Astérisque

LÊ DŨNG TRÁNG

Limites d'espaces tangents et obstruction d'Euler des surfaces

Astérisque, tome 82-83 (1981), p. 45-69
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__45_0>

© Société mathématique de France, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire E.N.S. (1978-1979)

Exposé n° 4

LIMITES D'ESPACES TANGENTS ET OBSTRUCTION D'EULER DES SURFACES

Par LÊ Dũng Tráng

Dans [14], R. Mac Pherson a défini l'obstruction d'Euler d'un germe d'espace analytique complexe réduit (voir aussi [4]). Cette obstruction d'Euler lui permet de construire des classes de Chern pour les variétés algébriques singulières. Dans cet exposé, nous allons montrer une formule de B. Teissier et moi-même pour calculer l'obstruction d'Euler d'un germe de surface analytique. Nous ne ferons la démonstration que dans le cas d'une surface $(X,0)$ dans $(\mathbb{C}^3,0)$. Dans [12], B. Teissier et moi-même obtenons un résultat général pour un germe d'espace analytique réduit quelconque. Le calcul de l'obstruction d'Euler que nous faisons ici repose sur une relation de G. González-Sprinberg-Verdier (cf [4]). Dans le cas des germes de surfaces $(X,0)$ dans $(\mathbb{C}^3,0)$ ce calcul utilise une description explicite des limites d'espaces tangents de X en 0 (cf [7]). Nous rappelons les résultats préliminaires dont nous avons besoin.

1. Limites d'espaces tangents.

(1.1) Soit (X,x) un germe d'espace analytique complexe réduit équidimensionnel de dimension d. On supposera $(X,x) \subset (\mathbb{C}^{N+1},0)$.

On désignera encore par X un représentant assez petit de (X,x).

On note $\nu : \tilde{X} \longrightarrow X$ <u>la modification de Nash de</u> X (cf [14] ou [4]).

(1.1.1.) On appelle <u>espace des limites d'espaces tangents à</u> X <u>en</u> x l'espace analytique $\nu^{-1}(x)$. L'ensemble analytique sous-jacent $|\nu^{-1}(x)|$ à $\nu^{-1}(x)$ est appelé <u>ensemble</u> des limites d'espaces tangents de X en 0. Ses éléments sont les limites d'espaces tangents à X en x. Par le plongement local $(X,x) \subset (\mathbb{C}^{N+1},0)$, on peut considérer $|\nu^{-1}(x)|$ comme une sous-variété projective de $G(N,d-1)$, Grassmanienne des d-plans de $\mathbb{C}^{N+1}$ qui passent par 0.

On note $C_{X,x}$ le <u>cône tangent</u> de X en x.

(1.1.2.) <u>Théorème</u>.- Les espaces tangents au cône tangent réduit à X en x sont des limites d'espaces tangents à X en x.

Ce théorème est corollaire d'un résultat plus fort que nous allons rappeler (cf [7]).

On sait que, grâce au plongement de (X,x) dans $(\mathbb{C}^{N+1},x)$, les génératrices du cône tangent réduit $|C_{X,x}|$ sont les limites de sécantes de X en x dans le sens suivant (cf [24]) : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $X - x$ qui tend vers x telle que la suite de $\mathbb{P}^N$ des droites $(\overline{xx_n})$ tende vers une limite l, alors $l \in \mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|$. Réciproquement, tout point de $\mathrm{Proj}|C_{X,x}|$ est obtenu de cette façon.

(1.1.3.) Considérons une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non singuliers dans X qui tend vers x. On suppose que les suites $(\overline{xx_n})_{n\in\mathbb{N}}$

et $(T_{x_n} X)_{n \in \mathbb{N}}$ de sécantes et de plans tangents convergent respectivement vers l et T. Un lemme de H. Whitney ([24]) (voir [10]) montre que : $T \supset l$.

Nous avons le théorème suivant (cf [7]) :

(1.1.4.) <u>Théorème</u>.- Il existe un ouvert de Zariski Ω dense dans $\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|$ tel que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme dans (1.1.3.) et pour laquelle $l \in \Omega$, on ait T tangent à $|C_{X,x}|$ le long de l.

Il est bien clair que le théorème (1.1.4.) entraîne le théorème (1.1.2.).

(1.1.5.) <u>Remarques</u>.- L'ensemble des limites d'espaces tangents au cône réduit $|C_{X,x}|$ en son sommet forme une sous-variété projective de $G(N,d-1)$ qu'on notera $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|)^\vee$ et qui est la <u>variété duale</u> de $\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}| \subset \mathbb{P}^N$.

Le théorème (1.1.2.) dit que : $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|)^\vee \subset |\nu^{-1}(x)|$.

En général on a : $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|)^\vee \neq |\nu^{-1}(x)|$. En effet, si (X,x) est un germe d'hypersurface à singularité isolée, la modification de Nash $\nu : \tilde{X} \longrightarrow X$ est l'éclatement de l'idéal jacobien (cf [16]). Dans ce cas $\dim |\nu^{-1}(x)| = d - 1$. Or il existe des hypersurfaces dont la singularité est isolée et le cône tangent réduit en cette singularité est un hyperplan ; ceci entraîne que $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|)^\vee$ est alors un point. Donc si $d \geq 2$, on a bien $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|)^\vee \neq |\nu^{-1}(x)|$ dans ce cas.

Dans le cas où $\dim_x X = 1$, le lemme de Whitney implique qu'on a toujours :

$$(\mathrm{Proj}\,|C_{X,x}|)^\vee = |\nu^{-1}(x)| .$$

(1.2) Dans le cas d'un germe d'espace analytique réduit (X,x) général, nous n'avons pas de description générale de l'ensemble des limites d'espaces tangents à X en x. Dans le cas des germes d'hypersurfaces et surtout pour les surfaces de $(\mathbb{C}^3,0)$, dans [10] et [7] nous avons obtenu des résultats assez précis. Dans le cas de singularités isolées, ceux-ci sont conséquences d'un théorème de B. Teissier dans [20], Chap. 1, (Proposition 2.9).

(1.2.1.) <u>Théorème</u>.- Soit $(X,0)$ un germe d'hypersurface complexe dans $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ défini par l'équation $f = 0$. L'hyperplan $z_0 = 0$ <u>n'est pas</u> limite d'espaces tangents à X en 0 si et seulement si $\partial f/\partial z_0\, \mathcal{O}_{X,0}$ est entier sur l'idéal $(\partial f/\partial z_1, \ldots, \partial f/\partial z_n)\mathcal{O}_{X,0}$ de $\mathcal{O}_{X,0}$.

Pour pouvoir bien interpréter ce théorème, nous rappelons rapidement ce qu'est un élément entier sur un idéal I d'un anneau commutatif noethérien A (cf [13]) :

On dit que $\alpha \in A$ est <u>entier sur l'idéal</u> I de A s'il existe $a_1, \ldots, a_k \in A$ tels que $a_i \in I^i$ et :

$$\alpha^k + a_1\alpha^{k-1} + \ldots + a_k = 0$$

Si A est un anneau local analytique complexe (i.e. quotient d'un anneau local de séries entières complexes convergentes) qui définit un germe (Y,y) d'espace analytique complexe, on a (cf [13] théorème 2.1, ou [5] théorème 7.5) :

(1.2.2.) <u>Théorème</u>.- Soit $A = \mathcal{O}_{Y,y}$ et I un idéal de $\mathcal{O}_{Y,y}$. Soit $\alpha \in A$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) α est entier sur I dans A ;

2) soit $(g_1,\dots,g_k)$ un système de générateurs de I. Il existe un voisinage ouvert U de y dans Y et $C \geq 0$ tel que, pour tout $z \in U$, on ait :

$$|\alpha(z)| \leq C \operatorname{Sup}\{g_1(z),\dots,g_k(z)\} \quad ;$$

3) pour tout chemin analytique $p : (\mathbb{D},0) \longrightarrow (Y,y)$ la valuation de α en 0 pour p est minorée par la borne inférieure des valuations des générateurs $g_1,\dots,g_k$ de I en 0 pour p :

$$v_p(\alpha) \geq \inf\{v_p(g_1),\dots,v_p(g_k)\}$$

Une conséquence de (1.2.1.) est :

(1.2.3.) <u>Corollaire</u>.- (B. Teissier [20] Chap. II, Remarque 1.6) Si $(X,0)$ est une hypersurface de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ ayant en 0 une singularité isolée, un hyperplan H de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui passe par 0 n'est pas une limite d'espaces tangents à X en 0 si et seulement si le nombre de Milnor $\mu(X \cap H,0)$ de $X \cap H$ en 0 est minimum.

Rappelons que, si $(X,0)$ est un germe d'hypersurface de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ définie par $f = 0$ et ayant en 0 une singularité isolée, J. Milnor dans [15] a défini le nombre de Milnor :

$$\mu(X,0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_0,\dots,z_n\} \Big/ \left(\partial f/\partial z_0,\dots,\partial f/\partial z_n\right)$$

A l'aide de [17] et des résultats de J. Milnor [15], on peut montrer que, si $\varepsilon > 0$ est assez petit et $t \in \mathbb{C}$, $0 < |t| \ll \varepsilon$, la variété à bord $F_t = \{f = t\} \cap B_\varepsilon$, où B_ε est la boule de $\mathbb{C}^{n+1}$ centrée en 0 et de rayon ε, a le type d'homotopie d'un bouquet de $\mu(X,0)$ sphères de dimension réelle n (i.e. un ensemble topologique formé de $\mu(X,0)$ sphères de dimension n

ayant un seul point en commun).

Si $(X,0)$ est un germe d'hypersurface de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ à singularité isolée, on remarque que pour un ouvert de Zariski Ω_k de la Grassmanienne $G(n,k-1)$ des k-plans de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui passent par 0, pour tout $E \in \Omega_k$, le nombre de Milnor de $X \cap E$ en 0 est minimum (cf [20]). Comme dans [20], on note pour tout $E \in \Omega_k$:

$$\mu(X \cap E,0) = \mu^{(k)}(X,0)$$

donc : $$\mu(X,0) = \mu^{(n+1)}(X,0)$$

Le corollaire (1.2.3.) peut donc s'énoncer en disant que l'hyperplan H n'est pas une limite d'espaces tangents à X en 0 si et seulement si $H \in \Omega_n$.

Ce corollaire nous a permis de montrer dans [10] :

(1.2.4.) <u>Théorème</u>.- Si $(X,0)$ est une surface dans $(\mathbb{C}^3,0)$ ayant une singularité isolée en 0, l'ensemble des limites d'espaces tangents à X en 0 est l'union de $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,0}|)^\vee$ et d'un nombre fini de droites qui représentent des pinceaux de plans dont les axes sont des génératrices de $C_{X,0}$. On appelle ces génératrices les <u>tangentes exceptionnelles de</u> X <u>en</u> 0.

(1.2.5.) <u>Remarque</u>.- Dans [10], dans ce cas où $(X,0)$ est une surface de $(\mathbb{C}^3,0)$ ayant une singularité isolée, on montre que toutes les génératrices singulières de $|C_{X,0}|$ sont des tangentes exceptionnelles.

Dans [11], nous montrons le résultat suivant :

(1.2.6.) <u>Théorème</u>.- Si $(X,0)$ est une surface de $(\mathbb{C}^3,0)$ ayant une singularité isolée en 0, si $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,0}|)^\vee$ est l'ensemble

des limites d'espaces tangents en 0 , on a :

1) $C_{X,0}$ est réduit ;

2) $(X,0)$ est équisingulière à $(C_{X,0},0)$.

La notion d'équisingularité dans ce théorème doit s'entendre dans le sens suivant :

(1.2.7.) Soit $f = 0$ une équation de $(X,0)$. Soit $m = m(X,0)$ la multiplicité de X en 0 . L'équation $F = 0$, où $F(x,y,z,t) = t^{-m}f(tx,ty,tz)$, définit dans $(\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C},0)$ un germe d'hypersurface $\mathcal{X}$, qu'on peut considérer, en projetant sur l'axe $(\mathbb{C},0)$ des t , comme un germe de déformation $\varphi : (\mathcal{X},0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ de $(C_{X,0},0)$ dont la fibre générale $\mathcal{X}_t$ sur t est analytiquement isomorphe à X . On remarque qu'en éclatant $\{0\} \times \mathbb{C}$ dans cette hypersurface $\mathcal{X}$, sous les hypothèses du théorème (1.2.6.) on obtient une résolution des singularités fortes au sens de [21] . De plus, si on projette génériquement $(\mathcal{X},0)$ sur $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C},0)$, sous les hypothèses de (1.2.6.) le discriminant de cette projection est équisingulier le long de $\{0\} \times \mathbb{C}$ (au sens de [25]). Pour plus de détails le lecteur pourra consulter [11] .

(1.3) Quand $(X,0)$ est une surface de $(\mathbb{C}^3,0)$ qui n'a pas nécessairement une singularité isolée en 0 , dans [7] nous avons obtenu un résultat analogue à (1.2.4.) :

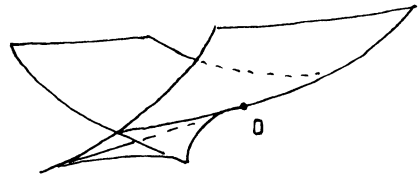
(1.3.1.) <u>Théorème</u>.- Soit $(X,0) \subset (\mathbb{C}^3,0)$ un germe de surface analytique complexe (réduite). La conclusion de (1.2.4.) reste valable. Les droites qui représentent les pinceaux de plans sont

des génératrices de $C_{X,0}$ qu'on appelle les tangentes exceptionnelles de X en 0.

Dans le cas où 0 n'est pas une singularité isolée, on ne peut pas utiliser le corollaire (1.2.3.), mais on a encore :

Si le plan H passant par 0 donne $\mu(X \cap H,0)$ minimum, alors H n'est pas limite d'espaces tangents à X en 0. Cette implication suffit pour établir (1.3.1.) comme (1.2.4.) (cf [7]).

Attention ! le corollaire (1.2.3.) n'est pas vrai si la singularité n'est pas isolée. En effet, dans le cas de la queue d'aronde, discriminant du polynôme général du 4e degré en X sans terme de degré 3 :



On sait qu'en 0 la queue d'aronde n'a qu'une seule limite d'espace tangent, à savoir le plan du cône tangent, et on peut trouver un plan H tel que $(X \cap H,0)$ n'ait pas la topologie générique (i.e. $\mu(X \cap H,0)$ minimum d'après [9]) et qui est transverse au cône tangent.

De plus dans cet exemple, les limites d'espaces tangents coïncident avec $(\mathrm{Proj}\,|\,C_{X,0}|)^\vee$, i.e. il n'y a pas de tangentes exceptionnelles et on ne peut raisonnablement pas dire que $(X,0)$ et $(C_{X,0},0)$ puissent être équisinguliers. Mais dans cet exemple, $C_{X,0}$

n'est pas réduit. En fait, dans [11] nous démontrons :

(1.3.2.) <u>Théorème</u>.- Soit $(X,0)$ un germe de surface analytique complexe dans $(\mathbb{C}^3,0)$. On suppose que le cône tangent de X en 0 $C_{X,0}$ est réduit et que l'ensemble des limites d'espaces tangents à X en 0 égale $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,0}|)^{\vee}$, alors $(X,0)$ est équisingulière à $(C_{X,0},0)$.

Pour plus de détails, le lecteur pourra encore consulter [11].

De [10], [7] et [11] nous tirons les caractérisations suivantes des tangentes exceptionnelles :

(1.3.3.) <u>Théorème</u>.- Soit $(X,0)$ une surface de $(\mathbb{C}^3,0)$. Soit l une génératrice de $C_{X,0}$ qui n'est pas tangente en 0 au lieu singulier Σ de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) la génératrice l est une tangente exceptionnelle ;

2) soit $e : X' \longrightarrow X$ l'éclatement de $\{0\}$ dans X, la surface X' n'est pas équisingulière le long de $e^{-1}(0)$ au point de $e^{-1}(0)$ qui représente l ;

3) pour toute projection $\pi : (X,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,0)$ de degré égal à la multiplicité de X en 0, l est tangente à une composante du lieu critique de π ;

4) soit $\nu' : \tilde{X}' \longrightarrow X'$ l'éclatement de l'idéal $(\partial\mathcal{H}/\partial x, \partial\mathcal{H}/\partial y, \partial\mathcal{H}/\partial z)\mathcal{O}_{X'}$ dans X', alors ν' est fini au-dessus de l ;

5) en tout point de $l \times \{0\} - 0$, la partie non singulière de $\mathcal{X} - \mathcal{X}_0$ (cf (1.2.7.)) ne satisfait pas la <u>condition de Thom</u> le long de $\mathcal{X}_0$ relativement à $\varphi : (\mathcal{X},0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$.

Rappelons quelle est la <u>condition de Thom</u> (cf [6]) :

Soit $g : Z \longrightarrow \mathbb{D}$ un morphisme analytique à valeur dans un disque ouvert $\mathbb{D}$. Soient Z_α et Z_β deux sous-espaces non singuliers localement fermés dans Z. On suppose que les restrictions de g à Z_α et Z_β sont de rang constant et que $Z_\alpha \subset \overline{Z_\beta}$. On dit que Z_β satisfait la condition de Thom en $z \in Z_\alpha$ le long de Z_α relativement à g si pour toute suite $(z_n \in Z_\beta)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers z et pour laquelle $\lim\limits_{n \to \infty} T_{z_n}(g^{-1}(g(z_n)) \cap Z_\beta)$ existe on a :

$$\lim_{n \to \infty} T_{z_n}(g^{-1}(g(z_n)) \cap Z_\beta) \supset T_z(g^{-1}(g(z)) \cap Z_\alpha)$$

(1.4) Dans [7] nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des limites d'espaces tangents à X en 0 soit fini quand $(X,0)$ est une surface de $(\mathbb{C}^3,0)$.

Pour cela considérons une courbe plane $(C,0)$. On associe à $(C,0)$ un invariant topologique de $(C,0)$:

$$\Delta(C,0) = \mu(C,0) + m(C,0) - 1$$

appelé le <u>discriminant de</u> C <u>en</u> 0 (cf [26]). Ce nombre est aussi la multiplicité du point discriminant d'une projection de $(C,0)$ sur $(\mathbb{C},0)$ de degré $m(C,0)$.

Soit $l : (\mathbb{C}^3,0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ une forme linéaire générale par rapport à $(X,0)$. Alors pour t assez petit non nul $l^{-1}(t) \cap X$ est une courbe plane ayant ses singularités en $x_1(t),\ldots,x_k(t)$. On a alors :

(1.4.1.) <u>Théorème</u>.- (cf [7]) L'ensemble des limites d'espaces tangents à X en 0 est fini si et seulement si pour toute forme linéaire

$l : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ assez générale, on a :

$$\Delta(l^{-1}(0) \cap X, 0) = \sum_{i=1}^{k} \Delta(l^{-1}(t) \cap X, x_i(t))$$

pour $t \neq 0$ assez petit.

(1.4.2.) Remarques.- 1) Si le lieu singulier Σ de X est non singulier en 0, d'après le critère discriminant de O. Zariski (cf [25]), l'ensemble des limites d'espaces tangents à X en 0 est fini si et seulement si X est équisingulier en 0 le long de Σ.

2) Le discriminant $\Delta(C,0)$ de $(C,0)$ peut se "voir" topologiquement de la façon suivante. Soit C_v la translatée de C dans $\mathbb{C}^3$ par un vecteur v assez général. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit ; si $0 < \|\overline{v}\| \ll \varepsilon$, $S_\varepsilon \cap C$ et $S_\varepsilon \cap C_v$ sont deux entrelacements dont le nombre d'enlacements égale $\Delta(C,0)$. En fait, ceci résulte de ce que le nombre de points de $C_v \cap C$ dans B_ε égale $\Delta(C,0)$.

3) Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe projective plane réduite irréductible. Si C n'est pas une droite projective, l'ensemble des droites projectives tangentes à C forme une courbe $C^\vee$ dans l'espace projectif $\check{\mathbb{P}}^2$ des droites projectives dans $\mathbb{P}^2$. La deuxième formule de Plücker donne le degré $\check{d}$ de $C^\vee$ en fonction du degré d de C et des discriminants des singularités $x_1,\ldots,x_k$ de C :

$$\check{d} = d(d-1) - \sum_{i=1}^{k} \Delta(C,x_i)$$

(grâce à 2) ci-dessus, ceci est démontré dans [22], Chap. I, 15, p. 43).

2. La formule de González-Verdier.

(2.1) Soit $(X,0)$ un germe d'espace analytique réduit équidimensionnel de dimension d. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\tilde{e}"] \arrow[d, "\nu'"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\nu"] \\ X' \arrow[r, "e"] & X \end{tikzcd}$$

où $e : X' \longrightarrow X$ est l'éclatement de $\{0\}$ dans X, ν est la modification de Nash, $\tilde{e}$ est l'éclatement de $\nu^{-1}(0)$ et $\nu' : \mathcal{X} \longrightarrow X'$ est l'unique morphisme analytique qui rende le diagramme commutatif. On rappelle que $e^{-1}(0)$ est isomorphe à $\mathrm{Proj}\, C_{X,0}$. On note $Y' = e^{-1}(0)$, $\tilde{Y} = \nu^{-1}(0)$ et

$\mathcal{Y} = \tilde{e}^{-1}(\tilde{Y}) = \nu'^{-1}(Y')$

Sur $\tilde{X}$ on a le <u>fibré de Nash</u> $\tilde{T} \longrightarrow \tilde{X}$. L'image inverse de ce fibré par $\tilde{e}$ est un fibré T sur $\mathcal{X}$. De même sur X' on a le fibré $N' \longrightarrow X'$ construit de la façon suivante :

Supposons que $(X,0) \subset (\mathbb{C}^{N+1},0)$, on peut considérer X' comme la fermeture dans $X \times \mathbb{P}^N$ du graphe de l'application de $X - \{0\}$ dans $\mathbb{P}^N$ qui à x fait correspondre la droite $\overline{0x}$. On a donc une projection $X' \xrightarrow{\lambda} \mathbb{P}^N$, le fibré $N' \longrightarrow X'$ est l'image inverse du fibré canonique de $\mathbb{P}^N$ par λ. L'image inverse du fibré $N' \longrightarrow X'$ par ν' donne un fibré $N \longrightarrow \mathcal{X}$.

(En fait, le fibré de Nash $\tilde{T} \longrightarrow \tilde{X}$ est image inverse, par le morphisme de Gauss $\tilde{X} \xrightarrow{\gamma} G$, du fibré universel de la Grassmanienne $G = G(N,d-1)$ des d-plans de $\mathbb{C}^{N+1}$ passant par 0).

Dans [4], G. González-Sprinberg et Verdier ont établi la

formule suivante permettant de calculer l'obstruction d'Euler de X en 0 :

(2.1.1.) <u>Théorème</u>.- $Eu_0(X) = \deg (c_{d-1}(T-N) \cap [\mathcal{Y}])$

Le symbole $c_{d-1}(T-N)$ désigne le terme de degré $d-1$ dans $\dfrac{c_*(T)}{c_*(N)}$, i.e. :

(2.1.2.) $c_{d-1}(T-N) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i c_{d-i-1}(T)\, c_1(N)^i$

car $c_*(N) = 1 + c_1(N)$

et $[\mathcal{Y}]$ désigne la classe fondamentale de $\mathcal{Y}$.

En fait, dans [12] nous montrons que :

(2.1.3) $Eu_0(X) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i m_{d-i}$, où m_{d-i} est la multiplicité en 0 de la variété polaire de $(X,0)$ de dimension $d-i$. Nous allons montrer cette formule dans le cas où $d = 2$. Dans ce cas, (2.1.2) donne :

(2.1.4) $(d=2)$ $c_1(T-N) = c_1(T) - c_1(N)$

(2.2) Dans ce paragraphe, plaçons-nous dans le cas où $(X,0)$ est une surface de $(\mathbb{C}^3,0)$. On reprend les notations de (2.1). On remarque que le théorème (1.1.4.) peut s'interpréter de la façon suivante :

(2.2.1.) <u>Théorème</u>.- Pour tout point y' d'un ouvert de Zariski dense Ω' dans Y', $\nu'^{-1}(y')$ ne contient qu'un seul point.

(2.2.2.) Ainsi, au-dessus d'un voisinage de tout point $y' \in \Omega'$, le morphisme ν' induit un morphisme biméromorphe fini.

De même, le théorème (1.3.1.) peut se traduire de la façon suivante :

(2.2.3.) <u>Théorème</u>.- Pour tout point $\tilde{y}$ d'un ouvert de Zariski dense $\tilde{\Omega}$ de $\tilde{Y}$, $\tilde{e}^{-1}(\tilde{y})$ ne contient qu'un seul point.

<u>Démonstration de (2.2.1.) et (2.2.3.)</u> :

On remarque que $\eta = \nu \circ \tilde{e} = e \circ \nu'$ est l'éclatement de l'idéal produit de l'idéal maximal $\mathfrak{M}$ qui définit $\{0\}$ de X et de l'idéal jacobien $J(f)$ engendré par $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial y$ dans $\mathcal{O}_{X,0}$, avec $f(x,y,z) = 0$ équation de $(X,0)$ dans $(\mathbb{C}^3,0)$.

On peut donc considérer $\mathcal{X}$ comme la fermeture dans $X \times \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2$ du graphe du morphisme analytique de $X - \Sigma$ dans $\mathbb{P}^N \times G$ qui à un point $x \in X - \Sigma$ non singulier de X fait correspondre le couple de la droite $Ox \in \mathbb{P}^2$ et du plan tangent $T_x X \in G(2,1) = \check{\mathbb{P}}^2$.

On remarque alors que $\tilde{e}$ est induit par la projection $X \times \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow X \times \check{\mathbb{P}}^2$, que ν' est induit par la projection $X \times \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow X \times \mathbb{P}^2$ et que η est induit par la projection $X \times \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow X$.

Soit l une génératrice dans l'ouvert Ω de (1.1.4.). Le théorème (1.1.4.) montre que $|\nu'^{-1}(0,l)| = \{(0,l,T)\}$ où T est le plan tangent à $|C_{X,0}|$ le long de l. Ceci démontre (2.2.1.) en prenant $\Omega' = \{0\} \times \Omega$.

Soient $C_1,\dots,C_k$ les composantes de $\mathrm{Proj}\,|C_{X,0}|$. Soient $\check{C}_1,\dots,\check{C}_r$ les composantes de dimension 1 de $(\mathrm{Proj}\,|C_{X,0}|)^\vee$ duales de $C_1,\dots,C_r$, i.e. $C_{r+1},\dots,C_k$ sont des droites.

On a un ouvert de Zariski dense Ω_i de C_i $(i = 1,\dots,r)$ tel que pour tout $l \in \Omega_i$, le plan tangent à $|C_{X,0}|$ le long de l coupe transversalement $|C_{X,0}| - l$.

On remarque ue si $(0,T) \in \tilde{e}(\nu^{-1}(\Omega_i))$ $(i = 1,\dots,r)$, on a $\tilde{e}^{-1}((0,T)) = (0,l,T)$ où l est l'unique génératrice de

$|C_{X,0}|$ le long de laquelle T est tangent.

Soient $\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_s$ les droites de $\check{\mathbb{P}}^2$ qui représentent les pinceaux de plans dont les axes sont les tangentes exceptionnelles $l_1,\dots,l_s$. On remarque qu'il existe un ouvert de Zariski dense V_j ($j = 1,\dots,s$) de $\mathcal{L}_j$ tel que pour tout $T \in V_j$, les génératrices de $T \cap |C_{X,0}|$ sauf l_j sont dans l'ouvert Ω de (1.1.4.) et T coupe $|C_{X,0}|$ transversalement le long de ces génératrices. On remarque alors que pour tout $(0,T)$, tel que $T \in V_j$, on a : $|\tilde{e}^{-1}(0,T)| = \{(0,l_j,T)\}$. On choisit donc :

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{r} \tilde{e}(\nu^{-1}(\Omega_i)) \cup \bigcup_{j=1}^{s} V_j .$$

Ceci démontre (2.2.3.).

(2.3) <u>Calcul de l'obstruction d'Euler</u>.

Soit $(X,0)$ un germe de surface analytique complexe (réduite) dans $(\mathbb{C}^3,0)$. Dans [7] nous avons défini la partie verticale du lieu critique d'une projection générale π de $(X,0)$ sur $(\mathbb{C}^2,0)$. Soit Γ^* l'espace critique de la restriction à la partie non singulière $X - \Sigma$ de X d'une projection assez générale π de $(X,0)$ sur $(\mathbb{C}^2,0)$ (on remarque que Γ^* peut être vide : cf par exemple l'exemple ci-dessus dans (1.3) de la queue d'aronde ; en fait on peut montrer que Γ^* est vide si et seulement si les limites d'espaces tangents à X en 0 sont en nombre fini). Si π est assez générale et Γ^* non vide, Γ^* est non singulière. Dans ce cas, la fermeture de Γ^* dans X s'appelle la partie verticale Γ du lieu critique de π (dans [12] cette partie verticale est une courbe polaire). On a alors :

(2.3.1.) <u>Théorème</u>.- Si $(X,0)$ est un germe de surface analytique complexe dans $(\mathbb{C}^3,0)$, on a :

$$Eu_0(X) = m(X,0) - m(\Gamma,0)$$

où Γ est la partie verticale d'une projection assez générale de $(X,0)$ sur $(\mathbb{C}^2,0)$.

On remarque que $(\Gamma,0)$ est la variété éclaire de dimension 1 de $(X,5)$.

Nous donnerons ci-dessous les idées de la démonstration. Un résultat plus général est démontré dans [12]. Nous allons tout d'abord donner des corollaires.

On peut calculer $m(\Gamma,0)$ de la façon suivante. Soit $l : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire générale relativement à X. Soit $t \neq 0$ assez petit. Les points singuliers de $l^{-1}(t) \cap X = X_t$ sont $x_1(t),\ldots,x_k(t)$; on a alors :

(2.3.2.) $$m(\Gamma,0) = \Delta(X_0,0) - \sum_{i=1}^{k} \Delta(X_t,x_i(t))$$

(On retrouve ainsi que $m(\Gamma,0) = 0$, i.e. $\Gamma = \emptyset$ si et seulement si X n'a qu'un nombre fini de limites d'espaces tangents en 0).

Cette formule (2.3.2.) est obtenue de la façon suivante :

Si $\pi : (X,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,0)$ est assez générale, on remarque (cf [12] (5.1.2)) que $m(\Gamma,0) = m(|\pi(\Gamma)|,0)$. En fait, si $(\pi(\Gamma),0)$ est défini comme image directe de $(\Gamma,0)$, $\pi(\Gamma)$ est réduit. Or la multiplicité du discriminant de π égale $\Delta(X_0,0)$: cette multiplicité égale la multiplicité d'intersection d'une droite générale L de $\mathbb{C}^2$ passant par 0 et du discriminant $\Delta(\pi)$ de π. Or $L \cap \Delta(\pi)$ est le discriminant de $\pi_L : (\pi^{-1}(L),0) \longrightarrow (L,0)$. D'après (1.4) la multiplicité du discriminant de π_L est égale à $\Delta(\pi^{-1}(L),0)$. Si π et L sont assez généraux, on a bien $\Delta(\pi^{-1}(L),0) = \Delta(l^{-1}(0) \cap X,0)$ avec

$l : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ assez général.

La multiplicité de $\pi(\Gamma)$ en 0 est obtenue en retranchant de $m(\Delta(\pi),0)$ la "contribution" de $(\pi(\Sigma),0)$. Un argument comme ci-dessus donne que cette contribution est précisément $\sum_{i=1}^{k} \Delta(X_t, x_i(t))$.

Soient $(\Sigma_j)_{1 \leq j \leq s}$ les branches analytiques de Σ. Soit ν_i la multiplicité de Σ_i. Soit μ_i le nombre de Milnor et m_i la multiplicité de X_t en un point singulier de X_t sur Σ_i.

On a :

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta(X_t, x_i(t)) = \sum_{i=1}^{s} \nu_i(\mu_i + m_i - 1)$$

On obtient ainsi :

$$m(\Gamma,0) = \Delta(X_0,0) - \sum_{i=1}^{s} \nu_i(\mu_i + m_i - 1)$$

Donc :

$$Eu_0(X) = m(X,0) - \Delta(X_0,0) + \sum_{i=1}^{s} \nu_i(\mu_i + m_i - 1)$$

Comme $\Delta(X_0,0) = \mu(X_0,0) + m(X,0) - 1$ on obtient :

$$(2.3.3.) \quad Eu_0(X) = 1 - \mu(X_0,0) + \sum_{i=1}^{s} \nu_i(\mu_i + m_i - 1)$$

En remarquant que $1 - \mu(X_0,0) + \sum_{i=1}^{s} \nu_i \mu_i$ égale la caractéristique d'Euler-Poincaré de $(X_t \cap B_\varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit et X_t la fibre sur $t \in \mathbb{C}$ par une forme linéaire : $\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ assez générale pour $t \neq 0$ et $|t| \ll \varepsilon$, on a :

$$(2.3.4.) \quad Eu_0(X) = \chi(X_t \cap B_\varepsilon) + \sum_{i=1}^{s} \nu_i(m_i - 1)$$

On retrouve ainsi une formule de Dubson (cf [3]) qu'on généralise aussi dans [12] (6.1.9).

De plus, si la singularité de X en 0 est isolée on a :

$Eu_o(X) = \chi(X_t \cap B_\varepsilon)$.

Revenons au théorème (2.3.1.).

Soit $\mathcal{L}$ une droite de $\check{\mathbb{P}}^2$. Cette droite représente en homologie l'obstruction qui donne la première classe de Chern du fibré universel sur $\check{\mathbb{P}}^2$. Si $\mathcal{L}^\vee$ est assez générale, son image inverse $\tilde{e}^{-1}(\gamma^{-1}(\mathcal{L}^\vee))$ par la composée du morphisme de Gauss $\tilde{X} \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^2$ et de $\tilde{e}$ représente dans l'homologie de $\mathcal{X}$ l'obstruction qui donne la première classe de Chern de $T' \longrightarrow \mathcal{X}$. A cause du changement de signe en dimension 1 entre la classe de Chern définie par obstruction et celle définie classiquement, on a :

$$\deg(c_1(T') \cap [\mathcal{Y}]) = - i(\tilde{e}^{-1}(\gamma^{-1}(\mathcal{L}^\vee)), \mathcal{Y})_{\mathcal{X}}$$

si $\mathcal{L}^\vee$ est assez général, avec $i(\ ,\ )$ désignant la forme d'intersection dans $\mathcal{X}$.

Comme $\mathcal{L}^\vee$ est assez général, $\gamma^{-1}(\mathcal{L}^\vee)$ ne coupe $\tilde{Y}$ qu'en des points contenus dans l'ouvert $\tilde{\Omega}$ de (2.2.3.). On obtient ainsi :

$$i(\tilde{e}^{-1}(\gamma^{-1}(\mathcal{L}^\vee)), \mathcal{Y})_{\mathcal{X}} = i(\gamma^{-1}(\mathcal{L}^\vee), \tilde{Y})_{\tilde{X}}$$

car sur $\tilde{\Omega}$, $\tilde{e}$ est fini et biméromorphe (cf (2.2.3.).

Dans [12] on montre alors que $i(\gamma^{-1}(\mathcal{L}^\vee), \tilde{Y})_{\tilde{X}}$ est la multiplicité de la partie verticale Γ d'une projection générale $(X,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,0)$ (cf (2.3)) , si $\mathcal{L}^\vee$ est assez générale.

De même si $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^2$ est une droite assez générale, $\nu'^{-1}(\lambda^{-1}(\mathcal{L}))$ représente dans l'homologie l'obstruction qui donne la première classe de Chern du fibré $N \longrightarrow \mathcal{X}$ (avec le $\lambda : X' \longrightarrow \mathbb{P}^2$ défini dans (2.1)).

On montre alors :

$$\deg(c_1(N') \cap [\mathcal{Y}]) = - i(\lambda^{-1}(\mathcal{L}), Y')_{X'}$$

si $\mathcal{L}$ est assez général. Mais :

$$i(\lambda^{-1}(\mathcal{L}),Y')_{X'} = m(X,0) \quad .$$

Dans [4] G. González-Sprinberg montre en fait :

$$[\mathcal{Y}] = \sum_{\alpha=1}^{k} m_\alpha [C_\alpha] + \sum_{\beta=1}^{s} p_\beta [\mathcal{L}_\beta]$$

où (C_α) sont les composantes de $\mathcal{Y}$ qui se projettent par ν' sur les composantes de Y' et $\mathcal{L}_\beta$ sont les composantes de $\mathcal{Y}$ qui se projettent sur les pinceaux de $\check{\mathbb{P}}^2$ dans $\tilde{Y}$.

On a : $\sum_{\alpha=1}^{k} m_\alpha = m(X,0)$

et $\sum_{\alpha=1}^{k} m_\alpha + \sum_{\beta=1}^{s} p_\beta = m(\Gamma,0)$

si $C_1,\dots,C_k$ sont les composantes de $\mathcal{Y}$ dont l'image par ν' ne sont pas des droites projectives.

(2.3.5.) Un argument de semi-continuité montre que $m_1,\dots,m_k$ sont les multiplicités de chacune des composantes de Proj $C_{X,0}$ et $p_1,\dots p_s$ sont les multiplicités des courbes dans $(\Gamma,0)$ dont les tangentes sont les tangentes exceptionnelles de X en 0 .

3. Compléments.

(3.1) Dans [12] on trouve une formule générale pour calculer le nombre d'Euler d'un germe d'espace analytique complexe réduit $(X,0)$ comme somme alternée de multiplicités de variétés polaires.

La formule générale obtenue montre que la relation (2.3.4.) de Dubson est valable pour tout germe de surface réduite $(X,0)$ en utilisant [8] .

En fait, dans [12] on donne une formule qui généralise (2.3.4.) .

De plus, cette formule de [12] permet d'expliciter la classe de Chern-Mac Pherson-Schwartz (cf [14] et [19], voir aussi [1]) de façon géométrique.

(3.2) Grâce aux relations entre cycles polaires et classe de Chern-Mather (cf [18]) données par Todd, on obtient alors dans [12] des généralisations des formules de Plücker (cf [18]) comme théorèmes "à la Gauss-Bonnet" (voir aussi [2]).

(3.2.1.) <u>Exemples</u>.- a) Soit $X \subset \mathbb{P}^2$ une courbe projective irréductible et réduite. Soit $c_*(X)$ sa classe de Chern-Mac Pherson-Schwartz et $c_*^M(X)$ sa classe de Chern-Mather. On a :

$$c_*(X)(1_X) = c_*^M(X) - \sum_{i=1}^{k} (Eu_{x_i}(X) - 1)\ \mathrm{incl}_* c_*^M(\{x_i\})$$

où les x_i sont les points singuliers de X. On a dans ce cas : $Eu_{x_i}(X) = m(X,x_i)$, car X est une courbe. En appliquant les propriétés fonctorielles des classes de Chern-Mac Pherson-Schwartz (cf [14]), on obtient :

$$\chi(X) = -\check{d} + 2d - \sum_{i=1}^{k} (Eu_{x_i}(X) - 1)$$

où $\check{d}$ est le degré de la courbe duale de X. Dans (1.4.2.) 3), on a vu (2e formule de Plücker) :

$$\check{d} = d(d-1) - \sum_{i=1}^{k} (\mu(X,x_i) + m(X,x_i) - 1)$$

On vérifie bien :

$$\chi(X) = 2 - (d-1)(d-2) + \sum_{i=1}^{k} (\mu(X,x_i) + m(X,x_i) - 1)$$
$$- \sum_{i=1}^{k} (Eu_{x_i}(X) - 1) \quad .$$

Ce calcul est encore valable pour une courbe projective quelconque, en remarquant (cf [12] (6.2.6.1.)) qu'en degré 0 le degré de $C_1^M(X)$ égale la somme du nombre d'Euler en 0 du cône affine sur X et de la multiplicité de ce cône.

b) Si $X \subset \mathbb{P}^3$ est une surface projective irréductible et réduite, on a :

$$C_*(X)(1_X) = C_*^M(X) - \sum_{i=1}^{s} (E_i - 1)\, C_*^M(\Sigma_i)$$
$$+ \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} \left(- Eu_{x_j}(X) + Eu_{x_j}(\Sigma_i)(E_i - 1) - 1 \right) \{x_i\}$$

où les Σ_i ($i = 1,\dots,s$) sont les composantes du lieu singulier Σ de X et x_j sont les points de Σ_i où X n'est pas équisingulière le long de Σ , E_i est le nombre d'Euler en tout point de Σ_i où X est équisingulière le long de Σ_i (en fait E_i est la multiplicité m_i de ces points dans X).

On obtient une formule qui donne la caractéristique d'Euler de X en utilisant encore la fonctorialité de la classe de Mac Pherson-Schwartz (cf [14]) :

$$\chi(X) = \check{d} - 2\check{d}_1 + 3d + \sum_{i=1}^{s} (1 - E_i)(Eu_0(\tilde{\Sigma}_i) + m_0(\tilde{\Sigma}_i))$$
$$+ \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} (- Eu_{x_j}(X) + Eu_{x_j}(\Sigma_i)(E_i - 1) - 1)$$

où $\check{d}$ est le degré de la surface duale de X , $\check{d}_1$ est le degré de la courbe duale d'une section hyperplane générale de X et d est le degré de X , d'autre part $\tilde{\Sigma}_i$ est le cône affine dans $\mathbb{C}^4$ défini par Σ_i et $Eu_0(\tilde{\Sigma}_i)$ et $m_0(\tilde{\Sigma}_i)$ sont respectivement son nombre d'Euler en 0 et sa multiplicité (cf la remarque à la fin de l'exemple (3.2.1) a)).

Comme dans l'exemple a) ci-dessus, on remarque que cette formule reste encore valable en notant que le degré de $C_2^M(X)$ égale la somme du nombre d' Euler en 0 du cône affine $\tilde{X}$, de celui d'une section hyperplane générique et de celui d'une section plane générique (cf [12] (6.2.6.1.)).

Quand $X \subset \mathbb{P}^3$ n'a que des singularités isolées, comme $Eu_{x_j}(X) = 1 - \mu^{(2)}(X,x_j)$, où $\mu^{(2)}(X,x_j)$ est le nombre de Milnor d'une section plane générique de X par un espace non singulier qui passe par x_j , on retrouve la formule de Plücker établie par Teissier pour les hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$ (cf [18]).

c) Dans le cas où $(X,0)$ est un germe de surface analytique réduite dans $(\mathbb{C}^3,0)$ et à singularité isolée, A. N. Varchenko (cf [23]) a montré que, si $M(\varepsilon)$ est l'intersection de X avec une sphère S_ε centrée en 0 de rayon $\varepsilon > 0$ assez petit, l'intégrale :

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{M(\varepsilon)} \theta \wedge \alpha$$

où θ est la forme sur $M(\varepsilon)$ restrictionde l'image inverse de la 2-forme de Kälher sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ par l'application de $X - (0)$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ qui à $x \in X - (0)$ fait correspondre la droite complexe des vecteurs de T_xX orthogonaux à x pour la métrique hermitienne de $\mathbb{C}^3$ et α est la forme $\frac{\langle dZ,Z \rangle}{\|Z\|^2}$ (où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit hermitien de $\mathbb{C}^3$), tend vers un entier a_{00} qui n'est autre que $Eu_0(X)$.

Le lecteur trouvera dans [12] d'autres exemples.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. BRASSELET, Classes de M.H. Schwartz et classes de Mac Pherson, in Séminaire Douady-Verdier 1978-1979, Ecole Normale Supérieure, Paris.

[2] A. DUBSON, Classes caractéristiques des variétés singulières, C.R.A.S., t. 287, Série A, p. 237-239.

[3] A. DUBSON, Exposé au Séminaire Douady-Verdier 1978-1979, Ecole Normale Supérieure, Paris.

[4] G. GONZALEZ-SPRINBERG, L'obstruction locale d'Euler et le théorème de Mac Pherson, in Séminaire Douady-Verdier 1978-1979, Ecole Normale Supérieure, Paris.

[5] H. HIRONAKA, Introduction to the theory of infinitely near singular points, Mem. Mat. Ins. Jorge Juan n° 28, Madrid 1974.

[6] H. HIRONAKA, Stratification and flatness, in Real and Complex Singularities, Oslo 1976, Sijthoff and Noordhoff 1977.

[7] LÊ Dũng Tráng, Limites d'espaces tangents sur les surfaces, in Proc. of the symposium on algebraic singularities at Rheinhardsbrunn, Acad. Leopoldina, Halle, R.D.A.

[8] LÊ Dũng Tráng, Sur les cycles évanouissants des espaces analytiques, Note aux C.R.A.S., t. 288, p. 283-286 (1979)

[9] Lê Dũng Tráng-C.P. RAMANUJAM, The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type, Amer. J. Math. 98 (1976), 67-78.

[10] LÊ Dũng Tráng-J.P.G. HENRY, Limites d'espaces tangents, in Séminaire sur les fonctions de plusieurs variables complexes (Prof. Norguet), Springer Lecture Notes n° 482 .

[11] LÊ Dũng Tráng-B. TEISSIER, Sur la géométrie des surfaces complexes I. Tangentes exceptionnelles, in Amer. J. Math. 101,(1979)(Avril).

[12] LÊ Dũng Tráng-B. TEISSIER, Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, à paraître.

[13] M. LEJEUNE-JALABERT-B. TEISSIER, Clôture intégrale des idéaux et équisingularité, Sém. au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 1974, Pub. du Laboratoire de mathématiques pures de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

[14] R. MAC PHERSON, Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. of Maths., vol. 100, n° 2 (1974), p. 423-432.

[15] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Stud. 61, Princeton, 1968.

[16] A. NOBILE, Some properties of the Nash blowing-up, Pacific Journal of Maths 60 (1975), p. 297-305.

[17] V.P. PALAMODOV, On the multiplicity of holomorphic mappings, Funk. Anal. i ievo priloj., 1967, p. 54-65.

[18] R. PIENE, Cycles polaires et classes de Chern, Séminaire sur les singularités des surfaces 1977-1978, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, F-91128 Palaiseau Cedex.

[19] M.H. SCHWARTZ, Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe, C.R.A.S. 1965, t. 260, p. 3262-3264 et 3535-3537.

[20] B. TEISSIER, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, in Singularités à Cargèse 1972, Astérisque 7-8, S.M.F., Paris.

[21] B. TEISSIER, Cycles évanescents et résolution simultanée, Sém. sur les singularités de surfaces 1976-1977, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, F-91128 Palaiseau Cedex.

[22] G. VALIRON, Cours d'Analyse Mathématique, Equations fonctionnelles, Applications, Masson et Cie, Ed. 1945.

[23] A.N. VARCHENKO, Uspekhi Mat. Naouk Tom 33, 6, (1978) p. 199-200.

[24] H. WHITNEY, Local properties of analytic varieties, in Differential and Combinatorial topology, Pub. Princeton U. P., 1965.

[25] O. ZARISKI, Studies in equisingularity I & II, Amer. J. Math. 87 (1965).

[26] O. ZARISKI, Contributions to problem of equisingularity, Problems in Algebraic Geometry, C.I.M.E., Varenna 1969, Edizioni Cremonese, Roma.