \omega_{\tilde{Y}/C'}^{[n]}$: c'est le morphisme classique puisque Z est une désingularisation de $\tilde{Y}$.

c) Le morphisme $g^* \omega_{X'/C'}^{\otimes n} \hookrightarrow \omega_{Z/C'}^{\otimes n}$. Ce morphisme s'obtient quand on a remarqué que $\omega_{Z/C'} = g^* \omega_{X'/C'} (\sum r_i E_i)$ où les E_i sont les composantes exceptionnelles des éclatements qui font passer de X' à Z .

d) Par composition on obtient un morphisme $H^0(X', \omega_{X'/C'}^{\otimes n}) \rightarrow H^0(\tilde{Y}, b^* \omega_{X/C}^{\otimes n})$. Composant ce morphisme avec le morphisme norme $H^0(\tilde{Y}, b^* \omega_{X/C}^{\otimes n}) \rightarrow H^0(X, \omega_{X/C}^{\otimes nd})$ on obtient le morphisme α désiré.

- Pour finir de montrer le théorème 2' remarquons d'abord que, par construction de α , si s est une section de $\omega_{X'/C'}^{\otimes n}$ qui ne s'annule pas en un point P' de la fibre générique X'_K de X' sur C' , alors $\alpha(s)$ ne s'annule pas (norme) au point P de la fibre générique X_K de X sur C , image de P' . En particulier par le théorème 2 et par le théorème de Riemann-Roch, pour $n \gg 0$ $\omega_{X/C}^{\otimes nd}$ possède des sections non nulles. Il nous suffira donc pour conclure de montrer que pour tout diviseur D de X , horizontal par rapport à f réduit et irréductible on a :

$$(\omega_{X/C} \cdot \mathcal{O}_X(D)) \succ 0.$$

(Le cas des composantes "verticales" se traite comme au lemme 4). Pour montrer cette dernière inégalité soit P le point générique de D , soient P' son "image réciproque" dans X'_K , et D' sa fermeture

schématique dans X' . Par le théorème 2 il existe, pour $n \gg 0$, une section s de $\omega_{X'/C}^{\otimes n}$ tel que le diviseur D_s associé rencontre D' et n'ait pas de composante commune avec D' , par construction, l'image réciproque de $D_s \cap D'$ dans Z à une image non vide dans X et $\alpha(s)$ ne contient pas D , donc

$$(\omega_{X/C}^{\otimes nd} \cdot \mathcal{O}_X(D)) \succ 0 \quad \text{cqfd.}$$

3. Borne pour la self-intersection du faisceau dualisant relatif.

Nous avons montré au §2 que $(12d-\delta) = (\omega_{X/C} \cdot \omega_{X/C}) \succ 0$ quand $f: X \rightarrow C$ est une fibration semi-stable et non isotriviale. En caractéristique zéro Arakelov [1] montre que dans ces conditions $d \leq (g-g_0)(q-1+\frac{s}{2})$ où g_0 est la dimension de la partie fixe de $\text{Pic}_{X/C}^0$. Il est clair qu'en caractéristique $p > 0$ on ne peut espérer une borne pour d avec ces seules hypothèses en effet $d(X^{(n)}) = p^{nd}$, de même pour $12d-\delta$ puisque $\delta(X^{(n)}) = p^{n\delta}$. Par contre en caractéristique zéro, f non isotriviale est équivalent à l'application tangente au morphisme $C-S \rightarrow M_g$ (module des courbes de genre g) n'est pas nulle. Ou encore que la classe de Kodaira-Spencer de f n'est pas nulle. Il se trouve qu'en caractéristique positive $K-S(f) \neq 0$ est équivalent à $C-S \rightarrow M_g$ est séparable. Le résultat que nous allons montrer est le suivant : (Théorème 3)

$$K-S(f) \neq 0 \implies (12d-\delta) < 8g(g-1)(q-1+s/2) .$$

PROPOSITION 2. Soit $f: X \rightarrow C$ une fibration semi-stable et non isotriviale et soit E une section de f alors :

$$(\omega_{X/C} \cdot \omega_{X/C}) \leq -(E.E)4.g.(g-1) .$$

On applique le théorème de l'index de Hodge au sous-espace du groupe de Néron-Sévéri engendré par $\omega_{X/C}$, E , F où F est une fibre. Comme $(\omega_{X/C} \cdot \omega_{X/C}) \succ 0$ (théorème 2) on a :

$$\det \begin{vmatrix} 12d-\delta & -E^2 & 2g-2 \\ -E^2 & E^2 & 1 \\ 2g-2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \succ 0$$

ce qui donne la proposition 2.

THÉOREME 3. Soit k un corps de caractéristique p et soit $f: X \rightarrow C$ une k -fibration semi-stable. Supposons que f soit d'exposant d'inséparabilité modulaire égal à e , alors :

$$(\omega_{X/C} \cdot \omega_{X/C}) \prec 8p^e g(g-1)(g-1+s/2) .$$

Au vu du lemme 3 et de la remarque suivant le lemme 0, on peut supposer que l'exposant d'inséparabilité modulaire de f est nul. Sous cette hypothèse l'homomorphisme de Kodaira-Spencer de la restriction de f à $X - f^{-1}(S) \rightarrow C - S$ est non nul. Nous allons maintenant calculer un prolongement canonique de cet homomorphisme (pour les fibrations semi-stables).

Dualisons la suite exacte $0 \rightarrow f^* \Omega_C^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X/C}^1 \rightarrow 0$ on obtient : $0 \rightarrow T_{X/C}^1 \rightarrow T_X^1 \rightarrow f^* T_C^1 \rightarrow \text{Ext}^1(\Omega_{X/C}^1, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0$. On rappelle qu'on a nommé N le conoyau de $0 \rightarrow \Omega_{X/C}^1 \rightarrow \omega_{X/C}$. Comme N est somme directe de modules de rang un sur k on a :

$$a) T_{X/C}^1 \simeq \omega_{X/C}^{\otimes -1}$$

$$b) \text{Ext}^1(\Omega_{X/C}^1, \mathcal{O}_X) \simeq N .$$

Soit alors I l'image de T_X^1 dans $f^* T_C^1$, par image directe on obtient un homomorphisme

$$f_* I \rightarrow R^1 f_* \omega_{X/C}^{\otimes -1}$$

qui est le prolongement voulu de la classe de Kodaira-Spencer sur $C - S$. Cet homomorphisme est supposé non nul ici. Montrons $f_* I = T_C^1(-S)$. On a la suite exacte

$$0 \rightarrow f_* I \rightarrow T_C^1 \rightarrow f_* N .$$

Localement, si t est un paramètre local d'un point P de C dont la fibre est singulière aux points $P_1 \dots P_{\delta_P}$

$$t \partial / \partial t \text{ est dans le noyau de } f^* T_C^1 \rightarrow k(P_i)$$

$$\text{donc } t \partial / \partial t \text{ est dans le noyau de } T_C^1 \rightarrow f_*(P_i)$$

donc dans le noyau de :

$$T_C^1 \rightarrow f_* \oplus k(P_i) \hookrightarrow f_* N$$

ceci prouve $f_* I = T_C^1(-S)$ (S réduit).

On a donc un homomorphisme non nul

$$T_C^1(-S) \longrightarrow R^1 f_* \omega_{X/C}^{\otimes -1}$$

donc un élément non nul de

$$H^0(C, R^1 f_* ((\omega_{X/C} \otimes T_C^1(-S))^{\otimes -1}))$$

donc $H^1(X, (\omega_{X/C} \otimes T_C^1(-S))^{\otimes -1}) \neq 0$.

Par le théorème de l'exposé 2 de ce séminaire [11] (cf. aussi [16]) $\omega_{X/C} \otimes T_C^1(-S)$ n'est pas numériquement positif.

Une au moins des deux conditions suivantes est donc satisfaite :

a) $(\omega_{X/C} \otimes T_C^1(-S))^2 \not\leq 0$

b) il existe un diviseur effectif D sur X tel que

$$(\omega_{X/C} \otimes T_C^1(-S) \cdot \mathcal{O}_X(D)) < 0.$$

De a) on déduit $12d - \delta \not\leq 8(g-1)(q-1+s/2)$ qui est meilleur que ce qu'on veut au théorème 3. Dans le cas b) on se convainc facilement qu'on peut supposer D intègre et horizontal. Soit C' la normalisée de D et soit $X' \xrightarrow{f'} C'$ la résolution relativement minimale du produit $X \times_C C'$. X' est munie d'une section E telle que

$$-(E.E) = (\omega_{X'/C'} \cdot \mathcal{O}_{X'}(E)) < (2q-2+s) \cdot \deg(C'/C)$$

ce qui par la proposition 2 donne :

$$(\omega_{X'/C'} \cdot \omega_{X'/C'}) < 8g(g-1)(q-1+s/2) \cdot \deg(C'/C).$$

On obtient alors le théorème 3 en appliquant le lemme 3 c) et d).

4. Cas où la base est de genre zéro ou un.

Nous étudions ici les valeurs de s pour une fibration semi-stable $f: X \rightarrow C$. Le cas où $C \simeq \mathbb{P}^1$ en caractéristique zéro sera étudié en détail par A. Beauville dans l'exposé 6 de ce séminaire [18]. Nous verrons d'autre part dans l'exposé 4 (M. Flexor) de ce séminaire [3], des exemples de fibrations lisses ($s=0$) et non isotriviales dus à Kodaira. Le genre q de C dans ces exemples est assez grand.

THÉOREME 4. Soit $f: X \rightarrow C$ une fibration semi-stable alors :

- a) si le genre de C est un et si f est lisse, f est isotriviale
- b) si le genre de C est zéro et si le nombre de fibres singulières est au plus deux, f est isotriviale
- c) si le genre de C est zéro, si X est de type général, et si la classe de Kodaira-Spencer de f est non nulle le nombre de fibres singulières est au moins quatre.

Les parties a) et b) en caractéristique zéro sont déjà dans Parshin [14]. L'énoncé c) sans hypothèse sur X , en caractéristique zéro est montré par A. Beauville dans l'exposé 6 de ce séminaire [18]. La démonstration ici fournie est indépendante des leurs.

DÉMONSTRATION DE a) ET b). D'après les théorèmes 2 et 3 de cet exposé si f n'est pas isotriviale on a :

$$0 < q-1+s/2$$

ce qui montre bien a) et b).

Pour montrer c) considérons Y le modèle minimal de X . On a un morphisme birationnel $\pi: X \rightarrow Y$. On sait que les composantes du diviseur exceptionnel de π sont des diviseurs $E_i \simeq \mathbb{P}^1$ $i=1\dots t$ et que, π étant une succession finie d'éclatements de points $\omega_X = \pi^* \omega_Y \otimes \mathcal{O}_X(\sum r_i E_i)$ où les $r_i \in \mathbb{N}$.

LEMME 6. Soit $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration semi-stable et non isotriviale, supposons X de type général alors $\omega_{X/\mathbb{P}^1} \otimes f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ est numériquement positif.

En vertu du lemme 4 il suffit de regarder l'intersection avec des diviseurs effectifs horizontaux. Nous allons montrer pour D un diviseur horizontal :

- A) si $D \neq E_i \quad \forall i \quad (\omega_{X/\mathbb{P}^1} \otimes f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \cdot \mathcal{O}_X(D)) > 0$
- B) si $D = E_i \quad (\omega_{X/\mathbb{P}^1} \otimes f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \cdot \mathcal{O}_X(E_i)) \gg 0$.

Pour ces deux énoncés remarquons d'abord que

$$\omega_{X/\mathbb{P}^1} \otimes f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \simeq \omega_X \otimes f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1).$$

Pour prouver A) écrivons $\omega_X = \pi^* \omega_Y \otimes \mathcal{O}_X(\sum r_i E_i)$
 donc $(\omega_X \otimes f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \otimes \mathcal{O}_X(D)) \gg (\pi_* D. \omega_Y) + 1$ ce qui prouve A) puisque Y
 est de type générale et minimale.

Pour prouver B) appliquons la formule d'adjonction
 $(\omega_X \otimes \mathcal{O}_X(E_i)) + (E_i.E_i) = -2$, or $(E_i.E_i) < -1$ et $(E_i.f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \gg 1$
 par hypothèse, ce qui donne B).

Il nous faut maintenant vérifier que la self-intersection est
 strictement positive. C'est une conséquence de A) car
 $\omega_X = \pi^* \omega_Y \otimes \mathcal{O}_X(\sum r_i E_i)$ donc une puissance positive de $\omega_X \otimes f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$
 est effective et ne peut être contenue dans la réunion des fibres
 exceptionnelles de π et f .

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du c) du
 théorème 4. $K.S(f) \neq 0$ implique (cf. la démonstration du théorème 3)
 $\omega_{X/\mathbb{P}^1} \otimes f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2-s)$ n'est pas un faisceau inversible numériquement
 positif. Donc $2-s < -1$ c.q.f.d.

5. Fibres ordinaires.

L'énoncé suivant nous a été suggéré par M. Raynaud.

THÉOREME 5. Soit k un corps de caractéristique positive et algébri-
quement clos. Soit $f: X \rightarrow C$ un morphisme semi-stable d'une surface
 X , projective et lisse sur k , sur une courbe C projective et
lisse sur k . Alors, si toutes les fibres de f sont de genre $g \geq 2$
et ordinaires, le morphisme f est isotrivial.

Rappelons qu'une courbe projective et lisse sur un corps k de
 caractéristique $p > 0$ et algébriquement clos, est dite ordinaire s'il
 y a exactement p^g faisceaux inversibles dont la puissance p -ième
 est triviale. Il revient au même de dire que le noyau de la multipli-
 cation par p dans la jacobienne est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mu_p)^g$, ou
 encore que le noyau du morphisme de Frobenius géométrique de la
 jacobienne est isomorphe à μ_p^g . C'est cette dernière définition qui
 est la plus pratique dans le cas relatif. Soit $J_{X/C}$ la jacobienne
 relative de X sur C . Soit F le morphisme de Frobenius absolu de
 C et soit $X^{(p)} = X \times_F C$. Supposons que le noyau N du C -morphisme :

$$J_{X(p)/C} \xrightarrow{\varphi} J_{X/C}$$

soit, localement sur C , isomorphe à μ_p^g . Soit $C' = \text{Isom}(N, \mu_p^g \times C)$.

C' est munie d'un morphisme fini et étale $\pi: C' \rightarrow C$. Soit

$X' = X \times_C C'$ alors $N' = \ker(J_{X'/C'} \xrightarrow{\varphi'} J_{X(p)/C'}) \simeq \mu_p^g \times C'$.

L'espace tangent relatif à $J_{X'/C'}$ est isomorphe à l'espace tangent à N' et est égal à $R^1 f_* \mathcal{O}_{X'}$. Comme $N' \simeq \mu_p^g \times C'$ le degré de $R^1 f_* \mathcal{O}_{X'}$ est nul, ce qui conclut en vertu du théorème 1 et du lemme 3.

6. Rigidité.

Nous montrons ici le théorème de rigidité suivant, dû à Arakelov [1] en caractéristique zéro. Le lecteur pourra noter que ce théorème est valable non seulement en caractéristique positive mais en inégale caractéristique.

THÉOREME 6. Soit V un anneau de valuation discrète complet et soit $\pi: C \rightarrow \text{Spec } V$ une courbe lisse et projective sur $\text{Spec } V$. Notons $\pi_0: C_0 \rightarrow \text{Spec } k_0$ la fibre spéciale de π . Soit $f_0: X_0 \rightarrow C_0$ une fibration semi-stable et non isotriviale et soit $S_0 \hookrightarrow C_0$ le lieu de ramification de f_0 . Soit $S \hookrightarrow C$ un sous-schéma fermé, fini et étale sur V dont la fibre spéciale est S_0 . Alors il existe au plus une famille lisse X de surfaces sur $\text{Spec } V$ munie d'un V -morphisme $f: X \rightarrow C$ telle que :

- la fibre spéciale de f soit égale à f_0
- f est lisse en dehors de S .

Nous allons montrer que la déformation infinitésimale associée à une telle situation est unique. L'ensemble des déformations infinitésimales de f_0 est un espace principal homogène sous $\text{Ext}_{X_0/C_0}^1(\Omega_{X_0/C_0}^1, \mathcal{O}_{X_0})$. Il se décompose de la façon suivante par la suite spectrale des Ext globaux vers les Ext locaux :

$$0 \rightarrow H^1(X_0, \underline{\text{Hom}}(\Omega_{X_0/C_0}^1, \mathcal{O}_{X_0})) \rightarrow \text{Ext}^1(\Omega_{X_0/C_0}^1, \mathcal{O}_{X_0}) \rightarrow H^0(X_0, \underline{\text{Ext}}^1(\Omega_{X_0/C_0}^1, \mathcal{O}_{X_0})).$$

Grâce à la suite exacte (**) du §1 $\underline{\text{Hom}}(\Omega_{X_0/C_0}^1, \mathcal{O}_{X_0}) \simeq \omega_{X_0/C_0}^{\otimes -1}$.

On a donc $H^1(X_0, \underline{\text{Hom}}(\Omega_{X_0/C_0}^1, \mathcal{O}_{X_0})) = 0$ en vertu du théorème d'annulation de l'exposé 2 de ce séminaire [11] (cf. aussi [16]).
Il nous reste à vérifier que "la contribution locale" dans $H^0(X_0, \underline{\text{Ext}}^1(\Omega_{X_0/C_0}^1, \mathcal{O}_{X_0}))$ est nulle quand on fixe S .

Montrons d'abord que la fibre générique $X_\eta \rightarrow C_\eta$ a des points singuliers dans ses fibres au-dessus de S_η . C'est un énoncé local.

LEMME 7. Soient V un anneau de valuation discrète, R un V -anneau local régulier lisse sur V et de dimension 2. Soit A un R anneau local lisse sur V de dimension 3. Notons avec un indice η (resp. η) les fibres spéciales (resp. génériques) sur V . Supposons Ω_{A_0/R_0}^1 localement libre sur A_0 sauf au point fermé de A_0 . Alors le morphisme Ω_{A_η/R_η}^1 n'est pas localement libre sur A_η .

Il suffit de montrer que l'ensemble des points de $\text{Spec } A$ où $\Omega_{A/R}^1$ n'est pas localement libre ne peut être réduit au point fermé. On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow A \otimes_R \Omega_{R/V}^1 \rightarrow \Omega_{A/V}^1 \rightarrow \Omega_{A/R}^1 \rightarrow 0.$$

Il nous faut donc montrer que l'ensemble des points où $A \otimes_R \Omega_{R/V}^1 \rightarrow \Omega_{A/V}^1$ n'est pas localement scindé ne peut être de codimension 3. C'est évident puisque $A \otimes_R \Omega_{R/V}^1$ est libre de rang un et $\Omega_{A/V}^1$ est libre de rang deux et donc l'ensemble des points où $\Omega_{A/R}^1$ n'est pas localement libre est de codimension au plus deux.

Pour finir de montrer le théorème 6 il nous suffit de montrer l'énoncé suivant dû à Arakelov [1].

LEMME 8. Soit V un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel k et de corps de fractions K . Soient T, X, Y des variables formelles sur V et soit A un V -anneau local complet tel que :

$$A \simeq V[[T, X, Y]]/XY - \varphi(T)$$

où $\varphi(T) \in V[[T]]$ et satisfait à :

$$\varphi(T) \equiv T \pmod{u \text{ uniformisante de } V}.$$

Alors il existe des variables X' et Y' telles que

$$A \simeq V[[T, X', Y']]/X'Y' - T'.$$

Ecrivons $\varphi(T) = T + u\psi(T)$ $\psi(T) \in V[[T]]$. On a $K \otimes_V A/T.K \otimes_V A \simeq K[[X, Y]]/XY - u\psi(0)$. Par le lemme 7 on sait que $K \otimes_V A/T.K \otimes_V A$ n'est pas lisse sur K . Donc (critère jacobien) les équations $X=0$, $Y=0$, $XY - u\psi(0) = 0$ ont une solution, i.e. $\psi(0) = 0$. On peut donc écrire $\varphi(T) = Tv$ où v est une unité dans $V[[T]]$ posant $X' = X$ et $Y' = Y$, on a montré le lemme 8.

7. Le problème de Chafarévich.

Dans son allocution au congrès international des mathématiciens, en 1962 à Stockholm, I. Chafarévich a posé le problème de la finitude de l'ensemble des courbes algébriques sur un corps de nombres donné, avec genre $g \geq 2$ fixé et mauvaise réduction fixée [19]. Le problème analogue pour un corps de fonctions d'une variable en caractéristique zéro a été résolu par Parshin [14] et Arakelov [1]. Nous donnons ici une solution de ce problème en toute caractéristique.

THÉORÈME 7. Soit C une courbe lisse et projective sur un corps k . Soient S un ensemble fini de points géométriques de C et e un entier, soit g un entier supérieur ou égal à deux. Alors l'ensemble des surfaces X sur k munies d'un morphisme $X \xrightarrow{f} C$ qui soit une fibration semi-stable, dont les fibres sont de genre g , dont le lieu de ramification est égal à S et dont l'indice de ramification modulaire vaut e , est un ensemble fini. De plus si k est un corps de caractéristique zéro on a le même énoncé sans l'hypothèse de semi-stabilité.

Nous montrerons la première partie de ce théorème en montrant d'abord que l'ensemble des modèles stables des surfaces X considérées forme une famille bornée.

LEMME 9. Soit $f: X \rightarrow C$ une fibration semi-stable, non isotriviale à fibres de genre g et dont la base C est de genre q , et soit $f_s: X_s \rightarrow C$ le modèle stable de f . Alors il existe un nombre $N(g, q)$ ne dépendant que de g et q tel que $\omega_{X_s/C}^{\otimes n}$ soit très ample sur X_s dès que $n \geq N(g, q)$.

On sait, X_s et les anneaux locaux complétés des points étant normaux, qu'il faut et il suffit être capable de séparer les points et les points infiniment voisins par des sections de $\omega_{X_s/C}^{\otimes n}$. Posons $L = \omega_{X_s/C}^{\otimes n}$ et soient P_1 et P_2 deux points fermés, éventuellement confondus, de X_s . Soit F_i la fibre de f_s contenant P_i . On a les suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow m_i \otimes L \longrightarrow L \longrightarrow \mathcal{O}_{P_i} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow m_i m_j \otimes L \longrightarrow m_i \otimes L \longrightarrow \mathcal{O}_{P_j} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où m_i est l'idéal des fonctions s'annulant en P_i ; il nous suffit donc (c'est classique !) de montrer :

$$(I) \quad H^1(X_s, m_i \otimes L) = 0 \quad \text{et} \quad H^1(X_s, m_i m_j \otimes L) = 0 .$$

Par les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow L(-F_i) \longrightarrow m_i \otimes L \longrightarrow m_i \otimes L/L(-F_i) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow L(-F_i - F_j) \longrightarrow m_i m_j \otimes L \longrightarrow m_i m_j \otimes L/L(-F_i - F_j) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

on voit qu'il suffit de vérifier les énoncés

$$a) \quad H^1(X_s, \omega_{X_s/C}^{\otimes n} \otimes f_s^* A^{\otimes -1}) = 0 \quad \text{pour } n \gg N(g, q)$$

et tout faisceau inversible A de degré au plus deux sur C

b) l'énoncé correspondant à (I) pour les fibres de X_s .

- Ce dernier point est facile et se trouve dans [21] : $n \gg 3$ suffit.

- Nous montrerons a) en montrant

$$H^1(X, \omega_{X/C}^{\otimes n} \otimes f^* A^{\otimes -1}) = 0 \quad \text{pour } n \gg N(g, q) \quad \text{et} \quad \text{degré } A \leq 2 .$$

Ce dernier fait implique bien a) car

X_s est normale

$$R^1 f_{s*} (\omega_{X_s/C}^{\otimes n} \otimes f_s^* A^{\otimes -1}) = 0 \quad n \gg 2$$

$$R^1 f_* (\omega_{X/C}^{\otimes n} \otimes f^* A^{\otimes -1}) = 0 \quad n \gg 2$$

$$f_* (\omega_{X/C}^{\otimes n} \otimes f^* A^{\otimes -1}) = f_{s*} (\omega_{X_s/C}^{\otimes n} \otimes f_s^* A^{\otimes -1})$$

$$\text{donc} \quad H^1(X, \omega_{X/C}^{\otimes n} \otimes f^* A^{\otimes -1}) = H^1(X_s, \omega_{X_s/C}^{\otimes n} \otimes f_s^* A^{\otimes -1}) .$$

Par le théorème d'annulation de l'exposé 2 et par dualité il nous suffit de vérifier que $\omega_{X/C}^{\otimes n-1} \otimes f^* A^{\otimes -1}$ est numériquement positif, pour $n \gg N(g, q)$ et degré $A \leq 2$.

a-1 Self-intersection

$$(\omega_{X/C}^{\otimes n} \otimes f^* A^{\otimes -1})^2 = n^2(12d - \delta) - 4n(2g - 2)$$

est positif si $n > \frac{8(g-1)}{12d-\delta}$

rappelons que $12d - \delta > 0$ (Théorème 2).

a-2 Diviseurs verticaux $n \gg 1$ implique $(\omega_{X/C}^{\otimes n} \otimes f^* A^{\otimes -1} \cdot \mathfrak{z}_X(V)) \gg 0$ et n'est nul que si V est somme de $\mathbb{P}^1$ de self-intersection -2 (lemme 4).

a-3 Si A est un faisceau inversible sur C de degré deux et, si $n > \frac{4(g-1)(2+q)}{12d-\delta}$, alors $H^0(X, \omega_{X/C}^{\otimes n} \otimes f^* A^{\otimes -1}) \neq 0$.

En effet $\text{degré}((\omega_{X/C}^{\otimes n} \otimes f^* A^{\otimes -1}) \cdot \binom{n}{2}(12d - \delta) + d - 3(2n-1)(g-1))$

et on applique Riemann-Roch sur C .

Ecrivons donc $\omega_{X/C}^{\otimes n_0} \otimes f^* A^{\otimes -1} = \mathcal{O}_X(\sum r_i D_i) \otimes \mathcal{O}_X(V)$ où D_i est effectif horizontal, V est effectif vertical, $r_i \in \mathbb{N}$ et

$$n_0 = \text{partie entière}(\frac{4(g-1)(2+q)}{12d-\delta}) + 1.$$

a-4 Diviseur horizontal. Soit D un diviseur effectif, intègre, horizontal.

α) Si D est différent de D_i et si $m > 0$

$$(\omega_{X/C}^{\otimes m+n_0} \otimes f^* A^{\otimes -1} \cdot \mathfrak{z}_X(D)) \gg 0$$

par le théorème 2.

β) Si D est un des D_i

$$(\omega_{X/C}^{\otimes n_0} \otimes f^* A^{\otimes -1} \cdot \mathfrak{z}_X(D_i)) \gg r_i(D_i \cdot D_i) - 2d^0(D_i/C)$$

- si $(D_i \cdot D_i) \gg 0$ comme $d^0(D_i/C) \leq n_0(2g-2)$ dès que $m > 2n_0(2g-2)$

on a : $(\omega_{X/C}^{\otimes m+n_0} \otimes f^* A^{\otimes -1} \cdot \mathfrak{z}_X(D_i)) \gg 0$

- si $(D_i \cdot D_i) < 0$ par la formule d'adjonction on a

$$(\omega_{X/C} \otimes \mathcal{O}_X(D_i)) \gg -(D_i \cdot D_i) - (2q-2)d^0(D_i/C)$$

$$\text{donc } (\omega_{X/C}^{\otimes n} \otimes f^* A^{\otimes -1} \otimes \mathcal{O}_X(D_i)) \gg -2q n_0 (2g-2)$$

donc si $m \gg 2q n_0 (2g-2)$ on a gagné, encore grâce au théorème 2.

En résumant, posant par exemple

$$N(g, q) = 8(g+2)^2(2g-2)^2$$

pour tout entier $n \gg N(g, q)$

$\omega_{X/C}^{\otimes n} \otimes f^* A^{\otimes -1}$ est numériquement positif pour tout faisceau inversible de degré au plus deux sur C . Ceci finit la démonstration du lemme 9.

Pour vérifier que l'ensemble des surfaces X_S (C, S, g étant donnés) forment une famille bornée, il nous suffit, grâce à l'existence des variétés de Chow, de montrer que les X_S se plongent dans $\mathbb{P}_k^5$ avec degré borné. Nous voulons, bien sûr, plonger par $\omega_{X_S/C}^{\otimes N_0}$ N_0 fixé $\gg N(g, q)$ et projeter. Le degré $N_0^2(12d-\delta)$ sera borné en vertu du lemme 9 et du théorème 3. Nous aurons gain de cause grâce au lemme évident suivant :

LEMME 10. Soit X une surface projective plongée dans $\mathbb{P}_k^N$. Supposons que X soit normale, que les complétés des anneaux locaux de ses points fermés soient normaux, et que les idéaux de fonctions s'annulant en un point aient localement au plus trois générateurs, alors il existe une projection de $\mathbb{P}_k^N$ sur $\mathbb{P}_k^5$ qui soit un isomorphisme sur X .

La démonstration est laissée au lecteur (s'il arrive à lire jusqu'ici...).

Montrons maintenant la première partie du théorème 7. L'ensemble des surfaces X munies d'un morphisme semi-stable $f: X \rightarrow C$ vérifiant les hypothèses du théorème 7, forme donc une famille bornée. Il existe alors une variété algébrique (i.e. de type fini sur k) M et un schéma plat sur M , $\kappa \xrightarrow{p} M$ muni d'un M -morphisme $f: \kappa \rightarrow C \times M$ "paramétrisant" les morphismes semi-stables $X \rightarrow C$ considéré. Par le théorème de rigidité (théorème 6) $f: \kappa \rightarrow C \times M$ a

des fibres sur M_i C -isomorphes, pour chaque M_i composante connexe de M . Le nombre de ces composantes connexes étant fini (c'était tout l'effort du §3 et de celui-ci) la première partie du théorème 7 est montrée.

Pour la fin du théorème 7, en caractéristique zéro, par le théorème d'unicité de Riemann et par réduction semi-stable [2], on se ramène à la première partie du théorème. On sait que le théorème d'unicité de Riemann n'est pas vrai en caractéristique $p > 0$, même sur un corps fini. Sur un corps de caractéristique positive mais infini, on a le contreexemple suivant, cher à M. Raynaud :

EXEMPLE. Soit k un corps de caractéristique positive p et soit n un entier tel que $n(p-1)-2 > 0$. Considérons pour tout $\underline{a} = (a_3, \dots, a_{pn-2})$ $a_i \in k$ la courbe $C_{\underline{a}}$ qui est la fermeture projective et lisse du revêtement d'Artin-Schreier de la droite affine donné par :

$$(***) \quad y^p - y = x^{pn-1} + \sum_{\substack{i=3 \\ p \nmid i}}^{pn-2} a_i x^{pn-i}.$$

Alors $C_{\underline{a}}$ est de genre g tel que $2g-2 = p(pn-n-2) > 0$, et l'ensemble des $\underline{a} \in A_k^{pn-4}$ tel que $C_{\underline{a}}, \tilde{k} C_{\underline{a}}$ est un ensemble fini. En particulier si k est infini et si $pn \geq 6$ on a une infinité (de dimension $pn-5$) de fibrations lisses non isotriviales sur A_k^1 .

$C_{\underline{a}}$ est un revêtement de degré p de $\mathbb{P}^1$, ramifié en un seul point situé au-dessus de l'infini. Son genre est donné par

$$2g-2 = p(pn-n-2) > 0.$$

Ces deux derniers faits se vérifient aisément grâce au changement de variable

$$z = g/X^n \quad t = 1/X$$

et, en remarquant que, la courbe :

$$z^p - zt^{np-1} = 1 + \sum_{i=2}^{pn-3} a_i t^i \quad \text{est lisse.}$$

Elle est ramifiée au seul point $z=0$, $t=0$ au-dessus de $t=0$ dans $k[t]$.

Nous allons montrer que pour un point de coordonnées $\underline{a} = (a_i)$ dans A^{pn-4} la fibre de $\underline{a}$ pour le morphisme $M : A^{pn-4} \rightarrow M_g$ est de cardinal au plus $(pn-1) \cdot \# (\text{Aut } C_{\underline{a}})$ ($\text{Aut } C_{\underline{a}}$ est fini puisque $g \geq 2$). Soit σ un générateur du groupe de Galois $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de $C_{\underline{a}}$ sur $\mathbb{P}^1$. On a :

$$\sigma(y) = y + \alpha \quad \alpha \in \mathbb{F}_p^X.$$

En effet $(\sigma(y)-y)^p = \sigma(y)-y$ grâce à $\sigma(X) = X$ et l'équation (***) . Donc $\sigma(y)-y = \alpha \in \mathbb{F}_p$. Comme σ est d'ordre exactement p , α est non nul. Nous noterons $\sigma_{\underline{a}}$ l'élément de $\text{Gal}(C_{\underline{a}}/\mathbb{P}^1)$ tel que : $\sigma_{\underline{a}}(y) = y+1$.

LEMME 11. Soit φ un isomorphisme de $C_{\underline{a}}$ sur $C_{\underline{a}'}$, tel que $\varphi \circ \sigma_{\underline{a}} = \sigma_{\underline{a}'} \circ \varphi$, alors il existe un élément α de k tel que :

$$\begin{aligned} - \alpha^{pn-1} &= 1 \\ - a_i &= \alpha^{pn-i} a'_i. \end{aligned}$$

Nous montrerons d'abord, qu'il existe un polynôme $Q(X) \in k[X]$, de degré au plus $n-1$, et deux éléments α et β de k tels que : $\varphi(y') = y + Q(X)$ $\varphi(X') = \alpha X + \beta$.

On vérifie facilement que $\varphi(k[X']) = k[X]$ d'où la deuxième égalité.

$$\begin{aligned} \text{On a } y - \varphi(y') &= \sigma_g(y) - \varphi(\sigma_{\underline{a}'}(y')) \\ \text{donc } y - \varphi(y') &= \sigma_{\underline{a}}(y) - \sigma_{\underline{a}'}(\varphi(y')) \\ \text{i.e. } y - \varphi(y') &\in k[X]. \end{aligned}$$

Ecrivons l'égalité qu'il en résulte

$$X^{pn-1} + \sum_{\substack{i=2 \\ p \nmid i}}^{pn-3} a_i X^{pn-i} + Q(X)^p - Q(X) = \sum_{\substack{i=2 \\ p \nmid i}}^{pn-3} a'_i (\alpha X + \beta)^{pn-i} + (\alpha X + \beta)^{pn-1}.$$

Ceci implique tout de suite

$$\text{degré}(Q(X)) \leq n-1$$

$$\text{et } \alpha^{pn-1} = 1 \quad (\text{coefficient de } X^{pn-1}).$$

D'autre part $(\alpha X + \beta)^{pn-1}$ possède un monôme $\alpha^{pn-2} X^{pn-2} (pn-1)\beta$ qui doit être nul, car nous avons bien pris soin de ne pas avoir de terme en X^{pn-2} dans (***). Donc $\beta = 0$. Donc $Q(X)^P = 0$ donc $Q(X) = 0$ et le lemme 11 est démontré.

Pour finir de montrer la finitude de $\pi : A_k^{pn-4} \rightarrow M_g$ il suffit maintenant de choisir, pour tout $\underline{a}' \in \pi^{-1}\pi(\underline{a})$, un isomorphisme $\varphi_{\underline{a}'} : C_{\underline{a}'} \rightarrow C_{\underline{a}}$ et d'écrire :

$$\pi^{-1}\pi(\underline{a}) = \coprod_{\rho \in \text{Aut}(C_{\underline{a}})} (\underline{a}' | \varphi_{\underline{a}'} \circ \sigma_{\underline{a}} \circ \varphi_{\underline{a}'}^{-1} = \rho) .$$

En effet chacun des morceaux de cette décomposition est de cardinal au plus $(pn-1)$ (lemme 11) ceci finit l'explication de l'exemple.

8. Le problème de Mordell pour les corps de fonctions.

Nous montrons ici qu'il n'existe qu'un nombre fini de points rationnels sur une courbe de genre au moins deux, sur un corps de fonctions, qui n'est pas "isotriviale". En caractéristique zéro ce résultat est dû à Grauert et Manin ([22], [9]), en caractéristique positive à P. Samuel [17]. Nous donnons ici la version de Parshin ([14]) basée sur une généralisation d'une construction due à Kodaira (Proposition 2) et qui montre, essentiellement, que le théorème 7 du §7 implique le corollaire 1 de la proposition 2 de ce paragraphe 8. Nous avons fait l'effort de vérifier (et de rédiger) l'argument de [14] en toute caractéristique. L'intérêt de la méthode est qu'on obtient ainsi une borne pour la "hauteur" des points rationnels (corollaire 2).

PROPOSITION 2. Soit $f : X \rightarrow C$ une fibration semi-stable et soit E une section de f . Alors il existe une surface lisse X' , une courbe lisse C' et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ C' & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

tels que :

a) π est un morphisme fini, modéré, étale en dehors de S , de degré au plus $(s+1)3^{3g+1}(3^g-1)$,

b) f' est une fibration semi-stable dont les fibres sont lisses en dehors de $\pi^{-1}(S)$,

c) le morphisme déduit de $\alpha, \alpha_\eta : X' \otimes_{\mathcal{O}_{C'}} k(C') \longrightarrow X \otimes_{\mathcal{O}_{C'}} k(C')$ est, fini, modéré, ramifié exactement au-dessus du point sur $k(C')$ de $X \otimes_{\mathcal{O}_{C'}} k(C')$ correspondant à E , et de degré au plus $(s+1)(3^g-1).3^{4g+3}$.

De plus l'exposant d'inséparabilité modulaire de f' est au plus égal à celui de f .

Avant de montrer cette proposition, nous allons en déduire la conséquence suivante :

COROLLAIRE 1. Soit k un corps et soit Γ une courbe lisse, projective, géométriquement connexe, de genre $g \geq 2$, sur un corps de fonctions K sur k . Supposons que Γ ne soit pas isotriviale sur K , alors Γ possède au plus un nombre fini de points rationnels sur K .

Par récurrence on peut supposer $\deg \text{tr}(K/k) = 1$, k de corps de fonctions K . Quitte à remplacer K par un corps fini sur K , on a un modèle $X \xrightarrow{f} C$ de Γ sur C qui est semi-stable. Soit C la courbe lisse sur l'ensemble des courbes C' décrit dans la proposition 2 est fini en vertu du théorème d'unicité de Riemann. Par le théorème 7 l'ensemble des surfaces X' est fini. Pour chacune de ces surfaces X' l'ensemble des morphismes $\alpha_\eta : X' \otimes K(C') \longrightarrow X \otimes K(C')$ est fini puisque le genre de $X \otimes K(C')$ est au moins deux et que α_η est séparable. Comme la section E peut être reconstruite à partir du lieu discriminant de α_η le corollaire est démontré.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2 (construction de Kodaira-Parshin). Nous expliciterons cette construction en caractéristique non égale à deux. Le lecteur intéressé pourra vérifier qu'en remplaçant la multiplication par 2 dans le premier pas, par la multiplication par 3, on a le résultat voulu mutatis-mutandis.

1er pas. On considère le diagramme commutatif suivant, dont le carré extérieur est cartésien :

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{Y} & & & & X \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & C & & \\
 \text{Pic}_{X/C}^0 & \nearrow & & \nwarrow & \text{Pic}_{X/C}^0 \\
 & & 2 & &
 \end{array}$$

La flèche $X \rightarrow \text{Pic}_{X/C}^0$ est déduite de la section E . Le morphisme $\tilde{Y} \rightarrow X$ est étale galoisien d'ordre 2^g sur $C-S$. On appellera Y une composante géométriquement connexe de $\tilde{Y}$. Le morphisme $Y \rightarrow X$ est génériquement étale et galoisien d'ordre divisant 2^g .

2e pas. Réduction semi-stable de $Y \rightarrow C$.

Pour tout $s \in S$ soit $\ell(s)$ le ppcm des indices de ramification de $Y \rightarrow X$ aux points génériques des composantes de la fibre X_s . Soit $C_0 \rightarrow C$ un morphisme fini et séparable dont l'indice de ramification au-dessus de chaque point s de S est multiple de $\ell(s)$. Il résulte du lemme d'Abhyancar que $Y_0 = Y \times_C C_0$ est étale sur $X_0 = X \times_C C_0$ en chaque point générique des composantes des fibres de $X_0 \rightarrow C_0$. Par le théorème de pureté $Y_0 \rightarrow X_0$ est étale au-dessus des points de X_0 qui sont lisses. On peut par exemple prendre pour $C_0 \rightarrow C$ le morphisme décrit ci-dessous :

Choisissons $2^g s$ points distincts de C si $p \nmid s$, et $(2^g s + 1)$ points distincts de C si $p \mid s$. Soit R cet ensemble qu'on supposera contenir S . On prend alors pour $C_0 \rightarrow C$ le revêtement cyclique galoisien de C d'ordre $\# R$ ramifié avec indice égal à $\# R$ exactement aux points de R .

On a donc un diagramme commutatif dont les deux carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \curvearrowright & \\
 Y_0 & \longrightarrow & C_0 & \longleftarrow & X_0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & C & \longleftarrow & X
 \end{array}$$

tel que le morphisme $C_0 \rightarrow C$ soit modéré de degré au plus $(2^g s + 1)$. Le lemme suivant montrera que $Y_0 \rightarrow C_0$ est semi-stable. Ce fait nous a été signalé par M. Raynaud et L. Moret-Bailly.

LEMME 12. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p . Soit n un entier premier à p et soit A l'anneau local $k[[X,Y,T]]/XY-T^n$. Alors, le groupe fondamental de U , complémentaire du point fermé de $\text{Spec } A$, est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le revêtement étale correspondant au générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le complémentaire du point fermé de $k[[u,v]]$ muni du morphisme

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow k[[u,v]] \\ X &\longrightarrow u^n \\ Y &\longrightarrow v^n \\ T &\longrightarrow uv \end{aligned}$$

et l'action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $k[[u,v]]$ est donnée par $u \longrightarrow \zeta u$ et $v \longrightarrow \zeta^{-1}v$ où ζ est une racine primitive n -ième de l'unité. En particulier tout revêtement étale et galoisien de U est le complémentaire du point fermé dans un anneau $k[[X,Y,T]]/XY-T^\ell$ où $\ell \mid n$.

La démonstration, facile, de ce lemme est laissée au lecteur. Notons qu'à priori Y_0 est seulement normale, mais ses fibres sur C_0 sont semi-stables.

3e pas. Où l'image réciproque de la section E contiendra deux sections disjointes.

Soit E_0 l'image réciproque dans Y_0 de la section de $X_0 \longrightarrow C_0$ correspondant à E . La flèche $E_0 \longrightarrow C_0$ est étale de degré au plus 2^g . On peut donc trouver un morphisme étale $C_1 \longrightarrow C_0$ de degré au plus $2^g(2^g-1)$ tel qu'il existe dans $Y_1 = Y_0 \times_{C_0} C_1$ deux sections disjointes E_1 et E_2 du morphisme $Y_1 \longrightarrow C_1$. L'image de chaque E_i par le morphisme composé $Y_1 \longrightarrow X$ est égale à E .

4e pas. Où l'on divise $\mathcal{O}_{Y_1}(E_1+E_2)$ en deux.

Nous allons construire un morphisme fini $C_2 \longrightarrow C_1$ tel que : si $Y_2 = Y_1 \times_{C_1} C_2$ et $Y_2 \xrightarrow{\pi} Y_1$ est le morphisme qui s'en déduit, on ait un faisceau inversible L sur Y_2 tel que :

$$L^{\otimes 2} = \pi^* \mathcal{O}_{Y_1}(E_1+E_2).$$

Pour ceci il suffit de "diviser en deux" $\pi^* \mathcal{O}_{Y_1}(E_1 - E_2)$. Sur la fibre générique de $Y_1 \rightarrow C_1$ ce faisceau est de degré zéro. Considérons le carré cartésien définissant C'_2

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}^0(Y_1/C_1) & \xrightarrow{2} & \text{Pic}^0(Y_1/C_1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ C'_2 & \longrightarrow & C_1 \end{array}$$

où la flèche $C_1 \rightarrow \text{Pic}^0(Y_1/C_1)$ se déduit de $\mathcal{O}_{Y_1}(E_1 - E_2)$.

Sur $Y'_2 = Y_1 \times_{C_1} C'_2$ il existe donc un faisceau inversible L' tel que, si $\pi' : Y'_2 \rightarrow Y_1$ on ait : $\pi'^* \mathcal{O}_{Y_1}(E_1 + E_2) \otimes L'^{\otimes -2} = \mathcal{O}_{Y'_2}(V)$ où V est un diviseur, non nécessairement effectif, à support dans fibres de $Y'_2 \rightarrow C'_2$. On peut donc trouver un morphisme $C_2 \rightarrow C'_2$ fini de degré pair, modéré, ramifié le long des points de C'_2 dont la fibre est singulière dans Y'_2 , avec indice de ramification pair. Il est facile de voir qu'on peut prendre un morphisme $C_2 \rightarrow C'_2$ de degré au plus $[s \cdot \deg(C'_2/C) + 1]$. On a donc sur $Y_2 = Y'_2 \times_{C'_2} C_2$ un diviseur W tel que $\pi^* V = 2W$ où l'on a noté π le morphisme canonique $Y_2 \rightarrow Y'_2$. Notant F_1 et F_2 les images réciproques de E_1 et E_2 dans Y_2 on a un faisceau inversible L sur Y_2 tel que :

$$L^{\otimes 2} = \mathcal{O}_{Y_2}(F_1 + F_2) .$$

5e pas. Soit Y' le revêtement galoisien de Y_2 de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ramifié exactement le long de $F_1 + F_2$ avec indice de ramification égal à deux. Soit $\alpha : Y' \rightarrow Y_2$ on a

$$\alpha_* \mathcal{O}_{Y'} = \mathcal{O}_{Y_2} \oplus L^{-1}$$

la multiplication dans $\alpha_* \mathcal{O}_{Y'}$ est donnée par $L^{\otimes -2} \rightarrow \mathcal{O}_{Y_2}$ correspondant à $F_1 + F_2$. Une fibre de $Y' \rightarrow C_2 = C'$ est lisse dès que la fibre correspondante de $Y_2 \rightarrow C_2$ l'est, les autres fibres sont semi-stables.

6e pas. Soit $X' \xrightarrow{\beta} Y'$ la résolution relativement minimale sur C' , des singularités de Y' . La fibration $f' : X' \rightarrow C'$ satisfera bien aux conclusions de la proposition 2 quand on aura vérifié que l'exposant d'inséparabilité modulaire de f' est au plus égal à celui de f .

Ce dernier point est une conséquence immédiate du lemme 0.

En fait la démonstration de la proposition 2 donne un résultat plus fort que le corollaire 1, à savoir une borne effective pour la "hauteur" des points rationnels :

COROLLAIRE 2. Soient k un corps de caractéristique p , $f: X \rightarrow C$ une fibration semi-stable non isotriviale et soit E une section de f alors :

$$- (E.E) \leq p^e \frac{8}{3} 3^{3g+2} (g-1)^2 (s+1 + \frac{2g-2}{3^g} + \frac{1}{3^{3g}})$$

où e est l'exposant d'inséparabilité modulaire de f .

Gardant les notations de la proposition 2 et de sa démonstration et appelant γ le morphisme de X' dans Y_2 on a :

$$\omega_{X'/C'} = \gamma^* (\omega_{Y_2/C'} \otimes L).$$

Donc, si $p \neq 2$, (la caractéristique deux est laissée au lecteur)

$$(\omega_{X'/C'} \cdot \omega_{X'/C'}) = 2[(\omega_{Y_2/C'} \cdot \omega_{Y_2/C'}) + 2(L \cdot \omega_{Y_2/C'}) + (L.L)] .$$

On voit facilement que

$$2(L.L) = - (\omega_{Y_2/C'} \cdot L) = 2^{3g+1} (2^g - 1) (s+1) (E.E) .$$

Donc, $(\omega_{X'/C'} \cdot \omega_{X'/C'}) \gg 3 \cdot 2^{3g+1} (2^g - 1) (s+1) (E.E)$ grâce à la proposition 1 appliquée au morphisme $Y_2 \rightarrow C'$. Utilisant maintenant le théorème 3 on trouve :

$$3 \cdot 2^{3g+1} (2^g - 1) (s+1) (E.E) < 8p^e g' (g'-1) (q'-1 + \frac{s'}{2})$$

où g' est le genre des fibres de $X' \rightarrow C'$, q' le genre de C' et s' le nombre de points de C' dont la fibre est singulière. Ces trois derniers nombres se calculent aisément en fonction de g , q , s . On obtient ainsi le corollaire 2.

Bibliographie

- [1] S.Ju. ARAKELOV.- "Families of algebraic curves with fixed degeneracy". Math. USSR Izvestija vol. 5 (1971), N° 6.
- [2] M. DESCHAMPS.- "Reduction semi-stable". Exposé 1, ce volume.
- [3] M. FLEXOR.- "Contrexemples aux énoncés d'annulation à la Kodaira". Exposé 4, ce volume.
- [4] D. GIESEKER.- in International Congress of Mathematicians Helsinki (1978).
- [5] W. HABOUSCH.- "Reductive groups are geometrically reductive". Annals of Math. 102 (1975).
- [6] M.-J. JABOUT'HO.- "Semi-stable reduction of heads" in Intern. Symp. on shrinking. Univ. of Vienna, Princeton Univ. Press (1932).
- [7] N. KATZ.- "Algebraic solutions of differential equations". Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. n° 38.
- [8] S. KLEIMAN.- "A note on the Nakai-Noîsezon test for ampleness of a divisor". Amer. J. Math. 87 (1965) 221.
- [9] Ju.I. MANIN.- "Rational points of algebraic curves over function fields". Amer. Math. Soc. (translations (2) 50 (1966) 189-234.
- [10] MATSUSAKA-MUMFORD.- "Two fundamental theorems of deformations..." Amer. J. Math. 86 (1964), p. 668.
- [11] R. MÉNÉGAUX.- Exposé 2, ce volume.
- [12] D. MUMFORD.- "Stability of projective varieties". L'enseignement mathématique XXIII fasc. 1-2 (1977).
- [13] D. MUMFORD.- "Enriques classification" I in Global analysis, N.Y. Princeton Univ. press (1969).
- [14] A.N. PARSHIN.- "Algebraic curves over function fields". Isv. Akad. Nauk SSSR (32) (1968).
- [15] M. RAYNAUD.- "Contrexemple au vanishing de Kodaira en caract. $p > 0$ " in C.P. Ramanujan a tribute, Springer Verlag for TIFR Bombay.
- [16] L. SZPIRO.- "Sur le théorème de rigidité de Parshin et Arakelov". Astérisque vol. 64 (colloque de Rennes vol. II).

- [17] P. SAMUEL.- "Complément à un article de H. Grauert sur la conjecture de Mordell". Pub. Math. de l'I.H.E.S. n° 29 (1966).
- [18] A. BEAUVILLE.- Exposé 6, ce volume.
- [19] J.-R. CHAFAREVICH.- "Algebraic number fields". Proc. Int. Congr. Math. (Stokholm 1962).
- [20] E. VIEHWEG.- "Canonical divisors and additivity of Kodaira dimension..." Compositio Mathematica vol. 35, Fasc. 2 (1977) p. 197-223.
- [21] P. DELIGNE et D. MUMFORD.- "Connectedness of the moduli space of curves". Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. vol. 36.
- [22] H. GRAUERT.- "Mordell's Vermutung über rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Funktionenkörper". Publ. Math. I.H.E.S. 1965.

Lucien SZPIRO
E.N.S. 45 rue d'Ulm
Centre de Mathématiques
75005 PARIS

NOUVEAUX CONTREEXEMPLES AUX ÉNONCÉS D'ANNULATION

"A LA KODAIRA" EN CARACTÉRISTIQUE $p > 0$

par Marguerite FLEXOR

exposé n° 4

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Il s'agit de trouver des surfaces lisses X munies d'un faisceau ample L tel que $H^1(X, L^{-1}) \neq 0$.

Dans [2], M. Raynaud a déjà fourni de tels exemples. Nous indiquons ici comment construire de nouveaux contre-exemples par une méthode due à M. Raynaud et L. Szpiro [3]. La surface X sera munie d'une fibration $X \rightarrow C$ lisse et non isotriviale. Nous construisons de plus un faisceau inversible L sur X tel que $L^p \simeq \Omega_{X|C}^1$. Grâce au théorème 1 (L. Szpiro) de l'exposé 3, on sait alors que L est ample. De plus, la construction sera faite telle que $H^1(X, L^{-1}) \neq 0$.

1. Structure de Tango-Raynaud.

Soit $X \xrightarrow{f} C$ une courbe lisse sur un schéma lisse connexe C . Soient F l'homomorphisme de Frobenius de C dans C , F_X celui de X . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & & F_X & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ & X^{(p)} & \xrightarrow{\beta} & X & \\ & \downarrow & & \downarrow f & \\ & C & \xrightarrow{F} & C & \end{array}$$

où le carré de droite est cartésien.

Considérons le complexe de De Rham relatif :

$$0 \rightarrow \alpha_* \theta_X \xrightarrow{d} \alpha_* \Omega_{X|C}^1 \rightarrow 0$$

que l'on peut décomposer en 2 suites exactes de $\theta_{X^{(p)}}$ -modules

$$\begin{aligned}
 1) \quad & 0 \longrightarrow \theta_{X^{(p)}} \longrightarrow \alpha_* \theta_X \longrightarrow B_{X|C}^1 \longrightarrow 0 \\
 2) \quad & 0 \longrightarrow B_{X|C}^1 \longrightarrow \alpha_* \Omega_{X|C}^1 \xrightarrow{c} \Omega_{X^{(p)}|C}^1 \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

où c est l'opération de Cartier (cf. [7]).

DÉFINITION. Une structure de Tango-Raynaud sur X au-dessus de C est la donnée d'un faisceau inversible L sur $X^{(p)}$ tel que :

- a) $L \hookrightarrow B_{X|C}^1$
- b) l'homomorphisme canonique

$$\varphi : \alpha^* L \longrightarrow \Omega_{X|C}^1$$

composé des homomorphismes :

$$\alpha^* L \hookrightarrow \alpha^* B_{X|C}^1 \longrightarrow \alpha^* \alpha_* \Omega_{X|C}^1 \longrightarrow \Omega_{X|C}^1$$

est un isomorphisme.

REMARQUES. Soit L un faisceau inversible sur $X^{(p)}$ qui vérifie (a) et (b) alors on a :

- 1) p divise $(2g-2)$
- 2) $L^p \simeq \Omega_{X^{(p)}|C}^1$: en effet, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_{X^{(p)}} & & \\
 & & \downarrow & & \\
 X^{(p)} & \xrightarrow{\beta} & X & \xrightarrow{\alpha} & X^{(p)} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C & \xrightarrow{F} & F & \xrightarrow{id} & C
 \end{array}$$

où $F_{X^{(p)}}$ est l'homomorphisme de Frobenius sur $X^{(p)}$. On a $(\beta \circ \alpha)^* L = L^p$ et $\beta^* \Omega_{X|C}^1 = \Omega_{X^{(p)}|C}^1$.

- 3) La condition b) est équivalente à :

$$\text{Sym}_{p-1}(E) \longrightarrow \alpha_* \theta_X$$

est un isomorphisme, où E est le fibré de rang 2 sur $X^{(p)}$, extension de L par $\theta_{X^{(p)}}$, obtenu par image réciproque de l'injection

$$L \hookrightarrow B_{X|C}^1 :$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \theta_{X(p)} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \theta_{X(p)} & \longrightarrow & \alpha_* \theta_X & \longrightarrow & B_{X/C}^1 \longrightarrow 0 .
 \end{array}$$

EXEMPLES.

i) Si $p=2$, toute courbe possède une et une seule structure de Tango-Raynaud donnée par le faisceau inversible $B_{X/C}^1$.

ii) Si $C=k$ est un corps et si X est une courbe elliptique super-singulière sur k , alors X possède une et une seule structure de Tango-Raynaud donnée par $\theta_{X(p)}$. En effet, la suite exacte 1) montre que $H^0(B_{X/k}^1) = \text{Ker} [H^1(\theta_{X(p)}) \rightarrow H^1(\theta_X)]$ et par suite

$H^0(B_{X/k}^1) \neq 0$ si X est supersingulière. Il est clair que $\theta_{X(p)}$

fournit une structure de Tango-Raynaud sur X . Par ailleurs, la remarque 2 ci-dessus montre que toute structure L de Tango-Raynaud sur X vérifie $L^p \simeq \Omega_{X(p)}^1$ et par suite $L \simeq \theta_{X(p)}$ si X est une courbe elliptique supersingulière.

iii) Soient $C=k$ un corps et X une courbe elliptique ordinaire. Les structures de Tango-Raynaud, à isomorphisme près, correspondent bijectivement aux points de p -torsion de la jacobienne de $X^{(p)}$ distincts de l'élément neutre. En effet, soit L un faisceau inversible muni d'un isomorphisme $L^p \simeq \theta_{X(p)}$, $L \neq \theta_{X(p)}$. La suite exacte 1) tensorisée par L^{-1} devient :

$$0 \longrightarrow L^{-1} \longrightarrow \alpha_*(\alpha^* L^{-1}) \longrightarrow B_{X/k}^1 \otimes L^{-1} \longrightarrow 0 .$$

Si β est l'homomorphisme $X^{(p)} \rightarrow X$ déduit du Frobenius sur k , on a : $L^p = \beta^* \alpha^* L$ et $k = H^0(\beta^* \alpha^* L^{-1}) = H^0(\alpha^* L^{-1}) \otimes_{k_F} k$. Par suite, $H^0(\alpha^* L^{-1}) = k$. D'autre part, comme $L \neq \theta_{X(p)}$, $H^0(L^{-1}) = H^1(L^{-1}) = 0$ et la suite exacte ci-dessus montre que

$$H^0(\alpha^* L^{-1}) \xrightarrow{\sim} H^0(B_{X/k}^1 \otimes L^{-1}) .$$

Donc $H^0(B_{X/k}^1 \otimes L^{-1}) = k$. Soit $s : L \hookrightarrow B_{X/k}^1$ correspondant à une section non nulle de $H^0(B_{X/k}^1 \otimes L^{-1})$. Pour des raisons de degré, il est

clair que l'homomorphisme $\alpha^*L \longrightarrow \Omega_X^1$ déduit de s est un isomorphisme et L fournit une structure de Tango-Raynaud sur X . Inversement, si L est une structure de Tango-Raynaud sur X , on a $L^p = \beta^* \alpha^* L \simeq \beta^* \Omega_X^1 \simeq \Omega_{X(p)}^1 \simeq \theta_{X(p)}$.

CONSEQUENCE. Tout revêtement fini $X' \xrightarrow{\pi} X$ d'une courbe elliptique X génériquement séparable, modérément ramifié et dont l'indice de ramification en tout point de X' est congru à 1 modulo p est muni d'une structure de Tango-Raynaud (on applique la proposition 2 ci-dessous).

De plus, si X est ordinaire et si le degré de π est premier à p , il existe sur X' plusieurs structures de Tango-Raynaud distinctes. En effet, soient L et L' deux faisceaux inversibles sur $X^{(p)}$ définissant des structures de Tango-Raynaud sur X tels que, si on note encore π le revêtement $(X')^{(p)} \longrightarrow X^{(p)}$ déduit de π de manière évidente, on ait :

$$\pi^* L \simeq \pi^* L'.$$

Par suite $L \otimes \pi_* \theta_{(X')^{(p)}} \simeq L' \otimes \pi_* \theta_{(X')^{(p)}}$ et si $n = \text{degré}(\pi)$

$$(\wedge^n \pi_* \theta_{(X')^{(p)}}) \otimes L^n \simeq (\wedge^n \pi_* \theta_{(X')^{(p)}}) \otimes (L')^n, \text{ i.e. :}$$

$$(L^{-1} \otimes L')^n \simeq \theta_{X(p)}.$$

Comme $(n, p) = 1$ et que $L^p \simeq L'^p \simeq \theta_{X(p)}$, il s'ensuit que $L^{-1} \otimes L' \simeq \theta_{X(p)}$ ou encore $L \simeq L'$.

iv) Si $C = k$ est un corps, il y a au plus, à isomorphisme près, p^r structures de Tango-Raynaud sur X , où p^r est l'ordre du groupe des points de p -torsion de la jacobienne de $X^{(p)}$. En effet, si L et L' sont deux faisceaux inversibles sur $X^{(p)}$ définissant des structures de Tango-Raynaud sur X , on a

$$\alpha^* L \simeq \alpha^* L' \text{ i.e. } \alpha^* (L^{-1} \otimes L') \simeq \theta_X$$

$$\text{et par suite } (L^{-1} \otimes L')^p = \beta^* \alpha^* (L^{-1} \otimes L') \simeq \theta_{X(p)}.$$

PROPOSITION 1 (Tango [4]). Soit X une courbe lisse projective de genre $g \geq 2$ sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Pour que

X possède une structure de Tango-Raynaud, il faut et il suffit qu'il existe une fonction rationnelle f sur X telle que $0 \neq (df) = \alpha^* D$, où D est un diviseur sur $X^{(p)}$.

En particulier, si k est parfait, X possède une structure de Tango-Raynaud si et seulement si il existe une fonction rationnelle f sur X telle que $(df) = pD$ où D est un diviseur sur X et $(df) \neq 0$.

Montrons la proposition : Soit L une structure de Tango-Raynaud sur X. Soit D un diviseur sur $X^{(p)}$ tel que $L \simeq \theta_{X^{(p)}}(D)$. Posons $B^1 = B_{X|k}^1$. A l'injection $L \hookrightarrow B^1$ correspond une section $s \neq 0$ de $H^0(B^1(-D))$. En tensorisant les suites exactes 1) et 2) par $\theta_{X^{(p)}}(-D)$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \theta_{X^{(p)}}(-D) &\longrightarrow \alpha_*(\theta_X(-\alpha^* D)) \longrightarrow B^1(-D) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow B^1(-D) &\longrightarrow \alpha_*(\Omega_{X|k}^1(-\alpha^* D)) \xrightarrow{c} \Omega_{X^{(p)}|k}^1(-D) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Par suite

$$H^0(X^{(p)}, B^1(-D)) = \{df, f \in K(X), df \gg \alpha^* D\}.$$

Soit $f \in K(X)$ telle que $(df) \gg \alpha^* D$, correspondant à la section s.

Comme $\alpha^* \theta_{X^{(p)}}(D) \simeq \Omega_{X|k}^1$, on a $(df) = \alpha^* D$. Il est clair inversement que s'il existe une fonction rationnelle f telle que $(df) \neq 0$ et $(df) = \alpha^* D$, où D est un diviseur sur $X^{(p)}$, le faisceau inversible $\theta_{X^{(p)}}(D)$ fournit une structure de Tango-Raynaud sur X.

EXEMPLE. "Revêtement d'Artin-Schreier" de la droite affine d'équation $Z^p - Z = T^{hp-1}$ (ici k est supposé parfait) :

Soit X la complétion projective de ce revêtement muni de son point à l'infini : ∞ . On a

$$(dT) = p(h(p-1)-2)\infty$$

et X est muni d'une structure de Tango-Raynaud donnée par $\theta_X((h(p-1)-2)\infty)$.

PROPOSITION 2. Soient X une courbe lisse sur un corps k de caractéristique $p > 0$ munie d'une structure de Tango-Raynaud, $\Pi : X' \rightarrow X$ un revêtement fini de X génériquement séparable. Si Π est modérément ramifié et si de plus l'indice de ramification en tout point de X' est congru à 1 modulo p , alors X' est munie d'une structure de Tango-Raynaud. En particulier, si Π est étale, X' est munie d'une structure de Tango-Raynaud.

Soient $q_1, \dots, q_r$ les points de ramification de Π et $\lambda_i, p+1$, pour $i=1, \dots, r$ leurs indices respectifs de ramification. On a une suite exacte sur X' :

$$0 \rightarrow \Pi^* \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X'}^1 \rightarrow \Omega_{X'}^1|_X \rightarrow 0$$

où le faisceau $\Omega_{X'}^1|_X$ est aussi défini par la suite exacte :

$$0 \rightarrow \theta_{X'}(-p \sum_{i=1}^r \lambda_i q_i) \rightarrow \theta_{X'} \rightarrow \Omega_{X'}^1|_X \rightarrow 0.$$

Si X possède une structure de Tango-Raynaud, il existe un diviseur D sur $X^{(p)}$ et une fonction rationnelle f de $K(X)$ tels que $(df) \neq 0$ et $(df) = \alpha^* D$. On a $d(\Pi^* f) \neq 0$ et $d(\Pi^* f) = \alpha^*(\Pi^* D + D_0)$ où $D_0 = \beta^*(\theta_{X'}(-\sum_{i=1}^r \lambda_i q_i))$.

PROPOSITION 3. Soient C une courbe lisse et connexe sur un corps k de caractéristique $p > 0$ et $f : X \rightarrow C$ une courbe lisse et projective sur C . Soit η le point générique de C . Si la fibre générique de f possède une structure de Tango-Raynaud donnée par un faisceau inversible L sur $X_\eta^{(p)}$, il existe un faisceau inversible $\tilde{L}$ sur $X^{(p)}$ dont la restriction à $X_\eta^{(p)}$ est isomorphe à L et qui définit une structure de Tango-Raynaud sur X au-dessus de C .

Soit $s \in H^0(X_\eta^{(p)}, B_{X_\eta/k(\eta)}^1 \otimes L^{-1})$ correspondant à l'injection $L \hookrightarrow B_{X_\eta/k(\eta)}^1$. Son image par l'application canonique :

$$\begin{aligned} H^0(X_\eta, B_{X_\eta/k(\eta)}^1 \otimes L^{-1}) &\longrightarrow H^0(X_\eta^{(p)}, \alpha_* \Omega_{X_\eta/k(\eta)}^1 \otimes L^{-1}) \\ &\parallel \\ &H^0(X_\eta, \Omega_{X_\eta/k(\eta)}^1 \otimes \alpha^* L^{-1}) \end{aligned}$$

correspond à l'isomorphisme $\rho: \alpha^* L \longrightarrow \Omega_{X_\eta/k(\eta)}^1$. Soit L' un faisceau inversible sur $X^{(p)}$ qui prolonge L . Comme la restriction de $\alpha^*((L')^{-1}) \otimes \Omega_{X/C}^1$ à X_η est triviale, il existe un faisceau inversible M sur C tel que

$$\alpha^*(L') \otimes f^* M \simeq \Omega_{X/C}^1.$$

Posons $\tilde{L} = L' \otimes f^{(p)*} M$, d'où un isomorphisme

$$\tilde{\rho}: \alpha^* \tilde{L} \longrightarrow \Omega_{X/C}^1$$

qui prolonge ρ et une section $\tilde{s}$ de $H^0(\Omega_{X/C}^1 \otimes \alpha^* \tilde{L}^{-1})$. Regardons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(B_{X/C}^1 \otimes \tilde{L}^{-1}) \longrightarrow H^0(\Omega_{X/C}^1 \otimes \alpha^* \tilde{L}^{-1}) \longrightarrow H^0(\Omega_{X^{(p)}/C}^1 \otimes \tilde{L}^{-1}).$$

L'image de $\tilde{s}$ dans $H^0(\Omega_{X^{(p)}/C}^1 \otimes \tilde{L}^{-1})$ est nulle sur la fibre générique donc nulle partout. Par conséquent $\tilde{s} \in H^0(B_{X/C}^1 \otimes \tilde{L}^{-1})$ et $\tilde{L}$ définit une structure de Tango-Raynaud sur X au-dessus de C .

PROPOSITION 4. Soit C une courbe lisse et connexe sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Soit $f: X \longrightarrow C$ une courbe lisse non isotriviale et projective munie d'une structure de Tango-Raynaud sur C . Il existe un faisceau inversible ample L sur $X^{(p)}$ tel que

- a) $L^p \simeq \Omega_{X^{(p)}/C}^1$
- b) $H^1(X^{(p)}, L^{-1}) \simeq k$.

Soit L le faisceau inversible sur $X^{(p)}$ définissant la structure de Tango-Raynaud sur X au-dessus de C .

Comme la fibration $X \xrightarrow{f} C$ n'est pas isotriviale, le théorème 2 de l'exposé 2 de ce séminaire (ou [3]) montre que $\Omega_{X/C}^1$ est ample donc $\alpha^* L$ et L sont amples.

L'assertion a) résulte de la remarque 2). Comme L est ample, $H^0(X^{(p)}, L^{-1}) = H^0(X, \alpha^* L^{-1}) = 0$. On a donc la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X^{(p)}, B_{X/C}^1 \otimes L^{-1}) &\longrightarrow H^1(X^{(p)}, L^{-1}) \longrightarrow H^1(X^{(p)}, \alpha_* \alpha^* L^{-1}) \\ &\parallel \\ &H^1(X, (\Omega_{X/C}^1)^{-1}). \end{aligned}$$

Le théorème d'annulation de [6], montre que $H^1(X, \Omega_{X/C}^1)^{-1} = 0$.
Comme $H^0(X^{(p)}, B_{X/C}^1 \otimes L^{-1}) \hookrightarrow H^0(X, \Omega_{X/C}^1 \otimes \alpha^* L^{-1}) = k$ et que
 $H^0(X^{(p)}, B_{X/C}^1 \otimes L^{-1}) \neq 0$, on voit que

$$k \simeq H^0(B_{X/C}^1 \otimes L^{-1}) \simeq H^1(X^{(p)}, L^{-1}) .$$

2. Fibrations de Kodaira.

Nous indiquons ici un procédé pour construire des fibrations, qui ne sont pas isotriviales, par des courbes lisses de genre ≥ 2 . Nous suivons une méthode due à Kodaira [1] qui s'étend aisément au cas de caractéristique $p > 0$ qui nous intéresse.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p .

Soient n et g_0 deux entiers ≥ 2 , n premier à p , C_0 une courbe lisse et géométriquement connexe sur un corps k , de genre g_0 , $C_1 \xrightarrow{\pi} C_0$ un revêtement étale et fini de degré n de C_0 . Soient $Y_0 = C_0 \times C_1$ et Γ_0 le graphe de π . Supposons k algébriquement clos.

LEMME 1. Il existe un revêtement $C \xrightarrow{\pi} C_0$ étale connexe et un faisceau inversible L sur $Y = C_1 \times C$ tel que, si Γ est l'image réciproque de Γ_0 par le morphisme $1 \times \pi : Y \rightarrow Y_0$, on ait $\theta_Y(\Gamma) = L^n$.

Soient Q un point rationnel de la fibre générique de $p = \text{pr}_1 : Y_0 \rightarrow C_0$ et $\tilde{Q}$ le diviseur effectif de Y_0 qui lui correspond.

Posons $L_0 = \theta_{Y_0}(\Gamma_0) \otimes \theta_{Y_0}(-n\tilde{Q})$. En tout point c de C_0 , on a : $\deg L_0|_{p^{-1}(c)} = 0$. Par suite, il existe un morphisme

$\alpha : C_0 \rightarrow \text{Pic}^0(C_1)$ et un faisceau inversible M sur C_0 tel que si P est le faisceau de Poincaré sur $\text{Pic}^0(C_1) \times C_1$, on ait :

$$L_0 = (\alpha \times 1)^*(P) \otimes p^*(M) .$$

Soient n le morphisme représentant la multiplication par n dans $\text{Pic}^0(C_1)$ et $r : C \rightarrow C_0$ le revêtement fini, étale, de degré n^{2g_1} , où $g_1 = \text{genre de } C_1$, défini par le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \text{Pic}^0(C_1) \\ r \downarrow & & \downarrow \underline{n} \\ C_0 & \xrightarrow{\alpha} & \text{Pic}^0(C_1) \end{array} .$$

Par conséquent : $(r \times 1)^*(L_0) = (\tilde{\alpha} \times 1)^*(P^n) \otimes (r \times 1)^*(p^*M)$. Posons $N' = r^*M$, c'est un faisceau inversible sur C de degré divisible par n . Comme k est algébriquement clos, il existe un faisceau inversible N sur C tel que $N^n \simeq N'$. Posons :

$$L = (\tilde{\alpha} \times 1)^*(P) \otimes \text{pr}_1^*(N) \otimes (r \times 1)^*(\theta_{Y_0}(\tilde{Q})) .$$

C'est un faisceau inversible sur $Y = C \times C_1$ qui vérifie

$$L^n = (r \times 1)^*(\theta_{Y_0}(\Gamma_0)) .$$

Ce qui montre le lemme lorsque C est connexe. Lorsque C ne l'est pas, on remplace C par un revêtement étale de groupe de Galois cyclique d'ordre n d'une composante connexe de C .

Revenons à la construction de notre fibration non isotriviale. Soit $X \xrightarrow{\rho} Y$ le revêtement de Y ramifié n -fois le long de Γ et tel que

$$\rho_* \theta_X = \theta_Y \oplus L^{-1} \oplus \dots \oplus L^{-n+1} .$$

Comme Γ est lisse, X est lisse et de plus les fibres de $f : X \rightarrow C$ sont lisses. Montrons (par le raisonnement original de Kodaira) que cette fibration n'est pas isotriviale. Soit $p : Y \rightarrow C$ la projection canonique. Si c est un point de C , $f^{-1}(c)$ est un revêtement génériquement séparable de $p^{-1}(c) = C_1$ ramifié le long des n points de $p^{-1}(c) \cap \Gamma$.

Par construction si c_1 et c_2 sont deux points dont les images dans C_0 sont distinctes, $p^{-1}(c_1) \cap \Gamma$ est différent de $p^{-1}(c_2) \cap \Gamma$. Si la fibration est isotriviale, i.e. s'il existe une courbe D tel que $f^{-1}(c) = D$ pour tout $c \in C$, on obtiendrait ainsi une infinité de morphismes génériquement séparables modérément ramifiés de D dans C_1 , qui est impossible car $g(C_1) \gg 2$.

PROPOSITION 5. Supposons $\text{car}(k) = p > 0$. Si C_0 est muni d'une structure de Tango-Raynaud et si $n \equiv 1 \pmod{p}$, alors la fibration $X \xrightarrow{f} C$ est munie d'une structure de Tango-Raynaud.

En effet, la fibre générique de $X \xrightarrow{f} C$ est munie d'une structure de Tango-Raynaud en vertu de la proposition 2, qui s'étend en une structure de Tango-Raynaud de $X \xrightarrow{f} C$, d'après la proposition 4.

REMARQUES. 1) Si k n'est pas algébriquement clos, on peut encore faire la même construction.

2) Pour de telles fibrations, la démonstration d'un des points essentiels du théorème 2 de [5], i.e. $(\Omega_{X/C}^1 \cdot \Omega_{X/C}^1) > 0$ se simplifie. Calculons explicitement $(\Omega_{X/C}^1 \cdot \Omega_{X/C}^1)$ et

$$d = \text{degré} \left(\bigwedge^{\max} f_* \Omega_{X/C}^1 \right).$$

LEMME. Soit g le genre de C , et posons $d(n) = (g-1) \left(\frac{n^2-1}{6} \right)$. On a les relations suivantes si a désigne le degré de $C \rightarrow C_0$:

$$a) \chi(\theta_X) = \left(\frac{n^2}{a} \right) (g-1)^2 + d(n) + \frac{(g-1)(n-1)n}{2}$$

$$b) d = d(n)$$

$$c) (\Omega_{X/C}^1 \cdot \Omega_{X/C}^1) = 12 d(n).$$

Soit K le faisceau canonique sur X . On a :

$$\begin{aligned} \chi(\theta_X) &= \chi(\alpha_* \theta_X) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(L^{-i}) \\ &= n\chi(\theta_Y) + \frac{L^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{L \cdot K}{2} \sum_{i=0}^{n-2} i. \end{aligned}$$

On vérifie que $\Gamma^2 = 2n(1-g)$, $\Gamma \cdot K = 4n(g-1)$

$$\chi(\theta_X) = \frac{n^2}{a} (g-1)^2 + (1-g) \frac{(2n^2-3n+1)}{6} + (g-1) n(n-1).$$

D'où

$$d(n) = (g-1) \left(\frac{n^2-1}{6} \right) \text{ qui est strictement positif dès que } n \geq 2.$$

D'autre part, si q est le genre d'une fibre de $X \xrightarrow{f} C$, on a :

$$q-1 = \frac{n^2}{a} (g-1) + \frac{n(n-1)}{2} .$$

Donc $\chi(\theta_X) = (q-1)(g-1) + d(n)$, ce qui montre b) et il est clair que l'on a c).

Bibliographie

- [1] K. KODAIRA.- "A certain type of irregular algebraic surface".
Journal d'Analyse Mathématique, vol. 19 (1967).
- [2] M. RAYNAUD.- Contre-exemple au "Vanishing theorem" en caractéristique $p > 0$. C.P. Ramanujam - A tribute Studies in Mathematics n° 8. Tata Institute of Fundamental Research. Bombay 1978.
- [3] L. SZPIRO.- "Sur le théorème de rigidité de Parsin et Arakelov".
Asterix Colloque de Rennes 1979.
- [4] H. TANGO.- "On the behaviour of extensions of vectors bundles under the frobenius inap". Nagoya Math. J. 48 (1972).
- [5] Exposé 2 (L. SZPIRO) de ce séminaire.
- [6] Exposé 3 (R. MENEGAUX) de ce séminaire.
- [7] C.S. SESHADRI.- L'opération de Cartier. Applications. Séminaire C. Chevalley : Variétés de Picard, exposé 6, 1958-1959.

Marguerite FLEXOR
Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématique, bât. 425
91405 ORSAY

FORMES DIFFÉRENTIELLES NON FERMÉES

par Robert FOSSUM *

exposé n° 5

0. Introduction.

Une forme différentielle globale sur une variété projective et lisse sur $\mathbb{C}$ est toujours fermée (Hodge). Il n'en est pas de même si le corps de base est de caractéristique positive. Les premiers exemples ont été donnés par D. Mumford dans son article [2]. On trouve une autre série d'exemples de formes globales non fermées dans le travail [4] de L. Szpiro. Nous reprenons ici ces deux constructions. On pourra noter que N.O. Nygaard donne dans [3] un critère qui assure la fermeture des 1-formes globales sur une surface projective et lisse en caractéristique $p > 0$.

1. Les exemples de D. Mumford.

Ces exemples sont basés sur le fait qu'en caractéristique positive on peut rendre holomorphe une 1-forme méromorphe par un morphisme du type Artin-Shreier. Par contre on notera que sur $\mathbb{C}$, il est facile de voir qu'on ne peut éliminer les pôles de 1-formes par image réciproque (cf. Van de Ven [6]).

LEMME 1 (D. Mumford). Soit X une surface projective et lisse sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Soit ω une 1-forme différentielle méromorphe sur X , alors il existe une surface projective et lisse $\tilde{X}$ sur k et un morphisme séparable et dominant $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ tel que $\varphi^* \omega$ soit holomorphe sur $\tilde{X}$.

Il suffit de construire pour tout point Q de X , une surface projective et lisse X_Q et un morphisme $\varphi_Q : X_Q \rightarrow X$ séparable et dominant, tel qu'il existe un voisinage U de Q dans X avec

* version française

$\varphi_Q^*(\omega)$ holomorphe sur $\varphi_Q^{-1}(U)$.

En effet, par produits fibrés et résolution des singularités des surfaces (Abhyancar) on se ramène à ce cas, en notant que X est quasi-compacte et que l'image réciproque d'une forme holomorphe reste holomorphe.

Pour les mêmes raisons on peut supposer que dans un voisinage V de Q on a :

$$\omega = A_0/A_1 dz$$

où z est un paramètre local en Q et où A_0 et A_1 sont holomorphes dans V .

Considérons alors le revêtement V' de V donné par :

$$z^p - A_1^p Z + z = 0.$$

On a $dz = A_1^p dZ$ et donc l'image réciproque de ω est égale à

$$A_0 A_1^{p-1} dZ.$$

On prend alors pour X_Q un modèle projectif et lisse (théorème d'Abhyancar) de V' dominant X par un morphisme φ_Q dont la restriction à V' est le revêtement d'Artin-Shreier introduit plus haut. L'image réciproque de Q étant un seul point dans V' il existe un ouvert U , voisinage de Q , tel que $\varphi_Q^*(\omega)$ soit holomorphe sur $\varphi_Q^{-1}(U)$.

EXEMPLE 1. Il est maintenant facile de construire une 1-forme différentielle globale et non fermée. Il suffit de partir dans le lemme 1 avec une forme ω (méromorphe) et non fermée. Comme on invoque la résolution des singularités d'Abhyancar dans la preuve du lemme 1, on risque de manquer de "contrôle" sur $\tilde{X}$. Pour pallier cet inconvénient D. Mumford donne l'exemple de $\omega = xdy$ sur $X = \mathbb{P}_k^2$ ($d\omega = dx \wedge dy \neq 0$).

2. Les exemples de Raynaud-Szpiro.

Ces exemples sont basés sur l'itération du changement de base par le morphisme de Frobenius pour une fibration semi-stable qui a été maintes fois célébrée dans ce séminaire (on se reportera à l'exposé 3 de ce séminaire pour la définition de fibration semi-stable [5]).

LEMME 2 (M. Raynaud). Soit X une surface lisse et projective sur un corps de caractéristique $p > 0$ et soit $f: X \rightarrow C$ un morphisme de X sur une courbe projective et lisse sur k qui soit une fibration semi-stable. Soit F le morphisme de Frobenius de C et soit $\tilde{X}^{(p)}$ la désingularisation minimale de $X \times_F C$. Alors toute 1-forme différentielle globale sur $\tilde{X}^{(p)}$ dont l'image dans $H^0(\tilde{X}^{(p)}, \Omega_{\tilde{X}^{(p)}/C}^1)$ ne provient pas de $H^0(X, \Omega_{X/C}^1)$, n'est pas fermée.

Notons $X^{(p)} = X \times_F C$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X}^{(p)} & & & & \\ & \searrow \beta & & \searrow \alpha & \\ & & X^{(p)} & \xrightarrow{\alpha} & X \\ & \searrow f^{(p)} & \downarrow \varphi & & \downarrow f \\ & & C & \xrightarrow{F} & C \end{array} .$$

Notons U l'ouvert de X formé des points qui sont lisses dans leurs fibres, et $\tilde{U}$ son image réciproque dans $X^{(p)}$ (ou $\tilde{X}^{(p)}$). On a le diagramme commutatif suivant où les isomorphismes sont dus à la normalité de X , $X^{(p)}$ et $\tilde{X}^{(p)}$.

$$\begin{array}{ccccc} H^0(C, \Omega_C^1) & \xrightarrow{\sim} & H^0(\tilde{U}, \varphi^* \Omega_C^1) & & \\ & \searrow & \searrow & & \\ H^0(\tilde{X}^{(p)}, \Omega_{\tilde{X}^{(p)}}^1) & \longrightarrow & H^0(\tilde{U}, \Omega_{\tilde{U}}^1) & \xrightarrow{\sim} & H^0(\tilde{U}, \Omega_{X^{(p)}}^1) \\ & \uparrow & & & \downarrow \\ H^0(X, \Omega_{X/C}^1) & \longrightarrow & H^0(U, \Omega_{U/C}^1) & \longrightarrow & H^0(\tilde{U}, \Omega_{X^{(p)}/C}^1) \end{array}$$

On remarque d'autre part que la suite exacte suivante est scindée canoniquement :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \varphi^* \Omega_C^1 \longrightarrow \Omega_{X^{(p)}}^1 \longrightarrow \Omega_{X^{(p)}/C}^1 \longrightarrow 0 .$$

En effet on a un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \alpha^* f^* \Omega_C^1 & \longrightarrow & \alpha^* \Omega_X^1 & \longrightarrow & \alpha^* \Omega_{X/C}^1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow & & \downarrow \wr \\
 0 & \longrightarrow & \varphi^* \Omega_C^1 & \longrightarrow & \Omega_{X(p)}^1 & \longrightarrow & \Omega_{X(p)/C}^1 \longrightarrow 0 .
 \end{array}$$

Pour démontrer le lemme 2 considérons une section globale ω de $\Omega_{X(p)}^1$ telle que $d\omega = 0$. Nous allons d'abord montrer que l'image $\bar{\omega}$ de ω dans $H^0(\tilde{U}, \Omega_{X(p)/C}^1)$ provient de $H^0(U, \Omega_{X/C}^1)$. Choisissons des paramètres locaux z_1 (base) et z_2 (fibre) en un point de $\tilde{U}$. Comme la suite exacte (*) est scindée et $H^0(\tilde{U}, f^{(p)*} \Omega_C^1) = H^0(C, \Omega_C^1)$ on peut supposer que ω est en ce point de la forme $A(z_1, z_2) dz_2$ (les formes globales sur C sont fermées !!). Puisque $d\omega = 0$ on a

$$\frac{\partial A}{\partial z_1} = 0$$

ce qui signifie que A est une fonction de z_1^p et z_2 ce qui veut bien dire que, localement, $\bar{\omega}$ provient de $\Omega_{X/C}^1$. L'homomorphisme $\Omega_{X/C}^1 \longrightarrow \Omega_{X(p)/C}^1$ étant injectif $\bar{\omega}$ provient bien d'une section appartenant à $H^0(U, \Omega_{X/C}^1)$.

Pour finir de montrer le lemme 2 il nous suffit donc de montrer qu'une section dans $H^0(U, \Omega_{X/C}^1)$ qui provient d'une section dans $H^0(\tilde{U}, \Omega_{X(p)/C}^1)$ qui se prolonge à $\tilde{X}^{(p)}$ en entier, se prolonge elle-même à X en entier. Pour ceci considérons le diagramme commutatif de suites exactes suivant où N (resp. $\tilde{N}$) est le conoyau de $\Omega_{X/C}^1 \longrightarrow \omega_{X/C}$ (resp. $\Omega_{X(p)/C}^1 \longrightarrow \omega_{X(p)/C}$)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_{X/C}^1) & \longrightarrow & H^0(X, \omega_{X/C}) & \longrightarrow & H^0(X, N) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H^0(\tilde{X}^{(p)}, \Omega_{X(p)/C}^1) & \longrightarrow & H^0(\tilde{X}^{(p)}, \omega_{X(p)/C}) & \longrightarrow & H^0(X, \tilde{N}) .
 \end{array}$$

Comme $\omega_{X/C}$ est localement libre on a

$$H^0(U, \Omega_{X/C}^1) \xrightarrow{\sim} H^0(U, \omega_{X/C}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \omega_{X/C}) .$$

Il nous reste donc à vérifier que $H^0(X, N) \longrightarrow H^0(X, \tilde{N})$ est injective ce qui est une évidence (cf. exposés 1 et 3 de ce séminaire pour la

structure de N et $\tilde{N}$ [1], [5]).

LEMME 3 (L. Szpiro). Soit $f: X \rightarrow C$ une fibration semi-stable non isotriviale et soit $X^{(n)}$ la désingularisée minimale du produit fibré de f avec le n -ième itéré du morphisme de Frobenius de C alors, pour une infinité d'entiers n on a :

$$\dim H^0(X^{(n)}, \Omega_{X^{(n)}/C}^1) > \dim H^0(X^{(n-1)}, \Omega_{X^{(n-1)}/C}^1) .$$

Remarquons qu'il est facile de voir que

$$\dim H^0(X^{(n)}, \Omega_{X^{(n)}/C}^1) \gg \dim H^0(X^{(n-1)}, \Omega_{X^{(n-1)}/C}^1)$$

il nous suffira donc de vérifier que $\dim H^0(X^{(n)}, \Omega_{X^{(n)}/C}^1)$ tend vers l'infini.

Pour ceci établissons d'abord le lemme suivant :

LEMME 4. Soit $f: X \rightarrow C$ une fibration semi-stable et soit S le sous-schéma fermé, réduit, de C formé des points dont la fibre n'est pas lisse. Alors on a une injection

$$(f_* \omega_{X/C}) \otimes \mathcal{O}_C(-S) \hookrightarrow f_* \Omega_{X/C}^1 .$$

Partons de la suite exacte :

$$0 \rightarrow \Omega_{X/C}^1 \rightarrow \omega_{X/C} \rightarrow N \rightarrow 0$$

où, rappelons-le $N = \bigoplus_{\text{non lisse dans sa fibre}} k(P)$.

On a donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow f_* \Omega_{X/C}^1 \rightarrow f_* \omega_{X/C} \rightarrow f_* N$$

$f_* N$ est un espace vectoriel annulé par l'idéal maximal de tout point de S . On en déduit l'inclusion voulue.

Pour finir de montrer le lemme 3 il nous suffit donc de vérifier que

$$\dim H^0(X^{(n)}, f_*^{(n)} \omega_{X^{(n)}/C}(-S)) \rightarrow \infty .$$

Soit $d = \text{degré } f_* \omega_{X/C}$, par l'exposé 3 de ce séminaire (L. Szpiro [5]) on sait que $d > 0$ (théorème 1 exposé 3) et que

degré $f_* \omega_{X^{(n)}/C} = p^n d$. Soit s le cardinal de S , par le théorème de Riemann-Roch sur C on a :

$$h^0(f_*^{(n)} \omega_{X^{(n)}/C}(-S)) \geq p^n d - gs - g(q-1)$$

où q est le genre de C . cqfd

EXEMPLES 2. Soit $f: X \rightarrow C$ une fibration semi-stable et non isotriviale et soit $X^{(n)}$ défini comme au lemme 3, alors pour une infinité d'entiers n , $X^{(n)}$ possède des 1-formes globales non fermées.

Pour finir d'établir ces exemples il nous suffit de montrer, en vertu des lemmes 2 et 3 que l'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(C, \Omega_C^1) \rightarrow H^0(X^{(n)}, f_*^{(n)} \Omega_{X^{(n)}}^1) \rightarrow H^0(X^{(n)}, f_*^{(n)} \Omega_{X^{(n)}/C}^1) \rightarrow 0$$

pour tout $n > 0$.

Etablissons d'abord l'exactitude de la suite :

$$0 \rightarrow \Omega_C^1 \rightarrow f_*^{(n)} \Omega_{X^{(n)}}^1 \rightarrow f_*^{(n)} \Omega_{X^{(n)}/C}^1 \rightarrow 0.$$

Pour ceci il suffit de vérifier que l'application canonique

$$f_*^{(n)} \Omega_{X^{(n)}/C}^1 \xrightarrow{\delta} R^1 f_*^{(n)} \Omega_{X^{(n)}}^1 \otimes \Omega_C^1 \text{ est nulle}$$

- $R^1 f_*^{(n)} \Omega_{X^{(n)}}^1 \otimes \Omega_C^1$ étant localement libre sur C δ est nulle sur la partie de torsion de $f_*^{(n)} \Omega_{X^{(n)}/C}^1$

- n étant positif strictement δ est nulle au point générique de C car elle y est égale à l'application de Kodaira-Spencer de $f^{(n)}$ (cf. exposé 3 [5])

- δ est donc nulle.

Il nous reste à montrer que l'application canonique

$$H^1(C, \Omega_C^1) \rightarrow H^1(C, f_* \Omega_X^1) \text{ est injective. C'est un fait classique :}$$

$H^1(C, \Omega_C^1)$ est de dimension 1 et en composant l'application considérée avec l'application canonique $H^1(C, f_* \Omega_X^1) \rightarrow H^1(X, \Omega_X^1)$ l'image d'un générateur de $H^1(C, \Omega_C^1)$ donne la classe des fibres de f dans $H^1(X, \Omega_X^1)$ qui n'est pas nulle !.

REMARQUE 1. Il serait intéressant de savoir si $n=1$ suffit dans le lemme 3, ou dans les exemples 2.

REMARQUE 2. En prenant un pinceau de Lefschetz, quitte à éclater un nombre fini de points, on peut considérer une surface comme une fibration semi-stable non isotriviale sur P^1 . On obtient ainsi l'énoncé suivant :

soient k un corps de caractéristique $p > 0$ et K un corps de fonctions de deux variables sur k . Soit f un élément général de K alors pour une infinité d'entiers n $K(f^{1/p^n})$ possède un modèle projectif et lisse qui a des 1-formes globales non fermées.

Bibliographie

- [1] Mireille DESCHAMPS.- "Réduction semi-stable" exposé 1, ce séminaire.
- [2] David MUMFORD.- "Pathologies of modular surfaces". Amer. J. Math. 83, 339-342 (1961).
- [3] Niels O. NYGAARD.- "Closeness of regular 1-forms on algebraic surfaces". Ann. Sc. Ecole Normale Supérieure (4) 12, 33-45 (1979).
- [4] Lucien SZPIRO.- "Sur le théorème de rigidité de Parshin et Arakelov". Colloque de Geom. Alg. Rennes II, 1978, Astérisque n° 64, 169-202 (1979).
- [5] Lucien SZPIRO.- "Propriétés numériques du faisceau dualisant relatif" exposé 3, ce séminaire.
- [6] A. VAN DE VEN.- "On the Chern numbers of surfaces of general type". Inventiones Math. 36, 285-293 (1976).

Robert FOSSUM
Dept. of Math.
Univ. of Illinois
URBANA (Ill.) U.S.A.

LE NOMBRE MINIMUM DE FIBRES SINGULIÈRES

D'UNE COURBE STABLE SUR $\mathbb{P}^1$

par Arnaud BEAUVILLE

exposé n° 6

Cet exposé tente de répondre à la question suivante, posée par Szpiro. Une famille non constante de courbes stables de genre g sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ admet un certain nombre de fibres singulières ; quel est le plus petit nombre possible (en fonction de g) ?

Sauf mention du contraire, les variétés considérées sont complexes ; mais nous dirons quelques mots sur la situation en caractéristique p , qui est plus compliquée.

1. Résultats sans hypothèse de stabilité.

Si on enlève la condition de stabilité, le résultat est, je pense, bien connu :

PROPOSITION 1. 1) Toute famille de courbes sur $\mathbb{P}^1$, à modules variables, admet au moins 3 fibres singulières.

2) Pour tout $g \geq 1$, il existe une famille de courbes de genre g sur $\mathbb{P}^1$ à modules variables, admettant exactement 3 fibres singulières.

(par "famille de courbes" on entend un morphisme propre et plat $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ dont les fibres sont des courbes connexes ; "à modules variables" signifie que les fibres lisses de f ne sont pas toutes isomorphes - d'aucuns diraient "non isotriviale").

DÉMONSTRATION. Soit U le plus grand ouvert de $\mathbb{P}^1$ au-dessus duquel f est lisse, et soit $\tilde{U}$ son revêtement universel. Le système local $R^1 f_*(\mathbb{Z})$ devient constant au-dessus de $\tilde{U}$. En choisissant une base symplectique, on définit un morphisme de $\tilde{U}$ dans le demi-espace de Siegel H_g ; d'après le théorème de Torelli et l'hypothèse que la famille est à modules variables, ce morphisme n'est pas constant.

Puisque H_g est isomorphe à un domaine borné, ceci entraîne que U n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$ ni à $\mathbb{P}^1$ (théorème de Liouville), donc $\mathbb{P}^1 - U$ contient au moins trois points.

Pour $t \in \mathbb{P}^1$ et $n \geq 3$, considérons la courbe C_t d'équation affine $y^2 = x^n - ntx + (n-1)t$. Pour $t \neq 0, 1, \infty$, c'est une courbe hyperelliptique lisse, de genre $[\frac{n-1}{2}]$; on vérifie facilement que la famille $(C_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ est à modules variables. Ceci achève de prouver la proposition.

Que peut-on dire en caractéristique p ? La partie 2) de la proposition reste encore valable: si $p \neq 2$, on peut reprendre la construction précédente; le cas $p=2$ est laissé au lecteur en exercice. La partie 1) n'est plus valable en caractéristique p ; on a cependant le résultat suivant:

PROPOSITION 2. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p . Si $p > 2g+1$, toute famille de courbes de genre g sur $\mathbb{P}_k^1$, à modules variables, admet au moins 3 fibres singulières.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que l'hypothèse $p > 2g+1$ entraîne qu'il existe un nombre premier ℓ , différent de p et de 2, tel que l'ordre du groupe $GL(2g; \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ ne soit pas divisible par p .

En effet, l'ordre de $GL(2g, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est égal à $(\ell^{2g}-1)(\ell^{2g-1}-1)\dots(\ell-1)\ell^{g(2g-1)}$. Il suffit de choisir ℓ de façon que sa classe modulo p soit un générateur du groupe cyclique $\mathbb{F}_p^*$, et soit donc d'ordre $p-1 > 2g$ (on peut choisir ℓ premier impair en vertu du théorème de la progression arithmétique).

Supposons maintenant $g \geq 2$. Notons $\mathbb{G}_m$ la droite affine (sur k) privée de l'origine. Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver qu'une famille $f: X \rightarrow \mathbb{G}_m$ de courbes lisses de genre g est nécessairement isotriviale. Choisissons ℓ comme ci-dessus, et considérons le faisceau localement constant $R^1 f_*(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Il correspond à un homomorphisme:

$$\rho: \pi_1(\mathbb{G}_m, \cdot) \rightarrow GL(2g, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}).$$

Puisque $GL(2g, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est d'ordre premier à p , ρ se factorise à travers le π_1 modéré de $\mathbb{G}_m$; cela signifie qu'il existe un entier k tel que, pour la fibration $f': X' \rightarrow \mathbb{G}_m$ image réciproque de f par le morphisme $x \mapsto x^k$, le faisceau $R^1 f'_*(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ soit constant. Or ce faisceau s'identifie au faisceau des points d'ordre ℓ de la

jacobienne relative $\text{Pic}^0(X'/\mathbb{G}_m)$; le fait qu'il est constant entraîne que ce schéma abélien a réduction semi-stable en 0 et à l'infini ([D], cor. 5.18). Il en est de même par conséquent de la famille de courbes $f': X' \longrightarrow \mathbb{G}_m$ ([D], prop. 5.7) ; autrement dit, il existe une fibration semi-stable $\tilde{f}: \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ qui prolonge f' . Ayant au plus 2 fibres singulières, la fibration $\tilde{f}$ est isotriviale ([S], Th. 3.3), et il en est de même de la fibration f .

Il reste à traiter le cas $g=1$. Soit $f: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration en courbes de genre 1, lisse en dehors de $\{0, \infty\}$. Quitte à remplacer f par la fibration jacobienne associée, on peut supposer que f admet une section. Considérons le morphisme classifiant $j: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$; il se factorise en $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{r} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{j'} \mathbb{P}^1$, où r est radical et où j' est séparable, ramifié en 0, 1728 et à l'infini ; de plus, puisque $p > 3$, l'indice de ramification d'un point de $j'^{-1}(0)$ (resp. $j'^{-1}(1728)$) est divisible par 2 (resp. 3). Si on note n le degré de j' , la formule de Riemann-Hurwitz conduit à l'inégalité :

$$-2 \gg -2n + \frac{n}{2} + \frac{2n}{3} + n - 2$$

soit $n < 0$, d'où contradiction.

Il est facile de voir que la condition $p > 2g+1$ est nécessaire : en caractéristique $p > 2$, l'équation

$$y^2 = x^p + tx^{p-1} + 1 \quad (t \in \mathbb{G}_m)$$

décrit une famille lisse sur $\mathbb{G}_m$, à modules variables, de courbes hyperelliptiques de genre g , avec $p=2g+1$. Il est plus délicat de construire des familles lisses à modules variables sur la droite affine ; Raynaud m'a indiqué, en caractéristique 2 et en genre $g \gg 2$, la courbe d'équation $y^2 + y = x^{2g+1} + tx$ ($t \in \mathbb{A}^1$). En caractéristique p , on peut de même considérer la courbe $y^p + y = x^{kp-1} + tx$ ($t \in \mathbb{A}^1$).

Par contre l'argument de la proposition (modifié pour tenir compte de la caractéristique 2 ou 3) montre qu'il n'existe pas de famille lisse de courbes elliptiques, à modules variables, sur la droite affine.

2. Énoncé du théorème principal.

Nous ne considérons désormais que des familles $Y \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ stables. La surface Y peut avoir dans ce cas des points doubles (de type A_n). En les résolvant par éclatements successifs, on arrive à une fibration semi-stable $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$; cela signifiera pour nous, par définition, que :

- (i) la surface X est lisse ;
- (ii) les fibres sont des courbes connexes de genre ≥ 1 , ayant au plus des points doubles ordinaires ;
- (iii) il n'existe pas de courbe exceptionnelle sur X contenue dans une fibre.

On dit qu'une telle fibration est triviale s'il existe une courbe C et un isomorphisme $u: X \longrightarrow C \times \mathbb{P}^1$ tel que $pr_2 \circ u = f$.

THÉOREME. Soit $f: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration semi-stable non triviale.

- 1) f admet au moins 4 fibres singulières.
- 2) Supposons que f ait exactement 4 fibres singulières. Alors la surface X est algébriquement simplement connexe et vérifie $p_g = 0$. Les composantes irréductibles des fibres singulières sont des courbes rationnelles (éventuellement singulières) ; les classes de ces composantes engendrent un hyperplan dans le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$.

Les conditions imposées par 2) sont très contraignantes, à la fois pour la surface et pour le pinceau de courbes qu'elle doit contenir. La surface X peut être :

- (i) une surface rationnelle ;
- (ii) une surface elliptique sur $\mathbb{P}^1$, telle que la fibration elliptique admette exactement deux fibres multiples, de multiplicités premières entre elles, et que la surface fibrée en jacobiniennes associée soit rationnelle (cf. [Do]) ;
- (iii) une surface de type général (avec $p_g = 0$ et $\pi_1^{\text{alg}} = \{1\}$).

(Un exemple de surface du type (iii) vient d'être donné par R. Barlow).

Nous verrons plus loin un exemple de fibration semi-stable avec 4 fibres singulières ; les fibres sont de genre un, et la surface X rationnelle. Je ne connais pas d'exemple avec des fibres de genre ≥ 2 , et j'ai tendance à penser qu'il n'en existe pas.

3. Quelques lemmes.

Nous regroupons dans ce numéro quelques faits bien connus dont nous aurons besoin.

LEMME 1. Dans la situation du théorème, soient C une fibre singulière, N sa normalisée, g le genre de la fibre générique ; on note $g(N) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(N, \mathcal{O}_N)$ et $q = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

a) On a $\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}} H^1(C, \mathbb{Z}) = g + g(N)$.

b) On a $g(N) \geq q$.

DÉMONSTRATION. Notons $\pi : N \rightarrow C$ le morphisme canonique, Σ l'ensemble des points doubles de C , $\mathbb{Z}_C$ (resp. $\mathbb{Z}_N$) le faisceau constant de fibre $\mathbb{Z}$ sur C (resp. N), $\mathbb{Z}(s)$ (resp. $\mathbb{C}(s)$) le faisceau sur C nul en dehors de s et de fibre $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{C}$) en s . Considérons les suites exactes :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}_C \rightarrow \pi_* \mathbb{Z}_N \rightarrow \bigoplus_{s \in \Sigma} \mathbb{Z}(s) \rightarrow 0$$

$$(1') \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_N \rightarrow \bigoplus_{s \in \Sigma} \mathbb{C}(s) \rightarrow 0 ,$$

ainsi que les suites exactes de cohomologie associées :

$$(2) \quad 0 \rightarrow H^0(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(N, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^{\Sigma} \rightarrow H^1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(N, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

$$(2') \quad 0 \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^0(N, \mathcal{O}_N) \rightarrow \mathbb{C}^{\Sigma} \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(N, \mathcal{O}_N) \rightarrow 0$$

Notant n le nombre de points doubles de C et c le nombre de ses composantes irréductibles, on en déduit :

$$(3) \quad \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}} H^1(C, \mathbb{Z}) = 2g(N) + n - c + 1$$

$$(3') \quad g = g(N) + n - c + 1$$

d'où par soustraction l'assertion a).

Pour prouver b), il suffit de prouver que l'homomorphisme $J(N) \rightarrow \operatorname{Alb}(X)$ est surjectif. Notons Q son conoyau et $\alpha : X \rightarrow Q$ l'application déduite du morphisme d'Albanese. Par construction, l'image de la fibre C par α est réduite à un point ; le lemme de rigidité ([M], prop. 6.1) entraîne qu'il en est de même pour toutes les fibres de f , et plus précisément qu'il existe un morphisme $\beta : \mathbb{P}^1 \rightarrow Q$ tel que $\alpha = \beta \circ f$. Un tel morphisme étant nécessairement trivial, l'image de α est réduite à un point ; puisque $\alpha(X)$ engendre Q , on a $Q = \{0\}$, d'où l'assertion b).

Rappelons qu'on note $NS(X)_{\mathbb{Q}}$ le sous-espace vectoriel de $H^2(X, \mathbb{Q})$ engendré par les classes algébriques, et $\rho(X)$ sa dimension ("nombre de Picard").

LEMME 2. Soient $C_1, \dots, C_p$ les fibres réductibles de f , et soit c_i le nombre de composantes irréductibles de C_i . Les composantes des C_i ($1 \leq i \leq p$) engendrent dans $NS(X)_{\mathbb{Q}}$ un sous-espace de dimension $1 + \sum_i (c_i - 1)$; en particulier, on a

$$\rho(X) \geq 2 + \sum_i (c_i - 1).$$

DÉMONSTRATION. Soit P l'orthogonal de C dans $NS(X)_{\mathbb{Q}}$ (pour la forme d'intersection); munissons l'espace quotient $\bar{P} = P/\mathbb{Q}C$ de la forme φ induite par la forme d'intersection. Pour $1 \leq i \leq p$, soit P_i le sous-espace de $NS(X)_{\mathbb{Q}}$ engendré par les composantes de C_i , et soit $\bar{P}_i = P_i/\mathbb{Q}C$ son image dans $\bar{P}$; on a $\dim \bar{P}_i = c_i - 1$. Les sous-espaces $\bar{P}_i$ sont deux à deux orthogonaux dans $\bar{P}$, et la restriction de φ à $\bar{P}_i$ est non dégénérée (cf. par exemple [B], cor. VIII.4). Ceci entraîne que les sous-espaces $\bar{P}_i$ sont en somme directe, donc que

$$\dim \sum_i \bar{P}_i = \sum_i (c_i - 1)$$

et par suite $\dim \sum_i P_i = 1 + \sum_i (c_i - 1)$.

La dernière assertion résulte de ce que l'inclusion $P \subset NS(X)_{\mathbb{Q}}$ est stricte.

4. Démonstration du théorème.

Notons $C_1, \dots, C_r$ les fibres singulières de f ; nous supposons $r \leq 4$. Si $r < 4$, notons $C_{r+1}, \dots, C_4$ des fibres lisses quelconques de f . On désigne par N_i la normalisée de C_i et par c_i le nombre de composantes irréductibles de C_i .

A. Le calcul de base.

Calculons la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique $\chi(X)$ de X . En désignant par C une fibre lisse de f , on a (par exemple d'après [B], lemme VI.4) :

$$\chi(X) = \chi(P^1) \cdot \chi(C) + \sum_{i=1}^4 (\chi(C_i) - \chi(C)).$$

Calculons la différence $\chi(C_i) - \chi(C)$. On a :

$$b_0(C_i) = b_0(C) = 1, \text{ d'où } b_0(C_i) - b_0(C) = 0$$

$$b_2(C_i) = c_i \text{ et } b_2(C) = 1, \text{ d'où } b_2(C_i) - b_2(C) = c_i - 1$$

et d'après le lemme 1, a) : $b_1(C) - b_1(C_i) = g - g(N_i)$.

On obtient par conséquent

$$\chi(X) = 4 - 4g + \sum_{i=1}^4 (g - g(N_i)) + \sum_{i=1}^4 (c_i - 1).$$

D'autre part on a

$$\chi(X) = 2 - 2b_1(X) + b_2(X) = 2 - 4g + b_2(X).$$

En comparant, on obtient l'égalité

$$b_2(X) = 2 + \sum_i (c_i - 1) + \sum_i (g - g(N_i)) \quad (*)$$

On déduit alors des lemmes 1 b) et 2 les inégalités

$$2 + \sum_i (c_i - 1) \leq \rho(X) \leq b_2(X) \leq 2 + \sum_i (c_i - 1);$$

les termes extrêmes étant égaux, on a en fait égalité. Ceci a plusieurs conséquences :

(i) On a $p_g(X) = 0$: cela résulte de l'égalité $\rho(X) = b_2(X)$.

(ii) Compte tenu du lemme 2, l'égalité $\rho(X) = 2 + \sum_i (c_i - 1)$ signifie que les composantes des C_i ($1 \leq i \leq 4$) engendrent un hyperplan dans $NS(X)_{\mathbb{Q}}$.

(iii) On a $g(N_i) = g$ pour $1 \leq i \leq 4$ (à cause de l'égalité $b_2(X) = 2 + \sum_i (c_i - 1)$, comparée à (*)).

B. Démonstration de l'assertion 1).

Supposons que f ait au plus 3 fibres singulières. La courbe C_4 étant alors lisse, on a $g(C_4) = g$ d'après ce qui précède, d'où $g = q$. On a donc $\dim J(N_i) = g$ pour $1 \leq i \leq 3$, ce qui signifie que la jacobienne généralisée $J(C_i)$ est une variété abélienne (de dimension g). Les jacobiniennes $J(f^{-1}(t))$, pour $t \in \mathbb{P}^1$, forment donc une famille de variétés abéliennes principalement polarisées sur $\mathbb{P}^1$ (autrement dit, $\text{Pic}^0(X/\mathbb{P}^1)$ est un schéma abélien sur $\mathbb{P}^1$); une telle famille est constante (on peut le voir en raisonnant comme dans la

démonstration de la prop. 1). Par le théorème de Torelli, les fibres lisses de f sont toutes isomorphes. Puisque f est une fibration semi-stable sur $\mathbb{P}^1$, on en conclut que f est triviale, contrairement à l'hypothèse.

Nous supposons désormais que f a exactement 4 fibres singulières.

C. Le cas $q \gg 2$.

La surface X , satisfaisant à $p_g = 0$ et $q \gg 2$, est réglée ([B], lemme VI.1 et prop. VI.2) ; il existe donc une courbe lisse B de genre q et un morphisme $p: X \rightarrow B$ dont les fibres F_b ($b \in B$) sont rationnelles. Puisque $g(N_1) = q$, il résulte de la formule de Riemann-Hurwitz que C_1 est réunion d'une section de p et d'un certain nombre de composantes des courbes F_b ($b \in B$). Mais on a alors $C.F_b = 1$, ce qui entraîne que les fibres lisses de f sont des sections de p ; en particulier elles sont toutes isomorphes à B , ce qui permet comme plus haut d'aboutir à une contradiction.

Nous aurons besoin dans la suite de l'observation suivante :

LEMME 3. Soit $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration semi-stable, et soit $r: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement étale connexe. Alors la fibration $f \circ r: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ est semi-stable et admet le même nombre de fibres singulières que f .

En effet, les fibres de $\tilde{f} = f \circ r$ sont des revêtements étales des fibres de f ; le seul point non trivial à démontrer est le fait qu'elles sont connexes. Si elles ne l'étaient pas, $\tilde{f}$ se factoriserait en $\tilde{X} \rightarrow R \xrightarrow{u} \mathbb{P}^1$, où R est une courbe lisse et u un revêtement ramifié : la fibre de $\tilde{f}$ au-dessus d'un point de ramification de u serait non réduite, ce qui est absurde.

D. Le cas $q = 1$.

La fibration d'Albanese fournit encore un morphisme $p: X \rightarrow B$ à fibres connexes, avec $g(B) = 1$ ([B], prop. V.15). Fixons un indice i ($1 \leq i \leq 4$) et posons $C = C_i$, $N = N_i$. Puisque $g(N) = 1$, la courbe C est réunion de courbes rationnelles, contenues dans les fibres de p , et d'une courbe irréductible C' , dont la normalisée N' est une courbe elliptique. Le morphisme p induit un revêtement étale $\pi: N' \rightarrow B$.

Si π est de degré un, on peut appliquer le raisonnement de la partie C ; supposons donc $\deg(\pi) \geq 1$. Posons $\tilde{X} = X \times_B N'$ et notons $r: \tilde{X} \rightarrow X$ la première projection. Posons $\tilde{C}' = r^{-1}(C')$, $\tilde{C} = r^{-1}(C)$; soit $\tilde{N}'$ (resp. $\tilde{N}$) la normalisée de $\tilde{C}'$ (resp. $\tilde{C}$), de sorte qu'on a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{N}' & \longrightarrow & N' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{C}' & \xrightarrow{r} & C' \end{array} .$$

Par construction, le revêtement étale $\tilde{N}' \rightarrow N'$ admet une section ; puisque $\deg(r) \geq 1$, on a donc $g(\tilde{N}') \geq 2$. Ainsi la normalisée $\tilde{N}$ de la fibre $\tilde{C}$ de $\tilde{f}$ est de genre ≥ 2 .

D'autre part, d'après le lemme 3, la fibration $\tilde{f}$ possède les propriétés (i) à (iii) de la partie A. On a donc $p_g(\tilde{X}) = 0$, d'où $q(\tilde{X}) = 1$ puisque $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \deg(r) \cdot \chi(\mathcal{O}_X) = 0$. Mais on a aussi (propriété (iii)) $g(\tilde{N}) = q(\tilde{X}) = 1$, d'où une contradiction avec ce qui précède.

E. Fin de la démonstration.

On a donc $q = 0$. Notons que la propriété (iii) de A entraîne alors $g(N_1) = 0$, autrement dit les composantes irréductibles des fibres sont des courbes rationnelles. Il reste à montrer que X est algébriquement simplement connexe, c'est-à-dire n'admet pas de revêtement étale non trivial. Or soit $r: \tilde{X} \rightarrow X$ un tel revêtement ; d'après le lemme 3 et la partie A, on a $p_g(\tilde{X}) = 0$, d'où $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) < 1$. Mais d'autre part :

$$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \deg(r) \cdot \chi(\mathcal{O}_X) = \deg(r) \geq 2 ,$$

d'où une contradiction. Ceci achève la démonstration du théorème.

REMARQUE. Les lemmes 1 et 2 restent valables en caractéristique p , ainsi que la partie A de la démonstration et le début de B (il faut prendre $q = \frac{1}{2}b_1(X) = \dim \text{Alb}(X)$; noter qu'on ne peut plus conclure $p_g(X) = 0$ de l'égalité $\rho(X) = b_2(X)$). On obtient donc, en caractéristique quelconque, le résultat suivant :

Soit $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration semi-stable, admettant au plus 3 fibres singulières. Alors $\text{Pic}^0(X/\mathbb{P}^1)$ est un schéma abélien sur $\mathbb{P}^1$. Autrement dit, les composantes d'une fibre singulière sont lisses, et le graphe d'intersection de ces composantes est un arbre.

Des fibrations semi-stables ayant cette dernière propriété ont été construites par Moret-Bailly [MB] ; ses exemples ont plus de trois fibres singulières. D'autre part Szpiro a montré qu'une fibration semi-stable non triviale sur $\mathbb{P}^1$ a (en caractéristique quelconque) au moins 3 fibres singulières [S].

5. Exemples.

EXEMPLE 1. Une fibration semi-stable avec 4 fibres singulières ($g=1$). Il s'agit de la "cubique de Hesse", d'équation

$$C_t : (X^3 + Y^3 + Z^3) - 3t XYZ = 0 \quad (t \in \mathbb{P}^1).$$

Cette équation définit un pinceau de cubiques dans $\mathbb{P}^2$, admettant 9 points base distincts. Soient X la surface obtenue en éclatant ces 9 points dans $\mathbb{P}^2$, et $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme défini par le pinceau : c'est une fibration semi-stable, à fibres de genre 1. Un calcul facile montre que f admet exactement 4 fibres singulières (pour $t = 1, \rho, \rho^2, \infty$, avec $\rho = e^{2i\pi/3}$), qui sont isomorphes à la réunion de 3 droites non concourantes dans $\mathbb{P}^2$.

Cette famille de cubiques a une propriété très particulière : les 9 points d'inflexion d'une courbe C_t lisse sont les points base du pinceau (la hessienne de C_t est elle-même une cubique du pinceau). En termes plus savants, on a construit la famille modulaire de courbes elliptiques sur $H/\Gamma(3) \cong \mathbb{P}^1 - \{1, \rho, \rho^2, \infty\}$.

EXEMPLE 2. Fibrations semi-stables avec 6 fibres singulières (g quelconque). On part d'une courbe lisse C , d'un morphisme $\varphi: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré n et d'un automorphisme u de $\mathbb{P}^1$. On fait les hypothèses suivantes :

- (i) les points de ramification de φ sont tous d'indice 2 ;
- (ii) le lieu de ramification R de φ dans $\mathbb{P}^1$ est stable par u , mais ne contient aucun point fixe de u .

Dans $C \times \mathbb{P}^1$, considérons les diviseurs Γ_φ et $\Gamma_{u \circ \varphi}$, graphes de φ et $u \circ \varphi$ respectivement. Ils sont linéairement équivalents, par exemple parce que le groupe $\text{PGL}(2)$ est une variété rationnelle. Il existe donc un revêtement double $\pi: X' \rightarrow C \times \mathbb{P}^1$ ramifié le long de $\Gamma_\varphi \cup \Gamma_{u \circ \varphi}$. Notons $g: X' \rightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme composé de π et de la seconde projection. Pour $t \in \mathbb{P}^1$, la fibre $g^{-1}(t)$ est un revêtement double de C , ramifié le long du diviseur $\varphi^{-1}(t) + \varphi^{-1}(u^{-1}(t))$. Ce

diviseur est réduit sauf pour $t \in R$, ou lorsque t est un des deux points fixes de u ; dans ces deux cas, les points non réduits sont de multiplicité 2.

Il en résulte que les fibres de g sont stables. En éclatant les points doubles de X' (à savoir les points au-dessus de $\Gamma_\varphi \cap \Gamma_{u \circ \varphi}$), on obtient une fibration semi-stable $X \rightarrow \mathbb{P}^1$, qui admet $\text{Card}(R) + 2$ fibres singulières. Le genre des fibres est $n - 1 + 2g(C)$.

Nous allons maintenant construire des morphismes $\varphi: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ satisfaisant à l'hypothèse (i), avec $\text{Card}(R) = 4$; il est clair qu'on peut ensuite trouver un automorphisme u de $\mathbb{P}^1$ satisfaisant à (ii). Si n est pair, soit $r: E \rightarrow \mathbb{P}^1$ un revêtement double ramifié en 4 points (donc $g(E) = 1$), et soit $s: C \rightarrow E$ un revêtement étale de degré $\frac{n}{2}$; le morphisme $\varphi = r \circ s$, de degré n , répond à la question. La fibration semi-stable associée a 6 fibres singulières, et ses fibres sont de genre $n+1$.

Si n est impair, on montre de même qu'il existe un morphisme $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré n , satisfaisant à (i), avec $\text{Card}(R) = 4$ (on construit φ comme revêtement associé à un homomorphisme $\pi_1(\mathbb{P}^1 - R) \rightarrow \mathfrak{S}_n$ convenable). On obtient ainsi une famille semi-stable de courbes de genre $n-1$, avec 6 fibres singulières.

REMARQUES. 1) En appliquant ce qui précède au morphisme $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré 4 défini par $\varphi(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$ (quotient de $\mathbb{P}^1$ par $(\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/2)$), qui satisfait à (i) avec $\text{Card}(R) = 3$, on obtient une fibration semi-stable (sur $\mathbb{P}^1$) à fibres de genre 3, avec 5 fibres singulières.

2) En considérant de même le morphisme de degré 2 $t \mapsto t^2$ de $\mathbb{P}^1$ dans lui-même, on obtient une autre famille semi-stable de courbes elliptiques avec 4 fibres singulières, définie par l'équation

$$y^2 = (x^2 - t)(x^2 - \frac{1}{t}) \quad (t \in \mathbb{P}^1).$$

C'est la courbe modulaire pour un sous-groupe d'indice 2 dans $\Gamma(2)$, contenant $\Gamma(4)$.

Bibliographie

- [B] A. BEAUVILLE.- Surfaces algébriques complexes. Astérisque n° 54 (1978).
- [D] M. DESCHAMPS.- Réduction semi-stable. Exposé n° 1, ce volume.
- [Do] I. DOLGACHEV.- Algebraic surfaces with $q=p_g=0$. Notes du CIME (1977), à paraître (?).
- [M] D. MUMFORD.- Geometric invariant theory. Springer-Verlag (1965).
- [MB] L. MORET-BAILLY.- Famille de courbes et de variétés abéliennes sur $\mathbb{P}^1$. Exposés n° 7, 8, ce volume.
- [S] L. SZPIRO.- Exposé n° 3, ce volume.

Arnaud BEAUVILLE
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 PALAISEAU Cédex

FAMILLES DE COURBES ET DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES SUR $\mathbb{P}^1$

I. DESCENTE DES POLARISATIONS

par Laurent MORET-BAILLY

exposé n° 7

Cette première partie a pour objet l'étude du problème suivant : étant donné un morphisme surjectif $f: A \rightarrow B$ de schémas abéliens, et un faisceau inversible L sur A , trouver les faisceaux inversibles M sur B tels que $f^*M \simeq L$. La réponse est donnée par le th. 4.1 ; elle nécessite l'introduction du morphisme φ_L (§1) et du groupe $\underline{G}(L)$ (§3), reliés par une suite exacte :

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \underline{G}(L) \rightarrow A \xrightarrow{\varphi_L} \hat{A}$$

et l'ensemble des solutions M du problème est alors en bijection naturelle avec l'ensemble des sous-groupes de $\underline{G}(L)$ relevant le noyau de f . En particulier, si φ_L est fini (par exemple si L est ample) et la base un corps algébriquement clos, l'existence de M équivaut aux deux conditions :

- . $\text{Ker } f$ est contenu dans $K(L) = \text{Ker } \varphi_L$
- . il est totalement isotrope pour la "forme-commutateur" e^L , forme bilinéaire alternée $K(L) \times K(L) \rightarrow \mathbb{G}_m$, définie à l'aide de l'extension centrale

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \underline{G}(L) \rightarrow K(L) \rightarrow 1.$$

Par ailleurs le §5 est consacré aux résultats de Mumford sur les représentations de $\underline{G}(L)$ lorsque φ_L est fini et la base un corps algébriquement clos ; enfin l'appendice donne une démonstration de la "formule de Weil-Barsotti" $\hat{A} \simeq \underline{\text{Ext}}^1(A, \mathbb{G}_m)$.

Tous les résultats présentés ici sont bien connus, la principale référence étant [AV]. Pour les généralités sur les schémas abéliens le lecteur est renvoyé à [GIT].

Tous les schémas abéliens considérés sont supposés avoir un schéma de Picard.

1. Le morphisme φ_L et le groupe $K(L)$.

1.1. Soient S un schéma noethérien, et A un S -schéma abélien de dimension relative g . On note $\hat{A}$ le dual de A , qui n'est autre que le S -schéma en groupes $\text{Pic}_{A/S}^\tau$: c'est encore un S -schéma abélien de dimension relative g . Soit maintenant L un faisceau inversible sur A . Nous allons définir un morphisme $\varphi_L : A \rightarrow \hat{A}$, de la façon suivante : si S' est un S -schéma, et si $x \in A(S')$, on note $\varphi_L(x)$ la classe dans $\text{Pic}_{A/S}(S')$ du faisceau inversible $T_x^*(L_{S'}) \otimes L_{S'}^{-1}$, où $L_{S'}$ est l'image réciproque de L sur $A \times_S S'$, et où T_x désigne la translation par x dans $A \times_S S'$.

(En abrégé : si $x \in A$, $\varphi_L(x)$ est la classe dans $\text{Pic}_{A/S}$ de $T_x^*(L) \otimes L^{-1}$; dans la suite, l'incantation : "soit S' un S -schéma, etc.." sera souvent omise. Le lecteur, s'il le juge bon, aura ainsi le plaisir de rétablir lui-même le rituel complet au cours des longues soirées d'hiver).

Ceci nous donne un morphisme de S -schémas de A dans $\text{Pic}_{A/S}$. Comme les fibres de A sont connexes, il se factorise bien par le sous-schéma $\hat{A}$ de $\text{Pic}_{A/S}$. De plus comme il respecte les sections nulles, c'est un morphisme de groupes. Le noyau de φ_L est noté $K(L)$.

On dit que L est non dégénéré si φ_L est fini. Remarquons qu'alors φ_L est surjectif, et donc plat : en effet le critère de platitude par fibres (EGA IV, 11.3.10) nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps ; mais dans ce cas φ_L est plat génériquement sur $\hat{A}$ puisque $\hat{A}$ est lisse, d'où la conclusion puisque φ_L est un épi-morphisme de groupes.

1.2. Voici quelques propriétés de φ_L , énoncées sans démonstrations (cf. [AV]).

- L'application $L \mapsto \varphi_L$ définit un morphisme de S -foncteurs en groupes :

$$\text{Pic}_{A/S} \longrightarrow \text{Hom}(A, \hat{A})$$

dont le noyau est précisément $\hat{A}$.

- Si S est le spectre d'un corps, on a $\deg \varphi_L = \chi(L)^2$ ([AV], §16) (avec la convention habituelle : si φ_L n'est pas fini on pose $\deg \varphi_L = 0$). En particulier : φ_L est non dégénéré $\iff \chi(L) \neq 0$.

- Au passage, profitons-en pour rappeler (toujours sur un corps) :

. le théorème de Riemann-Roch : si D est un diviseur sur A , alors $\chi(\mathcal{O}_A(D)) = \frac{(D^g)}{g!}$ où (D^g) désigne le nombre d'intersection de g exemplaires de D ;

. le théorème d'annulation : si L est non dégénéré il existe un entier $i(L)$ tel que $H^i(A, L) = 0$ pour $i \neq i(L)$. De plus L est ample si et seulement si L est non dégénéré et $i(L) = 0$.

1.3. ("Autres" définitions de $K(L)$). Sur le schéma $A \times_S A$ posons $M = m^* L \otimes \text{pr}_1^* L^{-1} \otimes \text{pr}_2^* L^{-1}$, où $m: A \times_S A \rightarrow A$ est la loi de groupe. Alors $K(L)$ peut être défini comme le plus grand sous-schéma fermé X de A tel que $M|_{\text{pr}_1^{-1}(X)}$ provienne d'un faisceau inversible sur X . En fait, dans [AV], Mumford définit ainsi $K(L)$, puis pose par définition $\hat{A} \Rightarrow A/K(L)$, pour L ample.

En termes de points, si S' est un S -schéma, $K(L)(S')$ est l'ensemble des $x \in A(S')$ tels que $T_x^* L \otimes L^{-1}$ provienne d'un faisceau inversible sur S' .

2. Généralités sur les θ -groupes.

2.1. DÉFINITION. Un θ -groupe sur S est une suite exacte de S -schémas en groupes :

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 1$$

avec les propriétés suivantes :

- (a) K est commutatif
- (b) $i(\mathbb{G}_m)$ est contenu dans le centre de G .

Dans [AV], Mumford impose de plus que π ait une section localement pour la topologie de Zariski sur K . En fait cette hypothèse est automatiquement vérifiée : G est un $\mathbb{G}_m$ -torseur sur K , donc il est localement trivial pour la topologie de Zariski.

Comme d'habitude, si le conoyau K est fixé, l'ensemble des classes d'isomorphie de θ -groupes au-dessus de K peut être affublé d'une structure de groupe commutatif. Si K est fini et si S est le spectre d'un corps, π a toujours une section, donc ce groupe est le groupe de Hochschild $H^2(K, \mathbb{G}_m)$ (pour l'action triviale de K sur $\mathbb{G}_m$), cf. [GA].

2.2. (Forme-commutateur). Considérons le morphisme (de S -schémas) :

$$\begin{aligned} G \times_S G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto [x, y] = xyx^{-1}y^{-1}. \end{aligned}$$

Comme K est commutatif, $[x, y] \in \mathbb{G}_m$.

Comme $i(\mathbb{G}_m)$ est central, on peut définir, par passage au quotient de $[\ , \]$ un morphisme $e: K \times_S K \longrightarrow \mathbb{G}_m$, et l'on vérifie immédiatement que e est une application bilinéaire alternée, que l'on appellera la forme-commutateur de G . Si $\text{Ker } e$ désigne son noyau (à droite ou à gauche), il est immédiat que $\pi^{-1}(\text{Ker } e)$ est le centre de G . Si K est fini et plat, e peut s'interpréter comme un morphisme γ de K dans son dual de Cartier $\hat{K}$, vérifiant $\hat{\gamma} = -\gamma$ (si K est noté additivement).

DÉFINITION. On dit que le θ -groupe G est non dégénéré si K est fini et plat, et si γ est un isomorphisme (ou, ce qui revient au même, si $i(\mathbb{G}_m)$ est le centre de G). (On dit aussi que G est un "groupe de Heisenberg fini").

2.3. THÉOREME. On suppose que S est le spectre d'un corps algébriquement clos k . Alors, avec les notations de (2.1) :

(i) si K est fini et G commutatif, alors G est trivial, i.e. π a une section qui est un morphisme de groupes.

(Autrement dit, dans la catégorie des k -schémas en groupes commutatifs, on a $\text{Ext}^1(K, \mathbb{G}_m) = 0$ si K est fini)

(ii) si K est fini d'ordre premier, G est commutatif.

DÉMONSTRATION. (i) (idée volée à M. Raynaud). Soit n l'ordre de K . Comme K lui-même ([3], §1), le groupe $\text{Ext}^1(K, \mathbb{G}_m)$ est annulé par n , donc l'application canonique $\text{Ext}^1(K, \mu_n) \longrightarrow \text{Ext}^1(K, \mathbb{G}_m)$ est surjective. Elle se factorise à travers l'application canonique $\alpha: \text{Ext}^1(K, \mu_n) \longrightarrow \text{Ext}^1(K, \mu_{n^2})$, déduite de l'inclusion $\mu_n \hookrightarrow \mu_{n^2}$. Il suffit donc de montrer que $\alpha = 0$, ce qui, par dualité, équivaut à la nullité de l'application

$$\text{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \hat{K}) \xrightarrow{\hat{\alpha}} \text{Ext}^1(\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}, \hat{K})$$

déduite de la surjection canonique f de $\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Considérons donc un diagramme cartésien d'extensions :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \hat{K} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow f \\
 0 & \longrightarrow & \hat{K} & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 .
 \end{array}$$

On obtient une section $\sigma : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow E$ en relevant le générateur 1 de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (puisque K est algébriquement clos). L'image $\sigma(1)$ est annihilée par n^2 (puisque E est d'ordre n^2) ce qui signifie exactement que la section $\sigma' : \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z} \longrightarrow E'$ déduite de σ est un morphisme de groupes. L'extension E' est donc triviale, c.q.f.d.

(ii) Dans le cas où $K = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, on relève un générateur de K en un élément d'ordre ℓ de G , en remarquant que $\mathbb{G}_m$ est divisible (ceci marche encore si S est quelconque et si K est une forme tordue de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur S , la question étant locale pour la topologie fppf sur S).

Dans le cas où $K = \alpha_p$ ou μ_p avec $p = \text{car}(k)$, soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G : on a $\mathfrak{g} = k.x \oplus k.y$ où x engendre $\text{Lie}(\mathbb{G}_m)$ et où y relève un générateur de $\text{Lie}(K)$. Comme $\mathbb{G}_m$ est central on voit alors que $\mathfrak{g}$ est abélienne et le noyau de Frobenius $G^{(p)}$ de G est donc commutatif (d'après la correspondance entre groupes de hauteur 1 et p -algèbres de Lie, cf. SGA 3, exposé VII_A). Mais si $\sigma : K \longrightarrow G$ est une section vérifiant $\sigma(1) = 1$, G est engendré par $\mathbb{G}_m$, qui est central, et par $\sigma(K) \subset G^{(p)}$, d'où le résultat.

2.3.1. REMARQUE. L'assertion (ii) s'étend d'elle-même au cas où S est réduit. J'ignore si elle est vraie dans le cas général.

2.3.2. COROLLAIRE. Si K est un schéma en groupes fini sur k algébriquement clos, deux θ -groupes au-dessus de K ayant la même forme-commutateur sont isomorphes.

En effet, l'application qui, à un θ -groupe sur K , associe sa forme-commutateur, est un homomorphisme de $H^2(K, \mathbb{G}_m)$ dans $\text{Hom}(K, \hat{K})$, et son noyau est trivial d'après (2.3 (i)).

3. Le groupe $\underline{G}(L)$.

3.0. NOTATIONS. S désigne obstinément un schéma noethérien. Si E est un faisceau localement libre sur un schéma X , on note $\tilde{E}$ le fibré vectoriel $\text{Spec Sym}_{\mathcal{O}_X}(E^\vee)$, dont le faisceau des sections s'identifie canoniquement à E . Enfin on baptisera $\tilde{E}^*$ le complémentaire de la section nulle dans $\tilde{E}$.

3.1. DÉFINITION. Soient A un S -schéma abélien et L un faisceau inversible sur A . On note $G(L)$ le groupe des automorphismes linéaires φ de $\tilde{L}$ tels qu'il existe $x \in A(S)$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{L} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{L} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{T_x} & A \end{array} .$$

On note $\underline{G}(L)$ le foncteur qui à un S -schéma S' associe le groupe $G(L_{S'})$ (notation de 1.1).

3.1.1. DÉFINITION (bis). $\underline{G}(L)$ est l'ensemble des couples (x, φ) où $x \in A(S)$ et où φ est un isomorphisme $L \xrightarrow{\sim} T_x^* L$. La loi de groupe est définie comme suit : si (x, φ) et $(y, \psi) \in \underline{G}(L)$, on pose $(x, \varphi) \cdot (y, \psi) = (x+y, T_y^* \varphi \cdot \psi)$, ce qui a un sens puisque $T_y^* \varphi$ est un isomorphisme de $T_y^* L$ sur $T_{x+y}^* L$.

L'équivalence des deux définitions est immédiate. La seconde fournit un morphisme $\pi : \underline{G}(L) \rightarrow K(L)$ par la formule $\pi(x, \varphi) = x$. Le noyau de π se calcule immédiatement : $\text{Ker}(\underline{G}(L) \rightarrow K(L)(S))$ est le groupe des automorphismes du faisceau L , qui s'identifie à $\Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$ car les fibres de A au-dessus de S sont propres et intègres.

3.2. PROPOSITION. La suite $1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \underline{G}(L) \xrightarrow{\pi} K(L) \rightarrow 1$ est exacte au sens des faisceaux pour la topologie de Zariski. De plus elle fait de $\underline{G}(L)$ un θ -groupe sur S .

DÉMONSTRATION. Si $x \in K(L)(S')$, alors par définition $L_{S'}$ est isomorphe à $T_x^*(L_{S'})$ localement pour la topologie de Zariski sur S' , ce qui signifie que π est un épimorphisme. Nous avons vu que son noyau s'identifie à $\mathbb{G}_m$, qui est manifestement central dans $\underline{G}(L)$. Il reste à voir que $\underline{G}(L)$ est représentable.

Pour cela on peut invoquer lâchement des théorèmes généraux : $\underline{G}(L)$ est un $\mathbb{G}_m$ -torseur au-dessus de $K(L)$, et un toseur sous un groupe affine est toujours représentable ([GA], III, §4, 1.9).

Il est cependant facile d'expliciter le schéma $\underline{G}(L)$: si $\varepsilon : S \rightarrow A$ désigne la section unité, on peut supposer que la restriction de L à $\varepsilon(S)$ est triviale (tordre L par un faisceau provenant de S ne change pas $\underline{G}(L)$). Fixons alors une section s_0 du "fibré épointé" $\tilde{L}^*|_{\varepsilon(S)}$. Alors $\underline{G}(L)$ est représenté par le S -schéma

$\tilde{L}^*|_{K(L)}$: un élément de $\underline{G}(L)$ est un isomorphisme φ entrant dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{L} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{L} \\ & \nearrow s_0 & \downarrow & & \downarrow \\ \varepsilon(S) & \hookrightarrow & A & \xrightarrow{T_x} & A \end{array} .$$

Alors $\varphi \circ s_0$ est une section de $\tilde{L}^*$ (au-dessus de S), dont la projection sur A est bien $x \in K(L)$. On vérifie immédiatement que $\varphi \mapsto \varphi \circ s_0$ est bien un isomorphisme de $\underline{G}(L)$ sur $\tilde{L}^*|_{K(L)}$ (par exemple, c'est un morphisme de $\mathbb{G}_m$ -torseurs sur $K(L)$).

3.3. NOTATION. On note $e^L : K(L) \times K(L) \rightarrow \mathbb{G}_m$ la forme-commutateur (2.2) associée au θ -groupe $\underline{G}(L)$.

3.3.1. Propriétés de e^L .

Ces propriétés sont énoncées sans démonstrations (cf. [AV], §23, p. 228).

(i) Si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme de S -schémas abéliens, et si $L \in \text{Pic}(B)$, alors $K(f^*(L)) \supset f^{-1}(K(L))$ et $e^{f^*(L)}(x, y) = e^L(f(x), f(y))$ si x et $y \in f^{-1}(K(L))$.

(ii) $e^{L_1 \otimes L_2}$ coïncide avec $e^{L_1} \cdot e^{L_2}$ sur $K(L_1) \cap K(L_2)$.

(iii) Si $L_1 \otimes L_2^{-1} \in \hat{A}$ alors $K(L_1) = K(L_2)$ et $e^{L_1} = e^{L_2}$. En particulier si $L \in \hat{A}$ alors $K(L) = A$ et $\underline{G}(L)$ est commutatif (cf. Appendice).

(iv) Si $[n]$ désigne la multiplication par n dans A , on a $K(L^{\otimes n}) = [n]^{-1}(K(L))$ et $e^{L^{\otimes n}}(x, y) = e^L(x, ny)$ si $x \in K(L)$ et $y \in K(L^{\otimes n})$.

4. Descente de faisceaux inversibles.

4.1. THÉOREME. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme surjectif de S -schémas abéliens, et soit $L \in \text{Pic}(A)$. Il existe une bijection naturelle entre :

(a) l'ensemble des $M \in \text{Pic}(B)$ tels que $f^*(M) \simeq L$

(b) l'ensemble des homomorphismes de $\text{Ker } f$ dans $\underline{G}(L)$ relevant l'inclusion de $\text{Ker } f$ dans A :

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Ker } f & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ \underline{G}(L) & \longrightarrow & K(L) & \hookrightarrow & A \end{array} .$$

DÉMONSTRATION. D'abord l'ensemble des données de type (a) est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphie de couples (M, α) où M est un faisceau inversible sur B et α un isomorphisme de f^*M sur L : ceci provient du fait que $\text{Aut}(L) = \text{Aut}(M) = H^0(S, \mathcal{O}_S^*)$.

Etant donné (M, α) comme ci-dessus, on en déduit un isomorphisme $\tilde{\alpha} : f^*M \xrightarrow{\sim} \tilde{L}$, d'où une action du groupe $\text{Ker } f$ sur $\tilde{L}$, relevant l'action par translations de $\text{Ker } f$ sur A , c'est-à-dire une donnée de type (b).

Inversement, étant donnée une telle action de $\text{Ker } f$ sur $\tilde{L}$, il s'agit de voir que le quotient de $\tilde{L}$ par cette action existe. Remarquons que f est fidèlement plat (critère de platitude par fibres, cf. 1.1), nous allons invoquer la descente fidèlement plate (SGA 1, VIII, th. 1.1).

[Je renonce ainsi héroïquement à renvoyer le lecteur à [GIT], déf. 1.6 ou prop. 7.1. Mais ces deux références ne font elles-mêmes que renvoyer à SGA 1 en se gardant bien d'écrire les détails. J'en donne donc ici un peu plus, pas assez pour être complet mais suffisamment peu, j'espère, pour être lisible. L'héroïsme aussi a ses limites. Cf. aussi [GA], III, §4, 6.3].

Posons donc $N = \text{Ker } f$, et soit $\sigma : N \times_S \tilde{L} \rightarrow \tilde{L}$ l'action en question. Soient p_1 et p_2 les deux projections de $A \times_B A$ sur A . L'idée est d'exploiter l'isomorphisme $N \times_S A \rightarrow A \times_B A$ donné par $(x, y) \mapsto (x+y, y)$ pour construire un isomorphisme de $(A \times_B A)$ -fibrés vectoriels entre $p_1^* \tilde{L}$ et $p_2^* \tilde{L}$. Explicitement, puisqu'il le faut :

$$\begin{aligned} p_1^* \tilde{L} &= \tilde{L} \times_B A \xrightarrow{\sim} A \times_B \tilde{L} = p_2^* \tilde{L} \\ (x, y) &\longmapsto (x, \sigma(y-x, \xi_x)) \end{aligned}$$

où la notation ξ_x signifie que $\xi_x \in \tilde{L}$ est au-dessus de $x \in A$. C'est bien un $A \times_B A$ -morphisme puisque $\sigma(y-x, \xi_x)$ est au-dessus de y . Vérifions maintenant que cet isomorphisme est une donnée de descente pour le fibré $\tilde{L}$ (ou, ce qui revient au même, pour son faisceau de sections L) relativement à $f : A \rightarrow B$. Par définition cela équivaut à la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 (\xi_x, y, z) & \longmapsto & (x, \sigma(y-x, \xi_x), z) \\
 (\xi_x, y, z) \xrightarrow{\tilde{L} \times_B A \times_B A} & & A \times_B \tilde{L} \times_B A \quad (x, \eta_y, z) \\
 \swarrow & \searrow & \swarrow \\
 & A \times_B A \times_B \tilde{L} & \\
 \searrow & & \swarrow \\
 (x, y, \sigma(z-x, \xi_x)) & & (x, y, \sigma(z-y, \eta_y))
 \end{array}$$

autrement dit à la formule :

$$\sigma(z-y, \sigma(y-x, \xi_x)) = \sigma(z-x, \xi_x)$$

c'est-à-dire au fait que σ est une action de groupe. On conclut par SGA 1, loc. cit.

4.1.1. COROLLAIRE. Soit $f: A \rightarrow B$ une isogénie de variétés abéliennes sur un corps k algébriquement clos. Soit $L \in \text{Pic}(A)$. Pour qu'il existe $M \in \text{Pic}(B)$ tel que $f^*M \simeq L$, il faut et il suffit que $\text{Ker } f$ soit un sous-groupe de $K(L)$, totalement isotrope pour la forme-commutateur e^L .

Cela résulte immédiatement de (4.1) et (2.3 (i)) : avec les notations habituelles (2.1), si $\text{Ker } f$ est totalement isotrope, $\pi^{-1}(\text{Ker } f)$ est un θ -groupe (au-dessus de $\text{Ker } f$) qui est commutatif et donc trivial.

4.2. PROPOSITION. Soient $f: A \rightarrow B$ une isogénie de S-schémas abéliens, $M \in \text{Pic}(B)$, $L = f^*M$, $H = \text{Ker } f$. Alors $K(M) \simeq H^\perp/H$ où $H^\perp$ désigne l'orthogonal de H pour la forme e^L . Plus précisément $f^{-1}(K(M)) = H^\perp$.

DÉMONSTRATION. Comme $L = f^*M$, $\tilde{L}$ se trouve muni d'une action de $\text{Ker } f$ relevant l'action sur A , et correspondant à un morphisme de $\text{Ker } f$ dans $\underline{G}(L)$, comme dans (4.1). On peut de plus supposer que la base est locale. Si $x \in A$, on a alors les équivalences :
 $f(x) \in K(M) \iff$ il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{M} & \xrightarrow{\sim} & \tilde{M} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B & \xrightarrow{T_{f(x)}} & B
 \end{array}$$

$\iff$ il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\varphi} & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow[T_x]{} & A \end{array}$$

où φ commute avec l'action de H sur $\tilde{L}$

$\iff$ il existe $\varphi \in \underline{G}(L)$, au-dessus de x , commutant avec le relèvement de H dans $\underline{G}(L)$.

$\iff x \in H^\perp$, par définition de e^L .

[En fait, on voit sans peine que, si H' désigne le sous-groupe de $\underline{G}(L)$ relevant H , on a :

$$\underline{G}(M) \simeq (\text{centralisateur de } H' \text{ dans } \underline{G}(L))/H'] .$$

4.2.1. COROLLAIRE. Soit L un faisceau inversible non dégénéré sur une variété abélienne A (sur k algébriquement clos). Soit $H \subset K(L)$ un sous-groupe totalement isotrope maximal. Alors $H = H^\perp$ et $|H|^2 = |K(L)|$.

DÉMONSTRATION. Soit f l'isogénie naturelle de A sur $B = A/H$: il existe M sur B tel que $f^*M \simeq L$. Vu l'hypothèse sur H , il n'existe aucune isogénie non triviale $B \rightarrow C$ telle que M se descende à C . Mais cela implique que $K(M) = \{1\}$, sinon $K(M)$ aurait un sous-groupe d'ordre premier, qui serait totalement isotrope par (2.3 (ii)). On a donc $H^\perp/H = \{1\}$, et d'autre part $|\chi(M)| = 1$ d'après (1.2). Par ailleurs $|\chi(L)| = \deg(f) \cdot |\chi(M)| = |H|$ et $|\chi(L)|^2 = |K(L)|$ toujours d'après (1.2).

REMARQUE. Sous les hypothèses de (4.2.1), H n'est pas nécessairement facteur direct de $K(L)$: si par exemple $K(L)$ est le groupe des points d'ordre n^2 de A , alors le groupe des points d'ordre n est totalement isotrope maximal.

4.2.2. COROLLAIRE. Soit L un faisceau inversible non dégénéré sur un schéma abélien A : alors $\underline{G}(L)$ est un θ -groupe non dégénéré (2.2).

DÉMONSTRATION. On peut supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos, car si le morphisme $K(L) \xrightarrow{\gamma} \widehat{K(L)}$ déduit de e^L est un isomorphisme sur les fibres géométriques, c'est un isomorphisme.

Dans ces conditions soit H comme dans (4.2.1) et posons $D = \text{Ker } \gamma$. On a évidemment $D \subset H^\perp$ donc $D \subset H$ par (4.2.1). Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 D & \xrightarrow{j} & H = H^\perp & \xrightarrow{i} & K(L) & \xrightarrow{\gamma} & \widehat{K(L)} \xrightarrow{\hat{i}} \hat{H} \xrightarrow{\hat{j}} \hat{D} \\
 & & & & \searrow p & & \nearrow \bar{\gamma} \\
 & & & & K(L)/H^\perp & = & K(L)/H .
 \end{array}$$

D'après (4.2.1), $\bar{\gamma}$, qui est injectif par définition de $H^\perp$, est aussi surjectif puisque $K(L)/H$ et $\hat{H}$ ont même ordre. Donc $\hat{j} \bar{\gamma} p = \hat{j} \hat{i} \gamma$ est surjectif. On en déduit par dualité que $\hat{\gamma} i j = -\gamma i j$ est injectif, et comme il est nul par définition de D , on a bien $D = 0$.

5. Représentations linéaires de $\underline{G}(L)$.

Dans ce paragraphe, k désigne un corps algébriquement clos.

5.1. Soient A une k -variété abélienne et L un faisceau inversible sur A . Nous allons faire opérer le groupe $\underline{G}(L)$ sur les espaces vectoriels $H^i(A, L)$, de la façon suivante :

soit $z = (x, \varphi) \in \underline{G}(L)$: $x \in K(L)$, $\varphi : L \xrightarrow{\sim} T_x^* L$.

On en déduit le diagramme :

$$H^i(A, L) \xrightarrow{H^i(\varphi)} H^i(A, T_x^* L) \xrightarrow{T_x^*} H^i(A, L) .$$

On note $U_z = T_x^* \circ H^i(\varphi)$; l'application $z \mapsto U_z$ est un morphisme de k -schémas en groupes $\underline{G}(L) \rightarrow GL(H^i(A, L))$, c'est-à-dire une représentation linéaire de $\underline{G}(L)$. Cette représentation est de poids 1, c'est-à-dire que $\mathbb{G}_m \subset \underline{G}(L)$ opère sur $H^i(A, L)$ par homothéties de façon évidente.

On obtient donc en particulier un morphisme $K(L) \rightarrow PGL(H^i(A, L))$ par passage au quotient ; si $i = 0$ on constate immédiatement qu'il s'agit de l'action de $K(L)$ par translations sur les diviseurs du système linéaire $|L|$, identifié à l'ensemble des droites de $H^0(A, L)$. Ceci donne, lorsque $H^0(A, L) \neq 0$, une autre définition de $\underline{G}(L)$, grâce au diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{G}(L) & \longrightarrow & K(L) \\
 \downarrow & & \downarrow \text{ (action par translations) } \\
 GL(H^0(L)) & \longrightarrow & PGL(H^0(L))
 \end{array}$$

5.1.1. PROPOSITION (descente des sections de L). Soit $\pi : A \rightarrow B$ un morphisme surjectif de k -variétés abéliennes. Soient $M \in \text{Pic } B$ et $L = \pi^* M$. Alors $H^0(B, M) = H^0(A, L)^{\text{Ker } \pi}$ où $\text{Ker } \pi$ opère sur $H^0(A, L)$ via l'application composée :

$$\text{Ker } \pi \longrightarrow \underline{G}(L) \longrightarrow \text{GL}(H^0(L))$$

la première flèche étant celle de (4.1) et la seconde celle de (5.1).

La démonstration est immédiate en termes de fibrés vectoriels : $\tilde{M}$ est le quotient de $\tilde{L}$ par l'action naturelle de $\text{Ker } \pi$, et les sections de $\tilde{M}$ sont les sections de $\tilde{L}$ invariantes par cette action, en un sens que le lecteur précisera à titre d'exercice...

Nous arrivons maintenant au "théorème miracle" du présent exposé :

5.2. THÉOREME (Mumford). Soit $1 \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 0$ un θ -groupe non dégénéré sur k algébriquement clos (cf. (2.2); on rappelle que K est en particulier supposé fini). Alors toute représentation linéaire de poids 1 de G est complètement réductible (c'est-à-dire somme directe de représentations simples), et il existe, à isomorphisme près, une unique représentation simple de poids 1 de G . Si d est sa dimension, on a $d^2 = |K|$.

5.2.1. REMARQUE. Le fait que $|K|$ soit un carré ne doit pas surprendre : le lecteur pourra montrer à titre d'exercice que si $H \subset K$ est totalement isotrope maximal, on a $|H|^2 = |K|$ et $H = H^\perp$.

5.2.2. COROLLAIRE. Si L est un faisceau inversible non dégénéré sur une k -variété abélienne A , et si $i(L)$ est l'entier défini en (1.2), la représentation de $\underline{G}(L)$ dans $H^{i(L)}(A, L)$ définie en (5.1) est l'unique représentation irréductible de poids 1 de $\underline{G}(L)$.

En effet, $\dim H^{i(L)}(A, L) = |\chi(L)| = |K(L)|^{1/2}$.

5.2.3. Passons à la démonstration du théorème. Elle est tirée de l'appendice de [4]. Dans le cas où $|K|$ est premier à la caractéristique de k , on trouvera une démonstration élémentaire dans [1], §1, prop. 3.

Soit $\tau : K \rightarrow G$ une section de π vérifiant $\tau(0) = 1$. Posons $G = \text{Spec } A$ et $K = \text{Spec } A_0$. Grâce à la section τ , on peut identifier G à $K \times_{\mathbb{G}_m}$ de façon compatible à l'action de $\mathbb{G}_m$; on peut donc écrire $A = A_0[t, t^{-1}] = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_0 \cdot t^i$. Le sous-espace $A_1 = A_0 \cdot t^i$ peut être caractérisé comme suit :

$$A_i = \{f \in A \mid \forall \lambda \in \mathbb{G}_m, \forall x \in G, f(\lambda x) = \lambda^i f(x)\}$$

(attention : dans cette définition, A est identifié à un k -foncteur en espaces vectoriels : si R est une k -algèbre, les points de ce schéma à valeurs dans R sont les éléments du R -module libre $A \otimes_k R$, et les "points" x et λ de la définition sont à valeurs dans une k -algèbre variable).

Le k -schéma en groupes $G \times G$ opère à gauche sur A_1 par la formule suivante : si $(g, g') \in G \times G$ et $f \in A_1$, $(g, g')f$ est définie par $((g, g')f)(x) = f(g'^{-1}xg)$. Cette représentation est de poids 1 sur $G \times \{1\}$ et de poids -1 sur $\{1\} \times G$.

5.2.3.1. LEMME. A_1 est un $(G \times G)$ -module simple.

DÉMONSTRATION. Soit $W \subset A_1$ un sous-espace invariant. Si $g \in G$, W est invariant en particulier par l'application $f \mapsto (g, g)f$ de A_1 dans A_1 . La fonction $(g, g)f$ s'explicite ainsi :

$$\begin{aligned} x \in A_1 &\mapsto f(g^{-1}xg) = f([g^{-1}, x]x) = [g^{-1}, x]f(x) \quad (\text{car } W \subset A_1) \\ &= e(\pi(g), \pi(x))^{-1}f(x) \end{aligned}$$

où $e : K \times K \rightarrow \mathbb{G}_m$ est la forme-commutateur.

Mais soient R une k -algèbre et χ un caractère de $K \otimes_k R$. Comme e est non-dégénérée par hypothèse, il existe $g \in G(R)$ tel que $\chi(x) = e(\pi(g), x)^{-1}$ pour tout $x \in K$. Donc, d'après le calcul ci-dessus, la fonction $(\chi \circ \pi) \times f$ est dans $W \otimes R \subset A_1 \otimes R$.

Appliquons ces considérations à $R = A_0^*$ (l'algèbre de $\hat{K}$), et au caractère universel $\chi : K \times \hat{K} \rightarrow \mathbb{G}_m \times \hat{K}$, qui correspond au morphisme de A_0^* -algèbres :

$$\begin{aligned} A_0^*[t, t^{-1}] &\rightarrow A_0 \otimes A_0^* \\ t &\mapsto \sum a_i \otimes a_i^* \end{aligned}$$

où (a_i) est une base de A_0 , et (a_i^*) la base duale ([AV], §14). La conclusion est alors que $(\sum a_i \otimes a_i^*)(W \otimes A_0^*) \subset W \otimes A_0^*$, ce qui nécessite $a_i W \subset W$, autrement dit, W est un sous- A_0 -module de A_1 . Comme $A_1 = A_0 t$, ce sous-module est de la forme $I A_1$ où I est un idéal de A_0 . Mais comme W est également invariant par les translations de G , on doit avoir $I = 0$ ou $I = A_0$, d'où le lemme.

5.2.3.2. FIN DE LA DÉMONSTRATION DE (5.2.3). Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation de poids 1. On a alors un $(G \times G)$ -morphisme :

$$\begin{aligned}\sigma : V^V \otimes V &\longrightarrow A_1 \\ \varphi \otimes v &\longmapsto (g \longmapsto \varphi(\rho(g)v))\end{aligned}$$

($\varphi \in V^V$, $v \in V$, $g \in G$).

(Si le lecteur préfère : on a $\text{Spec } A = G \xrightarrow{\rho} \text{GL}(V) \subset \text{End}(V) = \text{Spec Sym}(V^V \otimes V)$ d'où un morphisme de $V^V \otimes V$ dans A , qui se trouve tomber dans A_1). Comme σ est évidemment non nul si $V \neq 0$ (faire $g=1$), c'est un isomorphisme si ρ est simple car alors $V^V \otimes V$ est un $G \times G$ -module simple (exercice : sur k algébriquement clos, si V_1 est un G_1 -module simple et V_2 un G_2 -module simple alors $V_1 \otimes V_2$ est un $G_1 \times G_2$ -module simple). En tant que G -module on a donc $A_1 = V \oplus V \oplus \dots \oplus V$ ($\dim V$ fois). Ceci montre l'unicité de la représentation simple, le fait que $(\dim V)^2 = |K| = \dim A_1$, et aussi que A_1 est un G -module totalement réductible. Si V est quelconque, σ donne un morphisme :

$$\alpha : V \longrightarrow V \otimes A_1 = \text{Hom}(V^V, A_1)$$

que l'on peut décrire ainsi : si (e_i) est une base de V et (ε_i) la base duale, et si $v \in V$, alors $\alpha(v) = \sum_i e_i \otimes (g \longmapsto \varepsilon_i(\rho(g)v))$.

De plus α est G -linéaire pour l'action de G sur A_1 , et est clairement injectif (faire $g=1$). Donc V est un sous- G -module de $A_1^{\dim V}$ donc est complètement réductible.

Appendice : la formule de Weil-Barsotti.

Soit A un S -schéma abélien, et soit $L \in \text{Pic}_{A/S}^0(S) = \hat{A}(S)$. On sait qu'alors $K(L) = A$, et la forme commutateur $e^L : A \times A \longrightarrow \mathbb{G}_m$ est donc triviale puisque A est propre sur S . Autrement dit le groupe $\underline{G}(L)$ est une extension commutative de A par $\mathbb{G}_m$.

THÉOREME. L'application $L \longmapsto \underline{G}(L)$ est un isomorphisme de $\hat{A}(S)$ sur $\text{Ext}_S^1(A, \mathbb{G}_m)$.

Le lecteur vérifiera lui-même qu'il s'agit d'un morphisme de groupes. Plus généralement si L_1 et L_2 sont deux faisceaux inversibles sur A , l'extension $\underline{G}(L_1 \otimes L_2)$, restreinte à $K = K(L_1) \cap K(L_2)$, est somme des extensions $\underline{G}(L_1)|_K$ et $\underline{G}(L_2)|_K$.

. Nous allons définir l'inverse $h : \text{Ext}_S^1(A, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \hat{A}(S)$ de la façon suivante : si $1 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 1$ est une extension, alors E est un $\mathbb{G}_m$ -torseur sur A , donc il existe un unique $L \in \text{Pic}(A)$ tel que $E \simeq \underline{\text{Isom}}(\mathcal{O}_A, L) = \tilde{L}^*$ comme $\mathbb{G}_m$ -torseurs. De plus la section unité $\tilde{\varepsilon} : S \longrightarrow E$ définit une trivialisation de $L|_{\varepsilon(S)}$ où ε est la section unité de A . On pose $L = h(E) \in \underline{\text{Pic}}_{A/S}(S)$. (Ce dernier groupe est identifié ici à $\text{Ker}(\text{Pic } A \xrightarrow{\varepsilon^*} \text{Pic } S)$). Il faut vérifier que $L \in \hat{A}(S)$. On peut pour cela supposer S local. Si $x \in A$ et si $\tilde{x} \in E$ est au-dessus de x , la structure de groupe sur $E = \tilde{L}^*$ donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{L}^* & \xrightarrow{\tilde{T}_x} & \tilde{L}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{T_x} & A \end{array}$$

d'où un isomorphisme $L \xrightarrow{\sim} T_x^* L$. Ceci montre que φ_L est trivial donc $L \in \hat{A}(S)$. Pour S quelconque le même raisonnement nous donne en fait un morphisme de E dans $\underline{G}(L)$ qui est un morphisme d'extensions de A par $\mathbb{G}_m$, donc un isomorphisme : on a donc $\underline{G} \circ h = \text{Id}_{\text{Ext}_S^1(A, \mathbb{G}_m)}$.

Il reste à vérifier que $h \circ \underline{G} = \text{Id}_{\hat{A}(S)}$: si $L \in \hat{A}(S)$ est trivial sur $\varepsilon(S)$, il faut voir que $\underline{G}(L) \simeq \tilde{L}^*$ comme $\mathbb{G}_m$ -torseur sur A : c'est essentiellement la démonstration, dans (3.2), de la représentabilité de $\underline{G}(L)$.

REMARQUE. Le point non trivial du théorème est ici caché : c'est l'identification de $\hat{A}$ au noyau de $L \longmapsto \varphi_L$, c'est-à-dire aux "classes primitives" selon la terminologie de [2] et [5].

Bibliographie

- [AV] D. MUMFORD.- Abelian Varieties (Oxford University Press).
- [GIT] D. MUMFORD.- Geometric Invariant Theory (Springer).
- [GA] M. DEMAZURE et P. GABRIEL.- Groupes algébriques (Masson - North Holland).
- [EGA] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ.- Eléments de géométrie algébrique (Pub. Math. IHES n^{os} 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).
- [SGA] A. GROTHENDIECK et al.- Séminaire de géométrie algébrique. Lecture Notes in Math. 151, 152, 153, 224, etc. (Springer).
- [1] D. MUMFORD.- On the equations defining abelian varieties, I (Inventiones Math., 1 (1966) p. 287-354).
- [2] F. OORT.- Commutative group schemes. Lecture Notes in Math. n° 15 (Springer).
- [3] F. OORT and J. TATE.- Group schemes of prime order (Ann. Sci. ENS, 3 (1970), p. 1-21).
- [4] T. SEKIGUCHI.- On the projective normality of abelian varieties (J. Math. Soc. Japan, 29 (1977), p. 709-727).
- [5] J.-P. SERRE.- Groupes algébriques et corps de classes (Hermann).

Laurent MORET-BAILLY
Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématique, bât. 425
91405 ORSAY

FAMILLES DE COURBES ET DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES SUR $\mathbb{P}^1$

II. EXEMPLES

par Laurent MORET-BAILLY

exposé n° 8

Nous nous servons ici des résultats de l'exposé précédent pour fabriquer, pour tout nombre premier $p \geq 2$, un schéma abélien principalement polarisé (X, M) non constant, de dimension relative 2, sur $\mathbb{P}_k^1$ où k est un corps de caractéristique p . Le "diviseur thêta" de la polarisation est alors une famille D de courbes semi-stables sur $\mathbb{P}^1$, à fibre générique lisse de genre 2, les fibres singulières étant formées de deux courbes elliptiques transverses en un point. On trouvera dans [3] un exemple analogue en caractéristique 2. Il n'existe pas de telles familles en caractéristique nulle car tout schéma abélien sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ est constant.

Le point de départ de la construction est, tout naturellement, rejeté en appendice : il s'agit de construire une surface abélienne A munie d'un faisceau inversible L tel que $K(L) \simeq \alpha_p \times \alpha_p$. On y parvient grâce à un calcul élémentaire de modules de Dieudonné. Le §1 est consacré à la construction de (X, M) : on y fait un usage massif des deux résultats principaux de l'exposé précédent [DP], le théorème de descente et le théorème sur les représentations des θ -groupes. Le §2 s'attache à l'étude de la surface D : calcul de $\mathcal{O}_X(D)$, lissité, nombre de fibres singulières. On y utilise, en particulier, un résultat sur les points d'ordre 2 situés sur un diviseur symétrique [4]. Au §3 le calcul de l'algèbre de Lie relative de X permet d'obtenir les principaux invariants (étales et cohérents) de D ; on constate en particulier que D est une surface de type général.

1. Construction de (X, M) .

1.1. DÉFINITION. Soit A un S -schéma abélien. Une polarisation sur A est une section L de $\text{Pic}_{A/S}$, ample sur A relativement à S . Elle est dite principale si $K(L) = \{1\}$, autrement dit, si $\varphi_L : A \rightarrow \hat{A}$ est un isomorphisme.

(Cette définition diffère, par exemple de celle de [GIT]).

Soit k un corps de caractéristique $p > 2$, supposé algébriquement clos (mais le lecteur pourra constater que toutes nos constructions, y compris celle de l'appendice, peuvent être définies sur un corps fini). On fixe une fois pour toutes une k -surface abélienne A , munie d'une polarisation L avec les deux propriétés suivantes :

$$(a) K(L) \simeq \alpha_p \times \alpha_p$$

$$(b) L \text{ est symétrique, i.e. } [-1]_A^*(L) \simeq L.$$

On rappelle que $[n]_A$ est la multiplication par n dans A . Pour la condition (a), voir l'appendice. On obtient la condition (b) en modifiant L par une translation convenable, puisque $[-1]^*(L)$ est algébriquement équivalent à L (cf. [AV]), donc est un translaté de L : si $[-1]^*L \simeq T_x^*L$ et si $x = 2y$ alors T_y^*L est symétrique. L'hypothèse (b) ne sert d'ailleurs qu'à simplifier certains énoncés, et ne sera pas utilisée avant le §2.

Au faisceau L sont attachés canoniquement un θ -groupe $\underline{G}(L)$ et une représentation $\rho_L : \underline{G}(L) \rightarrow GL(H^0(A, L))$, de degré p et de poids 1. Nous allons donner un "modèle explicite" pour $\underline{G}(L)$ et ρ_L :

Notons $\langle, \rangle : \alpha_p \times \alpha_p \rightarrow \mathbb{G}_m$ la dualité définie par $\langle \alpha, \beta \rangle = \exp(\alpha\beta) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(\alpha\beta)^i}{i!}$. Posons $K = \alpha_p \times \alpha_p$ et soit $\underline{G}$ le k -schéma $\mathbb{G}_m \times K$ muni de la loi de groupe :

$$(\lambda, \alpha, \beta)(\lambda', \alpha', \beta') = (\lambda\lambda' \langle \alpha, \beta' \rangle, \alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

$\underline{G}$ est une extension centrale de K par $\mathbb{G}_m$: c'est l'élément de $H^2(K, \mathbb{G}_m)$ défini par le 2-cocycle $((\alpha, \beta), (\alpha', \beta')) \mapsto \langle \alpha, \beta' \rangle$. La forme-commutateur associée (cf. [DP]) est :

$$e((\alpha, \beta), (\alpha', \beta')) = \langle \alpha, \beta' \rangle \langle \alpha', \beta \rangle^{-1}.$$

Soit V le k -espace vectoriel $H^0(\alpha_p, \mathbb{G}_{\alpha_p}) = k[X]/(X^p)$. Soit $\rho : \underline{G} \rightarrow GL(V)$ la représentation définie par la formule :

$$\rho(\lambda, \alpha, \beta)(\varphi)(x) = \lambda \langle x, \beta \rangle \varphi(x + \alpha)$$

avec $(\lambda, \alpha, \beta) \in \underline{G}$, $\varphi \in V$, $x \in \alpha_p$. On vérifie immédiatement qu'il s'agit d'une représentation linéaire de poids 1 et de dimension p de $\underline{G}$.

1.2. PROPOSITION. Il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \underline{G}(L) & \longrightarrow & K(L) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow u & & \downarrow \bar{u} \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \underline{G} & \longrightarrow & K \longrightarrow 1 \end{array}.$$

De plus les représentations ρ_L et $\rho_{\circ u}$ de $\underline{G}(L)$ sont isomorphes.

DÉMONSTRATION. On sait ([DP], th. 2.3) que tout sous-groupe de $K(L)$ isomorphe à α_p est totalement isotrope pour la forme-commutateur e^L . Soient H_1 et H_2 deux tels sous-groupes, avec $K(L) = H_1 \times H_2$, et soit $f: \alpha_p \xrightarrow{\sim} H_1$ un isomorphisme. Si l'on définit $g: \alpha_p \xrightarrow{\sim} H_2$ par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow[\sim]{(\text{via } e^L)} & \hat{H}_2 \\ f \uparrow & & \downarrow \hat{g} \\ \alpha_p & \xrightarrow[\sim]{(\text{via } \langle, \rangle)} & \hat{\alpha}_p \end{array}$$

alors $\bar{u} = f \times g: \alpha_p \times \alpha_p \xrightarrow{\sim} H_1 \times H_2$ est compatible avec les formes-commutateurs. On en déduit $u: \underline{G}(L) \xrightarrow{\sim} \underline{G}$ puisque deux θ -groupes ayant la même forme-commutateur sont isomorphes ([DP], 2.3.2). Dans ces conditions, ρ_L et $\rho_{\circ u}$ sont deux représentations de $\underline{G}(L)$, de poids 1 et de même dimension, d'où la conclusion par [DP], th. 5.2.

1.3. PROPOSITION. Soient S un k -schéma et H un sous- S -groupe de $K(L)_S$, totalement isotrope pour e^L et plat sur S . Soit $\pi: A_S \rightarrow A_S/H$ la projection canonique. Alors il existe une polarisation M de A_S/H telle que $\pi^*M \simeq L_S$. De plus M est unique si S est réduit.

(Bien entendu, A_S désigne le S -schéma abélien AX_k^*S , etc.).

DÉMONSTRATION. Il s'agit de trouver ([DP], 4.1) un morphisme de groupes $H \rightarrow \underline{G}(L)_S$ relevant l'inclusion de H dans $K(L)_S$. La différence de deux tels relèvements est un caractère de H , d'où l'unicité si S est réduit puisque $\hat{H}$ est radiciel.

D'après la proposition précédente, on peut remplacer $\underline{G}(L)$ et $K(L)$ respectivement par $\underline{G}$ et K . Soit $\sigma: K \rightarrow \underline{G}$ la section

définie par

$$\sigma(\alpha, \beta) = (\langle \alpha, \frac{\beta}{2} \rangle, \alpha, \beta)$$

ce qui a un sens puisque p est supposé impair. On vérifie immédiatement que si H est totalement isotrope, $\sigma|_H$ est un morphisme de groupes ; on a en effet

$$\sigma(\alpha + \alpha', \beta + \beta') = (\langle \alpha + \alpha', \frac{\beta + \beta'}{2} \rangle, \alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

$$\sigma(\alpha, \beta)\sigma(\alpha', \beta') = (\langle \alpha, \frac{\beta}{2} \rangle \langle \alpha', \frac{\beta'}{2} \rangle, \alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

et il faut donc comparer $\langle \alpha, \beta' \rangle$ avec $\langle \alpha, \frac{\beta'}{2} \rangle \langle \alpha', \frac{\beta}{2} \rangle$. Mais ici la dualité $\langle , \rangle$ est à valeurs dans μ_p qui est uniquement 2-divisible donc nous sommes ramenés à comparer $\langle \alpha, \beta' \rangle^2$ avec $\langle \alpha, \beta' \rangle \langle \alpha', \beta \rangle$. Or si H est totalement isotrope et si (α, β) et (α', β') sont dans H on a $\langle \alpha, \beta' \rangle = \langle \alpha', \beta \rangle$, c.q.f.d.

1.4. A partir de maintenant on pose $S = \mathbb{P}_k^1$, et on définit

$H \subset K_S = (\alpha_p \times \alpha_p)_S$ comme le sous-groupe de hauteur 1 dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_S(-1) \subset \mathfrak{g}_S^2 = \text{Lie}(K_S)$. Explicitement si

$K_S = \text{Spec } \mathfrak{g}_S[\alpha, \beta]/(\alpha^p, \beta^p)$ et si X et Y sont des coordonnées homogènes convenables sur S , alors H est le sous-schéma de K_S d'équation $Y\alpha - X\beta = 0$. Posons $X = A_S/H$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A_S & \xrightarrow{\pi} & X \\ \text{pr}_2 \searrow & & \swarrow q \\ & S & \end{array}$$

D'après (1.3), il existe un relèvement $r: H \rightarrow \underline{G}_S$ de l'inclusion $H \hookrightarrow K_S$, et un unique faisceau inversible M sur X tel que $\pi^*M \simeq L_S$. Comme H est de rang p , M est une polarisation principale de X , ce qui implique que $q_*(M)$ est un faisceau inversible sur S , que l'on peut caractériser ainsi : $q_*(M)$ est un sous-faisceau inversible de $H^0(A, L) \otimes_k \mathfrak{g}_S$, par le morphisme composé :

$$q_*(M) \hookrightarrow q_*\pi_*\pi^*(M) \xrightarrow{\sim} \text{pr}_{2*}(L) = H^0(L) \otimes_k \mathfrak{g}_S.$$

Alors les sections de $q_*(M)$ au-dessus de U sont les sections de $H^0(L) \otimes_{\mathfrak{g}_U}$ invariantes (via la représentation ρ_L) par le sous-groupe $\tilde{H} = r(H)$ de $\underline{G}(L)$ (cf. [DP], prop. 5.1.1). Bien entendu j'identifie sans vergogne les groupes $\underline{G}$ et $\underline{G}(L)$, l'isomorphisme u de (1.2)

étant supposé fixé une fois pour toutes.

1.5. PROPOSITION. Avec les notations de (1.4), on a $q_*(M) \simeq \mathcal{O}_S(\frac{1-p}{2})$.

DÉMONSTRATION. Si $s \in S$ a pour coordonnées homogènes (X, Y) , alors $q_*(M)(s)$ est le sous-espace W de $V = H^0(L)$, invariant par les éléments de $\underline{G}$ de la forme $(\langle X\alpha, \frac{Y\alpha}{2} \rangle, X\alpha, Y\alpha)$ ($\alpha \in \alpha_p$) comme il résulte de la définition du relèvement r et de celle du sous-groupe H . Si $\varphi \in W$, φ est une fonction sur α_p astreinte à vérifier :

$$\varphi(x) = \langle X\alpha, \frac{Y\alpha}{2} \rangle \langle x, Y\alpha \rangle \varphi(x + X\alpha) \quad (x \in \alpha_p, \alpha \in \alpha_p).$$

Si $X \neq 0$ on pose $(X, Y) = (1, t)$ et $x = 0$, d'où

$$\varphi(\alpha) = \varphi(0) \exp\left(-\frac{t\alpha^2}{2}\right) \text{ d'après la définition de } \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Donc sur l'ouvert $X \neq 0$, le fibré $q_*(M) \subset V \otimes \mathcal{O}_S$ acquiert une section partout non nulle :

$$t \mapsto \varphi_t(x) = \exp\left(-\frac{tx^2}{2}\right) = 1 - \frac{t}{2}x^2 + \dots + (-t)^{\frac{p-1}{2}} \frac{x^{p-1}}{(\frac{p-1}{2})!}$$

écrite ici dans la base $(1, x, \dots, x^{p-1})$ de V . Cette section a un pôle d'ordre $\frac{p-1}{2}$ au point $(0, 1)$, d'où la proposition.

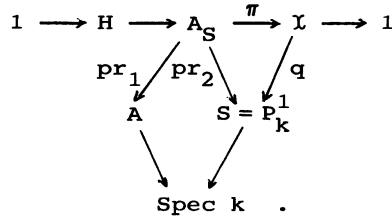
Je laisse en pâture au lecteur l'exercice suivant, généralisant (1.3) :

1.6. EXERCICE. Soient A un S -schéma abélien, et L un faisceau inversible sur A tel que $[-1]_A^*(L)$ soit un translaté de L (c'est le cas par exemple si (A, L) provient d'un corps algébriquement clos, et si L est non dégénéré). Alors si $H \subset K(L)$ est un sous-groupe totalement isotrope, le θ -groupe $\underline{G}(L) \times_{K(L)} H$ est annulé par 2 en tant qu'élément du groupe des extensions centrales de H par $\mathbb{G}_m$. (Indication : la multiplication par -1 dans ce groupe d'extensions est produit de l'involution "passage d'un groupe au groupe opposé" par l'involution héritée de la multiplication par -1 dans H).

Ce résultat démontre évidemment (1.3), mais le calcul direct du relèvement était nécessaire pour prouver (1.5).

2. Etude de la fibration $D \rightarrow S$.

2.1. (Les surfaces D et D')



La situation est résumée dans le diagramme ci-dessus, avec de plus un faisceau inversible M sur X tel que $\pi^*(M) \simeq \text{pr}_1^*(L)$. Comme M est une polarisation principale de X , on peut définir son "diviseur thêta" comme support du conoyau du morphisme naturel $q^*q_*(M) \rightarrow M$. C'est un diviseur relatif pour la projection q , que nous noterons désormais D . On a

$$\mathcal{O}_X(D) = M \otimes (q^*q_*(M))^{-1} \simeq M(\frac{p-1}{2}) \quad \text{d'après (1.5).}$$

Si $s \in S(k)$, la fibre D_s est une courbe sur la surface abélienne X_s , vérifiant $(D_s.D_s) = 2$ car $\chi(\mathcal{O}(D_s)) = 1$; c'est donc soit une courbe lisse de genre 2, soit la réunion de deux courbes elliptiques transverses en un point.

Posons d'autre part $D' = \pi^{-1}(D)$: c'est un diviseur dans A_S , vérifiant $\mathcal{O}_{A_S}(D') = \text{pr}_1^*(L) \otimes \text{pr}_2^*\mathcal{O}_S(\frac{p-1}{2})$, faisceau noté abusivement

$L(\frac{p-1}{2})$. Si $s \in S(k)$, $D'_s = \pi^{-1}(D_s)$, considéré comme diviseur sur A , n'est autre que l'unique diviseur du système $|L|$ invariant sous l'action par translations du groupe $H_s = \text{Ker}(A \xrightarrow{\pi_s} X_s)$. Remarquons d'autre part que D'_s n'est pas multiple non trivial d'un diviseur D'' de A , car si l'on avait $D'_s = nD''$, alors $p = \chi(L) = \chi(\mathcal{O}(D'')^{\otimes n}) = n^2\chi(\mathcal{O}(D''))$ serait divisible par n^2 . En conséquence :

. si D_s est lisse de genre 2, alors D'_s est intègre, de genre arithmétique $p+1$, et de genre géométrique 2 car elle est radicielle sur D_s ;

. sinon D'_s est réunion de deux courbes elliptiques (réduites), tangentes à l'ordre p en un point; en effet le seul autre cas possible a priori est $D'_s = [E_1] + p[E_2]$ où E_1 et E_2 sont deux courbes elliptiques avec $A = E_1 \times E_2$; ce cas est exclu car alors

$K(L) = K(\mathcal{O}(D'_s))$ serait le groupe des points d'ordre p de E_1 , qui n'est pas isomorphe à $\alpha_p \times \alpha_p$;

. enfin la proposition 1.5 signifie que la projection de D' sur A est de degré $\frac{p-1}{2}$: autrement dit, "par un point général de A , il passe $\frac{p-1}{2}$ courbes D'_s ".

On se propose maintenant de calculer le nombre δ des courbes D_s singulières. On a d'abord le résultat suivant :

2.2. PROPOSITION. On a $\delta \neq 0$, autrement dit la fibration $D \rightarrow S$ n'est pas lisse.

2.2.1. LEMME. Si k est un corps algébriquement clos [de caractéristique $\neq 2$], toute fibration en courbes lisses [hyperelliptiques] de genre ≥ 2 sur $\mathbb{P}_k^1$ est triviale.

DÉMONSTRATION. Les hypothèses entre crochets sont en fait inutiles, cf. [6], [7]. Mais la démonstration dans ce cas particulier est élémentaire : si $X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1$ est la fibration en question, le morphisme canonique relatif de X à valeurs dans $\mathbb{P}(f_* \Omega_{X/\mathbb{P}^1}^1)$, a pour image une "surface F_n ", i.e. une fibration en droites projectives sur $\mathbb{P}^1$, et le lieu de ramification est l'ensemble des points de Weierstrass des fibres, qui est un revêtement étale de $\mathbb{P}^1$. On se trouve donc en présence d'une surface F_n munie de $(2g+2)$ sections disjointes (où g désigne le genre des fibres), privilège réservé à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et à ses sections constantes ; le lemme en résulte puisqu'on reconstruit X à partir de ces données.

La proposition résulte donc du

2.2.2. LEMME. La fibration $D \xrightarrow{q} S$ n'est pas triviale.

En effet, supposons le contraire et soit $x \in D'$: par le point $\pi(x)$ de D passe alors une courbe $C \subset D$, section de q . La courbe $\pi^{-1}(C) \subset D'$ est alors rationnelle car π est radiciel ; sa projection sur A est donc un point. On en déduit immédiatement que $D' = \Gamma \times S$ où Γ est une courbe de A , et le scandale éclate puisque $\mathcal{O}(D') = L(\frac{p-1}{2})$.

2.3. (Digression sur les diviseurs symétriques). Le lecteur trouvera tous les détails (et bien d'autres) dans [4], §2. Si A est une variété abélienne, un diviseur D (resp. un faisceau inversible L) sur A est symétrique si $[-1]_A^*(D) = D$ (resp. $[-1]_A^*(L) \simeq L$). Rappe-

lons d'autre part que l'on note ${}_nA$ le groupe des points d'ordre n de A . Tout se passe sur un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$.

Si D est un diviseur sur une variété abélienne A , on pose :

$$\Sigma_+(D) = \{x \in {}_2A \mid m_x(D) \text{ est paire}\}$$

$$\Sigma_-(D) = \{x \in {}_2A \mid m_x(D) \text{ est impaire}\}$$

où $m_x(D)$ est le multiplicité du schéma D au point x si D est effectif, et $m_x(D_1 - D_2) = m_x(D_1) - m_x(D_2)$. Le fait remarquable est :

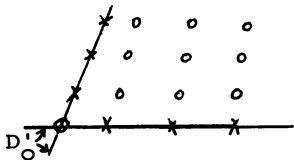
2.3.1. PROPOSITION ([4], §2, prop. 2). Si D et D' sont deux diviseurs symétriques linéairement équivalents sur A , alors $\Sigma_+(D)$ est égal à $\Sigma_+(D')$ ou à $\Sigma_-(D')$. Autrement dit la partition ${}_2A = \Sigma_+(D) \cup \Sigma_-(D)$, pour D symétrique, ne dépend que du faisceau $\mathcal{O}_A(D)$.

Donnons simplement l'idée de la démonstration : si $L = \mathcal{O}_A(D)$ est symétrique, on a un unique isomorphisme $L \xrightarrow{\sim} [-1]^*(L)$ qui induit l'identité sur la fibre $L(e)$ (e = l'élément neutre de A). Si x est un point d'ordre 2, cet isomorphisme induit $L(x) \xrightarrow{\sim} L(x)$ qui est nécessairement la multiplication par un scalaire $\varepsilon(L, x)$ égal à $+1$ ou à -1 . Or un calcul facile montre que

$$\varepsilon(\mathcal{O}(D), x) = (-1)^{m_x(D) - m_e(D)} \quad \text{si } D \text{ est symétrique.}$$

2.4. Revenons à nos fibrations, et soit $s \in S(k)$. Comme L est symétrique, le diviseur $[-1]_A^*(D'_s)$ est linéairement équivalent à D'_s ; mais d'autre part il est évidemment invariant par H_s , donc égal à D'_s (cf. (2.1)). En conclusion, le diviseur D' (resp. D) est invariant par $[-1]_{A_S}$ (resp. $[-1]_\chi$).

D'après (2.2) nous pouvons choisir une fibre réductible D'_0 . Comme elle possède un unique point singulier, celui-ci est d'ordre 2, et nous pouvons, grâce à une translation, supposer que c'est l'origine de A (cette translation est d'ordre 2, donc respecte la symétrie de L). Posons alors $\Sigma_+ = \Sigma_+(D'_0)$ et $\Sigma_- = \Sigma_-(D'_0)$. Sur la figure ci-contre,



les points de Σ_+ sont représentés par des cercles, ceux de Σ_- par des croix. Les points de Σ_- sont les points d'ordre 2 des deux branches, autres que l'origine. On a donc

$\text{Card}(\Sigma_+) = 10$ et $\text{Card}(\Sigma_-) = 6$.

2.4.1. PROPOSITION. Soit s un point de S .

(i) Si D'_s est irréductible, alors $D'_s \cap ({}_2A) = \Sigma_-(D'_s) = \Sigma_-$, et ces points se projettent sur les points de Weierstrass de D_s .

(ii) Si D'_s est réductible, $D'_s \cap ({}_2A)$ est la réunion de $\Sigma_-(D'_s) = \Sigma_-$, et d'un point de Σ_+ qui est le point singulier de D'_s .

DÉMONSTRATION. Nous pouvons appliquer (2.3.1) puisque toutes les D'_s sont linéairement équivalentes dans A . L'assertion (ii) est alors immédiate, le raisonnement fait pour D'_0 étant valable pour toutes les D'_s réductibles.

Montrons (i) : soit donc D'_s irréductible ; on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} D'_s & \xrightarrow{[-1]_A} & D'_s \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ D_s & \xrightarrow{[-1]_{\chi_s}} & D_s \end{array}$$

Comme D_s est lisse de genre 2, une involution sur D_s a 2 ou 6 points fixes (suivant que le quotient est de genre 1 ou 0). Comme π est bijectif il en va de même sur D'_s pour l'involution $[-1]_A$, donc :

$$\text{Card } \Sigma_-(D'_s) \leq \text{Card}(D'_s \cap ({}_2A)) \leq 6.$$

On a donc égalité puisque le membre de gauche vaut 6 ou 10 ; de plus $[-1]_{\chi_s}$ a 6 points fixes sur D_s , donc c'est l'involution canonique de D_s et les points en question sont bien les points de Weierstrass.

Nous savons donc caractériser les D'_s réductibles : ce sont celles qui passent par un point de Σ_+ (et un seul). Nous pouvons maintenant calculer δ , le nombre de ces courbes :

2.5. PROPOSITION. (i) $\delta = 5p-5$.

(ii) D' est lisse sur k aux points singuliers des D'_s réductibles (c'est-à-dire aux points de $D' \cap (\Sigma_+ \times S)$).

(iii) D est lisse sur k .

Il est clair que l'assertion (ii) implique (iii) : D ne pourrait être singulière qu'aux points de $\pi(D' \cap (\Sigma_+ \times S))$, puisqu'elle est lisse sur S en dehors de ces points ; mais si D' est lisse en x , D est lisse en $\pi(x)$ par fidèle platitude.

Les assertions (i) et (ii) vont résulter du

2.5.1. LEMME. D' est transverse à $\Sigma_+ \times S$ dans A_S .

Il est clair que le lemme implique la partie (ii) de la proposition. D'autre part, si D' est transverse à $\Sigma_+ \times S = \text{pr}_1^{-1}(\Sigma_+)$, on a :

$$\delta = \text{Card}(D' \cap (\Sigma_+ \times S)) = (D' \cdot (\Sigma_+ \times S)) = \deg(\Theta_{A_S}(D')) \Big|_{\text{pr}_1^{-1}(\Sigma_+)} = 10 \times \frac{p-1}{2} = 5p-5$$

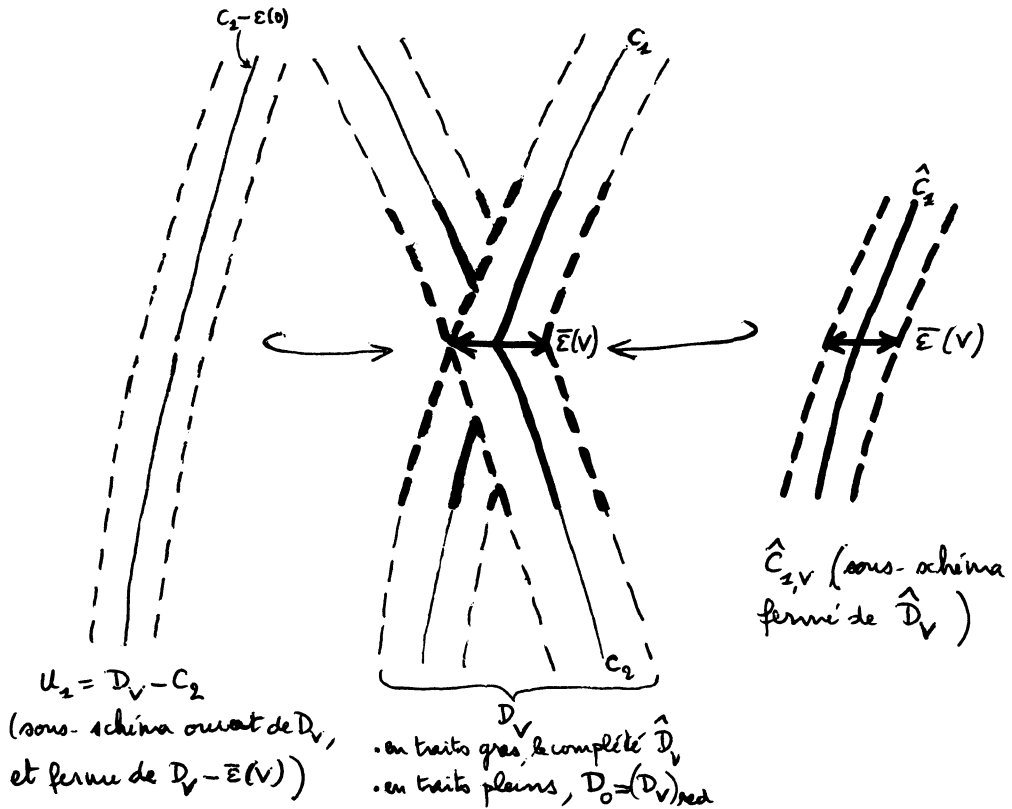
puisque $\Theta_{A_S}(D') = \text{pr}_1^*(L) \otimes \text{pr}_2^* \Theta_S(\frac{p-1}{2})$, et que $\text{Card}(\Sigma_+) = 10$.

Il s'agit maintenant de démontrer le lemme. Soit ε (resp. $\bar{\varepsilon} = \pi \circ \varepsilon$) la section unité de A_S (resp. $\mathcal{X}$), et supposons, pour fixer les idées, que D' ne soit pas transverse à $\varepsilon(S)$ au point $\varepsilon(0)$. Cela signifie que D' contient $\varepsilon(V)$, où V désigne le premier voisinage infinitésimal de 0 dans S ; V est un sous-schéma fermé de S , isomorphe à $\text{Spec } k[T]/(T^2)$. On a donc aussi $\bar{\varepsilon}(V) \subset D$ (i.e., D n'est pas transverse à $\bar{\varepsilon}(S)$). Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} D_O & \hookrightarrow & D_V & \hookrightarrow & D \\ \downarrow f_O & & \downarrow f & & \downarrow q \\ \text{Spec } k & \hookrightarrow & V & \hookrightarrow & S \end{array}$$

Le V -schéma D_V est une "déformation à l'ordre 1" du k -schéma D_O , et il possède par hypothèse une section $\bar{\varepsilon}_V: V \rightarrow D_V$, passant par le point singulier de D_O , lequel est un point double ordinaire. Complétant au point $\bar{\varepsilon}(0)$, on obtient une déformation $\hat{D}_V$ à l'ordre 1 de $\hat{D}_O = \text{Spec } k[[x,y]]/(xy)$, qui possède une section, donc est triviale (exercice : une déformation à l'ordre 1 de $\hat{D}_O$ au-dessus de V est V -isomorphe à $\text{Spec } k[[x,y,t]]/(t^2, xy - \lambda t)$ pour un $\lambda \in k$, et ne peut avoir une section que si $\lambda = 0$).

Soient alors C_1 et C_2 les deux branches de D_O . La "trivialité formelle" de $\hat{D}_V$ montre que les complétés $\hat{C}_1$ et $\hat{C}_2$ au point $\bar{\varepsilon}(0)$ se prolongent en deux sous-schémas fermés $\hat{C}_{1,V}$ et $\hat{C}_{2,V}$ de $\hat{D}_V$, qui sont des déformations de $\hat{C}_1$ et $\hat{C}_2$ au-dessus de V ; de plus $\hat{C}_{1,V} - \{\bar{\varepsilon}(0)\}$ est le sous-schéma ouvert de $\hat{D}_V$ dont le support est $\hat{D}_V - \hat{C}_2$, et symétriquement pour $\hat{C}_{2,V} - \{\bar{\varepsilon}(0)\}$. Bon, d'accord, je fais la figure :



On voit donc, par descente fidèlement plate appliquée au morphisme $\hat{D}_V \coprod (D_V - \bar{E}(V)) \rightarrow D_V$, que $\hat{C}_{1,V}$ se recolle avec le sous-schéma ouvert $U_1 = D_V - C_2$ de D_V , pour former une déformation à l'ordre 1 de la branche C_1 ; de même pour C_2 .

Remontant alors à D' , on constate que $D'_V = D' \times_S V$ est réunion de deux sous-schémas fermés Γ_1 et Γ_2 , plats sur V , qui sont des déformations à l'ordre 1 des deux branches Γ_1^0 et Γ_2^0 de D'_0 , contenant toutes deux la section unité $\varepsilon(V)$ de $A \times V$. Cela n'est possible que si $\Gamma_1 = \Gamma_1^0 \times V \subset A \times V$: appliquer par exemple le lemme de rigidité ([GIT], prop. 6.1) au diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_i & \longrightarrow & (A/\Gamma_i^0) \times V \\ & \searrow & \swarrow \\ & V & \end{array}$$

Or, comme D' est invariant par H , l'algèbre de Lie de Γ_i est égale à $H \times_S V$, qui n'est pas un sous-groupe constant de $A \times V$: contradiction.

3. Calcul de $\text{Lie}(X/S)$ et conséquences.

3.1. PROPOSITION. $\text{Lie}(X/S) \simeq \mathcal{O}_S(1) \oplus \mathcal{O}_S(-p)$.

DÉMONSTRATION. On a la suite exacte $1 \longrightarrow H \longrightarrow A_S \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 1$ qui montre que $\pi^*(\text{Lie}(X/S)) = N_{H/A_S}$, le faisceau normal de H dans A_S .

D'autre part, le carré de l'idéal de H contient l'idéal de p^A_S dans A_S (en effet le schéma p^A est isomorphe à

$\text{Spec } k[x,y]/(x^{p^2}, y^{p^2})$). Il nous suffit donc de calculer le fibré normal de H dans $p^A_S = (p^A) \times S$ (et même sa restriction à la section nulle).

Remarquons d'abord que comme le groupe $\mathbb{G}_a$ est lisse, on a un diagramme commutatif de k -schémas :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \\ & \nearrow i & \uparrow f \\ \alpha_p \times \alpha_p & \xrightarrow{j} & p^A \end{array}$$

où i est l'inclusion naturelle et où j est un isomorphisme de k -groupes de $\alpha_p \times \alpha_p$ sur $K(L) \subset p^A$. Le morphisme f est alors nécessairement un isomorphisme (de k -schémas) de p^A sur

$\text{Spec } k[x,y]/(x^{p^2}, y^{p^2})$. Considérons alors le diagramme commutatif de S -schémas

$$\begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & p^A_S \\ & \searrow g & \downarrow f \times \text{Id}_S \\ & & \text{Spec } \mathcal{O}_S[x,y] = (\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)_S \end{array}$$

Ici g est un morphisme de groupes puisque $H \subset K(L)_S$. Il identifie donc H à un sous-groupe H' de hauteur 1 de $(\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)_S$. Un tel

sous-groupe est déterminé par son algèbre de Lie, que nous connaissons car c'est l'image de celle de H par $f \times \text{Id}_S$. On voit alors que H' est le sous-groupe de $(\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)_S$ d'équations $x^p = y^p = 0$, $Uy = Vx$, où U et V sont des coordonnées homogènes convenables sur S , et qu'il nous suffit de calculer le fibré normal de H' dans $(\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)_S$, et même sa restriction à la section nulle. Posant $X = (\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)_S$, on a une résolution de $\mathcal{O}_{H'}$, comme $\mathcal{O}_X$ -module :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-p) \xrightarrow{\begin{pmatrix} v^p \\ -u^p \\ (Uy-Vx)^{p-1} \end{pmatrix}} \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{(x^p, y^p, Uy-Vx)} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{H'} \longrightarrow 0$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $I \quad \searrow$
 $\quad \quad 0$

Si I désigne l'idéal de H' , on a donc une présentation de $I/(x,y)I$, qui est le dual du faisceau que nous cherchons :

$$\mathcal{O}_S(-p) \xrightarrow{\begin{pmatrix} v^p \\ -u^p \\ 0 \end{pmatrix}} \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-1) \longrightarrow I/(x,y)I \longrightarrow 0$$

donc $I/(x,y)I \simeq \mathcal{O}_S(-1) \oplus \mathcal{O}_S(p)$ et la proposition est démontrée.

3.2. CONSÉQUENCES. Le faisceau dualisant relatif de X/S est :

$$\omega_{X/S} = \mathcal{O}_X(p-1).$$

On a donc $\omega_X = \mathcal{O}_X(p-3)$, et $\omega_D = \omega_X \otimes \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_D = M(\frac{3p-7}{2}) \otimes \mathcal{O}_D$.

En particulier $\pi^* \omega_D = L(\frac{3p-7}{2}) \otimes \mathcal{O}_D$, est ample sur D' , donc ([2], prop. 4.4) ω_D est ample et D est une surface de type général.

Le calcul de ω_X permet de trouver les principaux invariants de D , par exemple :

$$\begin{aligned} R^1 q_* \mathcal{O}_D &= \underline{\text{Lie}}(\hat{X}/S) \quad (\text{car } \hat{X} \simeq \text{Pic}_D^\tau/S) \\ &= \underline{\text{Lie}}(X/S) = \mathcal{O}_S(1) \oplus \mathcal{O}_S(-p) \end{aligned}$$

donc $\chi(\mathcal{O}_D) = p-2$.

Le lecteur vérifiera que $c_2(D) = 5p-9$, $c_1^2(D) = 7p-15$, et que les six sections de D correspondant aux points de Weierstrass des fibres sont de self-intersection $\frac{3-3p}{2} \dots$

Appendice : Construction de A et L vérifiant $K(L) \simeq \alpha_p \times \alpha_p$.

Soient k un corps parfait (par exemple fini) de caractéristique $p > 0$ (on ne suppose plus $p > 2$), E_1 et E_2 deux courbes elliptiques supersingulières sur k , d'origines respectives ε_1 et ε_2 . On munit $E_1 \times E_2$ du faisceau ample $L_O = \mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(E_1 \times \{\varepsilon_2\} + \{\varepsilon_1\} \times E_2)^{\otimes p}$. Il est clair que $K(L_O)$ est le groupe des points d'ordre p de $E_1 \times E_2$; c'est un groupe d'ordre p^4 , muni d'une dualité alternée e_O à valeurs dans $\mathbb{G}_m$.

Supposons trouvé un sous-groupe H de $K(L_O)$ vérifiant :

$$(a) H \simeq \alpha_p$$

$$(b) H^\perp/H \simeq \alpha_p \times \alpha_p.$$

La condition (a) implique ([DP], 2.3) que H est totalement isotrope pour e_O , donc la condition (b) a un sens. De plus, le groupe $G(L_O) \times_{K(L_O)} H$ est une extension commutative de H par $\mathbb{G}_m$, et il est facile de voir que, k étant parfait, $\text{Ext}^1(\alpha_p, \mathbb{G}_m) = 0$; donc d'après ([DP], 4.1), le faisceau L_O se descend en un faisceau inversible L sur $E_1 \times E_2/H$ qui vérifie alors $K(L) \simeq \alpha_p \times \alpha_p$, d'après ([DP], 4.2) et la condition (b).

Il ne reste plus qu'à trouver H . Si G est un k -schéma en groupes fini commutatif annulé par p , on note $M(G)$ son module de Dieudonné ([GA], [1]) : c'est un k -espace vectoriel de dimension finie, muni de deux endomorphismes de groupe additif, F_G et V_G , vérifiant :

$$F_G(\lambda x) = \lambda^p F_G(x), \quad V_G(\lambda^p x) = \lambda V_G(x), \quad F_G V_G = V_G F_G = 0 \quad (x \in M(G), \lambda \in k).$$

En particulier :

$$\cdot M(\alpha_p) \simeq k \quad \text{avec} \quad F = V = 0$$

$$\cdot M({}_p E_1) \text{ possède une base du type } \{e, Fe\} \quad \text{avec} \quad Ve = Fe.$$

On rappelle enfin que $M(\hat{G})$ s'identifie à $\text{Hom}_k(M(G), k)$, avec F et V donnés par :

$$\begin{aligned}(F_G \hat{\varphi})(x) &= \varphi(V_G x)^P \\ (V_G \hat{\varphi})(x) &= \varphi(F_G x)^{P^{-1}} \quad (x \in M(G), \varphi \in M(\hat{G})) .\end{aligned}$$

En particulier une forme bilinéaire alternée sur G , à valeurs dans $\mathbb{G}_m$, induit une forme bilinéaire alternée $B: M(G) \times M(G) \rightarrow k$, vérifiant $B(Fx, y) = B(x, Vy)^P$.

Posons $M = M(K(L_0))$: il admet une base (e_1, Fe_1, e_2, Fe_2) avec $Fe_i = Ve_i$. D'autre part les deux facteurs ${}_pE_1$ et ${}_pE_2$ de $K(L_0)$ sont orthogonaux pour la forme e_{L_0} , donc la forme bilinéaire B induite sur M vérifie $B(e_i, e_j) = B(Fe_i, Fe_j) = B(e_i, Fe_j) = 0$ pour $i \neq j$. Elle est donc déterminée par les deux scalaires $B(e_i, Fe_i) = \theta_i$ ($i=1,2$), tous deux non nuls car e_{L_0} est non dégénérée.

Soit H un sous-groupe de $K(L_0)$, isomorphe à α_p : il est déterminé par un plongement $\alpha_p \hookrightarrow K(L_0)$, ou encore par un morphisme surjectif $\varphi: M \rightarrow k$, vérifiant $\varphi \circ F = 0$. On vérifie alors facilement que $M(H^\perp/H)$ est isomorphe à $\text{Ker } \varphi / (\text{Ker } \varphi)^\perp$, et il s'agit donc de déterminer φ pour que $\text{Ker } \varphi / (\text{Ker } \varphi)^\perp \simeq M(\alpha_p \times \alpha_p)$. Il suffit pour cela que $F(\text{Ker } \varphi)$ et $V(\text{Ker } \varphi)$ soient contenus dans $(\text{Ker } \varphi)^\perp$, et même la première inclusion suffit puisque $H^\perp/H$ est isomorphe à son dual.

Nous pouvons supposer que $\varphi(e_1) = 1$: alors φ est déterminé par $\varphi(e_2) = a \in k$, puisque $\varphi(Fe_1) = \varphi(Fe_2) = 0$. (En fait le scalaire a est simplement la pente de l'algèbre de Lie de H dans celle de ${}_pE_1 \times {}_pE_2$).

$\text{Ker } \varphi$ a pour base $Fe_1, Fe_2, e_2 - ae_1$.

$F(\text{Ker } \varphi)$ est engendré par $Fe_2 - a^p Fe_1$; il est orthogonal à $\text{Ker } \varphi$ si et seulement si $B(e_2 - ae_1, Fe_2 - a^p Fe_1) = 0$, les autres relations d'orthogonalité étant toujours vérifiées. Celle-ci s'écrit :

$$0 = B(e_2, Fe_2) + a^{p+1} B(e_1, Fe_1)$$

autrement dit $a^{p+1} = -\frac{\theta_2}{\theta_1}$. Il y a donc des solutions, quitte à étendre le corps de base. On voit en particulier que si l'on prend $E_1 = E_2$, l'équation devient $a^{p+1} = -1$, qui implique $a^{p^2} = a$; on aura donc des solutions dès que k contient le corps à p^2 éléments.

Signalons qu'un théorème de Oort [5] montre que si A est une surface abélienne sur un corps algébriquement clos, contenant $\alpha_p \times \alpha_p$, alors A est isomorphe au produit de deux courbes elliptiques supersingulières.

Bibliographie

- [-1] multiplication par -1 .
- [GIT] D. MUMFORD.- Geometric Invariant Theory (Springer).
- [GA] M. DEMAZURE et P. GABRIEL.- Groupes algébriques (Masson - North Holland).
- [DP] L. MORET-BAILLY.- Descente des polarisations, ce séminaire exposé n° 7.
- [1] M. DEMAZURE.- Lectures on p -Divisible Groups (Lecture Notes in Math., n° 302, Springer).
- [2] R. HARTSHORNE.- Ample Subvarieties of Algebraic Varieties (Lecture Notes in Math., n° 156, Springer).
- [3] L. MORET-BAILLY.- Polarisation de degré 4 sur les surfaces abéliennes (C. R. Acad. Sci., Paris, 289 (1979), p. 787-790).
- [4] D. MUMFORD.- On the Equations Defining Abelian Varieties, I (Inventiones Math., 1 (1966), p. 287-354).
- [5] F. OORT.- Which abelian surfaces are products of elliptic curves ? (Math. Ann. 214 (1975), 35-47).
- [6] A.N. PARSIN.- Algebraic Curves over Function Fields I (Izv. Akad. Nauk SSSR 32 (1968)).
- [7] L. SZPIRO.- Sur le théorème de rigidité de Parsin et Arakolov (Journées de géométrie algébrique de Rennes II, Astérisque n° 64).

Laurent MORET-BAILLY
Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématique, bât. 425
91405 ORSAY

INDEX ALPHABÉTIQUE

Cet index indique le premier emploi significatif d'un mot.

La notation 1023, 18-3 indique la page 1023, l'exposé 18
paragraphe 3

admissible (type)	13 , 1-4
Artin-Shreier (revêtement d')	83 , 4-1
Albanèse (morphisme d')	101 , 6-3
Cartier (opération d)	80 , 4-1
chaîne	5 , 1-2
classes/primitives	123 , 7-5
cycle	5 , 1-2
De Rham (complexe de)	79 , 4-1
Dieudonné (module de)	138 , 8-Ap
dual de Cartier	112 , 7-2
dualisant relatif (diviseur)	5 , 1-2
dualisant relatif (faisceau)	6 , 1-2
exceptionnelle (courbe)	3 , 1-1
exposant d'inséparabilité modulaire	46 , 3-0
famille bornée	65 , 3-7
fermée (forme différentielle)	90 , 5-1
forme commutateur	112 , 7-2
Frobenius (morphisme de)	51 , 3-2
géométrique (type)	13 , 1-4
graphe	12 , 1-4
Hochschild (groupe de)	111 , 7-2
horizontal (diviseur)	54 , 3-2
index	141 , 9-1
isotriviale (fibration)	46 , 3-0
jacobienne	10 , 1-3
Kodaira-Parshin (construction de)	72 , 3-8
Kodaira-Spencer (application de)	47 , 3-0
Lefschetz (pinceau de)	53 , 3-2
méromorphe (forme différentielle)	90 , 5-1
modèle (stable, semi-stable, régulier)	2 , 1-1
modèle minimal	3 , 1-1
module constant	46 , 3-0

INDEX ALPHABÉTIQUE

Néron (modèle de)	26 , 1-5
Néron-Severi (groupe de)	58 , 3-3
non dégénéré (faisceau inversible)	110 , 7-1
numériquement connexe	39 , 2-1
numériquement positif	36 , 2-1
ordinaire (courbe)	62 , 3-5
partie fixe	58 , 3-3
polarisation	126 , 8-1
radical unipotent	8 , 1-2
Raynaud (lemme de)	92 , 5-2
réduction (stable, semi-stable)	3 , 1-1
Riemann-Hurwitz (formule de)	99 , 6-1
Riemann-Roch (courbes)	9 , 1-2
Riemann-Roch (surfaces)	48 , 3-1
semi-stable (courbe)	2 , 1-1
stable (courbe)	2 , 1-1
supersingulière (courbe elliptique)	81 , 4-1
système local	97 , 6-1
Tango-Raynaud (structure de)	80 , 4-1
Torelli (théorème de)	97 , 6-1
type	12 , 1-4
type général	61 , 3-4
unicité de Riemann (théorème d')	69 , 3-7
Weil-Barsotti (formule de)	122 , 7-5

INDEX DES NOTATIONS

	page	,	paragraphe
exposé 1			
$\text{Pic}^0(X/k)$	8	,	2
X_{red}	8	,	2
${}_{\mathfrak{q}}\text{Pic } V$	11	,	3
$\beta(T)$	13	,	4
A_N	15	,	4
D_N	15	,	4
E_6	15	,	4
E_7	15	,	4
E_8	15	,	4
$\rho_C(G)$	19	,	4
G_{tor}	20	,	4
exposé 2			
$\omega_{X/C}$	36	,	1
$\text{NS}(X)$	40	,	1
exposé 3			
$\bar{M}_g$	46	,	0
$K.S.(f)$	47	,	0
T_Z^1	47	,	0
$T_{Y/Z}^1$	47	,	0
N	48	,	1
c_1	48	,	1
c_2	48	,	1
$X^{(n)}$	51	,	2

INDEX DES NOTATIONS

	$\mathbb{P}_P$	62	,	5
exposé 4				
	$X^{(p)}$	79	,	1
	$B_{X/C}^1$	80	,	1
exposé 5				
	$\Omega_{X/C}^1$	92	,	2
	Ω_X^1	92	,	2
exposé 6				
	$\text{Alb}(X)$	101	,	3
	$\rho(X)$	102	,	3
exposé 7				
	$\hat{A}$	110	,	1
	φ_L	110	,	1
	T_x	110	,	1
	$K(L)$	110	,	1
	e^L	112	,	2
	$G(L)$	114	,	3

ABSTRACT

PENCILS OF CURVES OF GENUS AT LEAST TWO

(a seminar at the E.N.S. organised by L. Szpiro)

This seminar contains eight papers that we can divide into four groups :

Semi-stable reduction (exposé 1 by M. Deschamps). This is a local study of the semi-stable reduction of curves by the method of Artin-Winters augmented by more precise results due to M. Raynaud and J.-F. Boutot.

Numerical properties of the relative dualizing sheaf (exposé 3). This part proves, in any characteristic, the numerical positivity of the relative dualizing sheaf (a theorem of Arakelov in char. zero). Then a bound for the self-intersection of this sheaf is given which allows one to give a proof of the Chafarevich and Mordell conjectures in any characteristic. It is also shown that complete families of ordinary curves are constant.

Vanishing and counterexamples to vanishing (exposé 2 by R. Ménégaux, exposé 4 by M. Flexor, exposé 5 by R. Fossum). It is proved that the relative dualizing sheaf satisfies Kodaira-Ramanujan vanishing (exposé 2). The two other papers give new counterexamples to Kodaira-vanishing and closedness of global one forms in char. $p > 0$.

Rational pencils (exposés 7 and 8 by L. Moret-Bailly, and exposé 6 by A. Beauville). In the papers 7 and 8 are constructed examples of non constant families of principally polarized abelian varieties of dimension two over the projective line (char. $p > 0$). In 6 it is proved that a semi-stable non constant family of curves of genus at least two, over $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ must have at least four degenerate fibers.