

Astérisque

G. LAUMON

Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P. Deligne)

Astérisque, tome 82-83 (1981), p. 173-219

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__173_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__173_0)

© Société mathématique de France, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire E.N.S. (1978-1979)

Exposé n° 9

SEMI-CONTINUITÉ DU CONDUCTEUR DE SWAN

(d'après P. Deligne)

par G. LAUMON

0.- Introduction

Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et lisse de schémas, soit l un nombre premier inversible sur S et soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbb{F}_l$ -modules lisse^(*) sur S pour la topologie étale. M. Artin a démontré, [1] et [2], que dans ces conditions les faisceaux $R^n f_* \mathcal{F}$ ($n \geq 0$) sont lisses sur S .

Plus généralement, soit $g : Z \longrightarrow S$ un morphisme propre et lisse, soit $X \subset Z$ un ouvert de Z , complémentaire d'un diviseur Y à croisements normaux relativement à S [13], on note $f : X \longrightarrow S$ la restriction de g à X , soit l un nombre premier inversible sur S et soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbb{F}_l$ -modules lisse sur X , modérément ramifié le long de Y . Sous ces conditions de "régularité à l'infini", la conclusion du théorème de M. Artin est encore valable [13].

L'hypothèse de ramification modérée à l'infini est automatique si S est un schéma de caractéristique nulle, mais en général $\mathcal{F}$ admet une ramification sauvage le long de l'infini. On peut se demander comment étendre le résultat précédent.

Cet exposé apporte une réponse partielle. Le résultat principal

(*) Dans tout l'exposé "lisse" signifie, pour un faisceau, "localement constant constructible".

est le théorème 2.1.1, dû à Deligne, qui traite le cas où $f : X \longrightarrow S$ est lisse de dimension relative 1, et qui peut s'énoncer de la façon suivante : "si la ramification le long de l'infini est localement constante, les $R^n f_* \mathcal{O}_X(n)$ ($n \geq 0$) sont lisses". Ce théorème est un ingrédient essentiel pour l'étude des caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie étale, par la méthode des pinceaux [18].

On trouvera au numéro 1 des rappels sur le conducteur de Swan et la théorie des cycles évanescents. Le numéro 2 contient l'énoncé du théorème de Deligne et le principe de la démonstration. Celle-ci fait l'objet des numéros 3 à 7, le coeur de la démonstration étant le numéro 6.

1. Rappels

1.1. Le conducteur de Swan

1.1.0. Soit $S = \text{Spec}(R)$ un trait strictement local ; R est un anneau de valuation discrète hensélien à corps résiduel k séparablement clos de caractéristique $p \geq 0$. On note K le corps des fractions de R , $\eta = \text{Spec}(K)$ le point générique de S et $s = \text{Spec}(k)$ le point fermé de S .

1.1.1. Soit K'/K une extension finie galoisienne et soit $S' \longrightarrow S$ le normalisé de S dans K' ; $S' = \text{Spec}(R')$ où R' est un anneau de valuation discrète hensélien, de corps des fractions K' . On notera k' le corps résiduel de R' et on fera l'hypothèse suivante :

(1.1.1.1) L'extension résiduelle k'/k est triviale.

1.1.2. Soit G le groupe de Galois de K'/K , G opère sur R' et, si π' est une uniformisante de R' , on définit une application

$$i_G : G \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

en posant

$$i_G(g) = \begin{cases} v'(g(\pi') - \pi') & \text{si } g \neq 1 \\ \infty & \text{si } g = 1 \end{cases}$$

où v' est la valuation discrète de R' . Cette application ne dépend pas du choix de l'uniformisante π' .

On définit la fonction

$$sw_G : G \longrightarrow \mathbb{Z}$$

en posant

$$sw_G(g) = \begin{cases} 1 - i_G(g) & \text{si } g \neq 1 \\ \sum_{g' \neq 1} (i_G(g') - 1) & \text{si } g = 1 \end{cases}$$

C'est une fonction centrale sur G et le résultat fondamental est le suivant [17] :

Théorème 1.1.2.1.- Il existe, pour tout nombre premier l distinct de p , un $\mathbb{Z}_l[G]$ -module projectif SW_G tel que $SW_G \otimes \mathbb{Q}_l$ ait pour caractère sw_G ; ce module est unique, à isomorphisme près.

Définition 1.1.2.2.- On appellera sw_G (resp. SW_G) le caractère (resp. le $\mathbb{Z}_l$ -module) de Swan attaché au trait S et à l'extension K'/K .

1.1.3. Si H est un sous-groupe distingué de G , définissant une sous-extension $K'' \subset K'$ de K , galoisienne sur K de groupe de Galois G/H , alors Tate a montré le résultat suivant [16]

Proposition 1.1.3.1.- Pour tout $\sigma \in G/H$,

$$i_{G/H}(\sigma) = \frac{1}{[H:1]} \sum_{\substack{g \in G \text{ tels} \\ \text{que } \sigma = gH}} i_G(g)$$

Corollaire 1.1.3.2. - Pour tout $\sigma \in G/H$

$$s w_{G/H}(\sigma) = \frac{1}{[H:1]} \sum_{\substack{g \in G \text{ tels} \\ \text{que } \sigma = gH}} s w_G(g)$$

et, donc,

$$s w_{G/H} \cong s w_G \otimes \mathbb{Z}_1[G] \mathbb{Z}_1[G/H] .$$

1.1.4. Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau de $\mathbb{F}_1$ -modules constructible sur S où 1 est toujours distinct de p . Soit $\bar{K}$ une clôture séparable de K et soit $\bar{\eta} = \text{Spec}(\bar{K})$ le point géométrique de S correspondant. Alors $\mathfrak{F}_{\bar{\eta}}$ est un $\mathbb{F}_1[\mathcal{Y}]$ -module, où $\mathcal{Y} = \text{Gal}(\bar{K}/K)$, et $\mathfrak{F}_{\bar{\eta}}$ est un $\mathbb{F}_1$ -espace vectoriel de dimension finie, donc l'action de $\mathcal{Y}$ sur $\mathfrak{F}_{\bar{\eta}}$ se factorise à travers un quotient fini G de $\mathcal{Y}$. Pour un tel quotient fini, soit $K' \subset \bar{K}$ la sous-extension finie galoisienne de K de groupe de Galois G . On fait l'hypothèse suivante sur $\mathfrak{F}$:

(1.1.4.1) L'action de $\mathcal{Y}$ sur $\mathfrak{F}_{\bar{\eta}}$ se factorise par un quotient fini G tel que K'/K vérifie (1.1.1.1).

Si G est ainsi choisi, on peut définir comme en 1.1.2 le $\mathbb{Z}_1[G]$ -module $s w_G$ et on pose

$$(1.1.4.2) \quad s w_s(\mathfrak{F}) = \dim_{\mathbb{F}_1} (\text{Hom}_{\mathbb{Z}_1[G]}(s w_G, \mathfrak{F}_{\bar{\eta}}))$$

Si $H \subset G$ est un sous-groupe distingué, l'extension K''/K de groupe de Galois G/H ($K \subset K'' \subset K'$) vérifie aussi (1.1.1.1) et, d'après 1.1.3, $s w_G \cong s w_G \otimes \mathbb{Z}_1[G] \mathbb{Z}_1[G/H]$, donc $s w_s(\mathfrak{F})$ ne dépend pas du quotient fini G (comme en (1.1.4.1)) choisi.

Définition 1.1.4.3.- On appellera $Sw_s(\mathcal{F})$ le conducteur de Swan du faisceau $\mathcal{F}$.

1.1.5. Pour calculer $Sw_s(\mathcal{F})$ il est commode de faire intervenir les groupes de ramification supérieure : soit G un quotient fini de $\mathcal{G}$ comme en (1.1.4.1), soit K'/K la sous-extension de $\bar{K}$ de groupe de Galois G . Posons, pour tout $i \geq 0$,

$$G_i = \{g \in G \mid i_G(g) \geq i + 1\}$$

où $i_G : G \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est l'application définie en 1.1.2.

Il est bien connu (voir [16]) que les G_i sont des sous-groupes distingués de G et qu'ils forment une suite décroissante stationnaire avec $G_i = \{1\}$ pour $i \gg 0$:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset \dots$$

Il n'est pas difficile de montrer ([17], 19.1) que

$$sw_G = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{[G:G_i]} \text{Ind}_{G_i}^G(u_{G_i})$$

où $u_{G_i} = r_{G_i} - 1$ et où r_{G_i} est le caractère de la représentation régulière de G_i . On en déduit la formule suivante :

$$Sw_s(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{[G:G_i]} \dim_{\mathbb{F}_1}(M/M^{G_i})$$

où on a posé $M = \mathcal{H}_{\bar{\eta}}$

On a comme corollaire que $Sw_s(\mathcal{F}) = 0$ si, et seulement si, G_1 opère trivialement sur $\mathcal{H}_{\bar{\eta}}$; on dit alors que $\mathcal{F}$ est modérément ramifié.

1.1.6. Soit maintenant X un schéma localement noethérien et normal et soit x un point de X de codimension 1. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbb{F}_1$ -Modules constructible sur X , où 1 est un nombre

premier distinct de la caractéristique résiduelle de x . Soit $\bar{x}$ un point géométrique localisé en x et soit S le localisé strict de X en $\bar{x}$. Alors S est un trait strictement local et, par image réciproque, on dispose sur S d'un faisceau, noté encore $\mathcal{F}$, qui est constructible. On fera l'hypothèse suivante :

(1.1.6.1) Le faisceau $\mathcal{F}$ restreint à S vérifie l'hypothèse (1.1.4.1).

Alors, on définira le conducteur de Swan du faisceau $\mathcal{F}$, au point x , comme étant

$$S w_x(\mathcal{F}) = S w_S(\mathcal{F}|_S)$$

1.1.7. Exemple.— Soit $X = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[x])$ où k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit U le complément de l'origine dans X et soit $U' \xrightarrow{\pi} U$ le revêtement d'Artin-Schreier défini par l'équation

$$t^p - t = x^{-m}$$

où m est un entier ≥ 1 . Le revêtement π est étale, galoisien de groupe $\mathbb{F}_p$ et $g \in \mathbb{F}_p$ agit sur t par $t \mapsto t + g$. Soit

$$\rho: \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_1^*$$

un caractère non trivial (1 nombre premier distinct de p).

Alors la donnée du revêtement $\pi: U' \longrightarrow U$ et du caractère ρ équivaut à la donnée d'un faisceau de $\mathbb{F}_1$ -modules $\mathcal{F}$ lisse sur U de rang 1 . Si $u: U \hookrightarrow X$ est l'inclusion, on note $\mathcal{G} = u_* \mathcal{F}$ le faisceau sur X , qui prolonge $\mathcal{F}$ par zéro. Alors

$$S w_x(\mathcal{G}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ d & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où l'on a écrit $m = d \cdot p^r$ avec $(d, p) = 1$ et $r \geq 0$.

En effet, on se ramène à $m = d$ en remplaçant t par

$$t + x^{-d \cdot p} t^{r-1} + x^{-d \cdot p} t^{r-2} + \dots + x^{-d}$$

Supposons donc $(m, p) = 1$. Soit R l'hensélisé de $k[x]$ à l'origine et soit $R' = R[t]/(t^p - t - x^{-m})$; R' est un anneau de valuation discrète, on notera v' sa valuation ($v'(x) = p$). On peut prendre pour uniformisante de R'

$$\pi' = x^a t^b$$

où $a, b \in \mathbb{N}$ sont tels que $ap - bm = 1$. On a alors pour

$$g \in G = \text{Gal}(R'/R) = \mathbb{F}_p :$$

$$v'(g(\pi') - \pi') = \pi' \left[(1 + g \cdot t^{-1})^b - 1 \right] = g \cdot \pi' (b \cdot t^{-1} + g \frac{b(b-1)}{2} \cdot t^{-2} + \dots)$$

donc

$$i_G(g) = \begin{cases} m+1 & \text{si } g \neq 0 \\ \infty & \text{si } g = 0 \end{cases}$$

et les groupes de ramification supérieure sont

$$\mathbb{F}_p = G = G_0 = G_1 = \dots = G_m \supsetneq G_{m+1} = G_{m+2} = \dots = 0.$$

Donc

$$S_{w_0}(g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{[G:G_i]} \dim_{\mathbb{F}_1} (M/M^{G_i}) = \sum_{i=1}^m 1 = m$$

où $M = \mathbb{F}_1$ et G agit sur M par l'intermédiaire du caractère ρ .

1.2. La formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič [12], [15].

Soit X une courbe connexe propre et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique p , et soit U un ouvert dense de X , complémentaire d'un ensemble fini de points fermés Y . Soit $\mathcal{F}^l$ un faisceau de $\mathbb{F}_1$ -modules lisse sur U , où l est un nombre premier distinct de p . Alors la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič s'écrit

$$(1.2.1) \quad \chi_c(U, \mathcal{H}) = \text{rang}(\mathcal{H}) \cdot \chi_c(U) - \sum_{y \in Y} S_{w_y}(u! \mathcal{H})$$

où $u : U \hookrightarrow X$ est l'inclusion et où

$$\chi_c(U, \mathcal{H}) = \sum_{i=0}^2 \dim_{\mathbb{F}_1} (H_c^i(U, \mathcal{H}))$$

1.2.2 Remarque.— Cette formule est encore vérifiée si l'on remplace l'hypothèse de lissité de X par l'hypothèse : le lieu singulier de X est contenu dans U . Il suffit pour le voir de normaliser X et d'appliquer 1.2.1 à la normalisée.

1.3. Les faisceaux de cycles évanescents [5]

1.3.1. Soit $S = \text{Spec}(R)$ un trait strictement local. On notera s le point fermé de S , η le point générique de S et $\bar{\eta}$ un point géométrique localisé en η . Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini. On fixe les notations par le diagramme suivant

$$(1.3.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} X_{\bar{\eta}} & \xrightarrow{\bar{j}} & X & \xleftarrow{i} & X_s \\ & \searrow j & \uparrow & & \downarrow s \\ & X_{\eta} & & & \\ \downarrow & & \downarrow f & & \\ \bar{\eta} & \xrightarrow{\quad} & S & \xleftarrow{\quad} & s \\ & \searrow & \uparrow & & \\ & \eta & & & \end{array}$$

Soit l un nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle de S . Pour tout faisceau $\mathcal{H}$ de $\mathbb{F}_l$ -modules sur X , on définit les faisceaux de cycles évanescents de $(X, \mathcal{H}, f)$ comme étant les faisceaux

$$(1.3.1.2) \quad \psi^n(\mathcal{H}) = i^* R^n \bar{j}_* (\bar{j}^* \mathcal{H}) \quad (n \geq 0)$$

sur X_S , munis par transport de structure d'une action continue de $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$.

Théorème 1.3.1.3 [4].- Sous les hypothèses précédentes et si $\mathcal{F}$ est constructible, alors :

(i) les $\psi^n(\mathcal{F})$ sont eux aussi constructibles ;

(ii) si $g : (S', s', \eta', \bar{\eta}') \longrightarrow (S, s, \eta, \bar{\eta})$ est un changement de trait strictement local ($g(s') = s$ et $g(\bar{\eta}') = \bar{\eta}$), alors la flèche de changement de base

$$g_s^* \psi^n(\mathcal{F}) \longrightarrow \psi^n(g^* \mathcal{F})$$

est un isomorphisme pour tout entier $n \geq 0$ (on note encore g le morphisme projection $X' = X \times_S S' \longrightarrow X$ et g_s sa restriction $X'_s \longrightarrow X_s$).

1.3.2. Calculons la fibre, en un point fermé x de X_S , du faisceau $\psi^n(\mathcal{F})$. Soit $X_{(x)}$ le localisé de X en x et soit $(X_{(x)})_{\bar{\eta}}$ la fibre en $\bar{\eta}$ du morphisme $X_{(x)} \longrightarrow S$ induit par f , alors

$$(1.3.2.1) \quad \psi_x^n(\mathcal{F}) \stackrel{\text{déf}}{=} (\psi^n(\mathcal{F}))_x = H^n((X_{(x)})_{\bar{\eta}}, \mathcal{F})$$

En particulier, on a les résultats d'annulation suivants [5]

Proposition 1.3.2.2.- X, S et f étant comme ci-dessus, pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathbb{F}_1$ -modules sur S :

(i) les $\psi^n(\mathcal{F})$ sont nuls pour $n > \dim(X_{\eta})$;

(ii) si f est lisse en un point x de X_S et si $\mathcal{F}$ est localement constant dans un voisinage de x , $\psi_x^n(\mathcal{F}) = 0$ pour tout $n > 0$.

On dira que $(X, \mathcal{F}, f)$ est lisse en un point $x \in X$ si f est

lisse en ce point et si $\mathcal{H}$ est localement constant dans un voisinage de x . On notera Σ l'ensemble des points de non lissité de $(X, \mathcal{H}, f)$. Alors la partie (ii) de la proposition peut s'énoncer sous la forme suivante :

(ii') le support de $\Psi^n(\mathcal{H})$ dans X_s est contenu dans $\Sigma_s = X_s \cap \Sigma$ pour tout $n \geq 0$.

1.3.3. On suppose, dans ce paragraphe, f propre et $\mathcal{H}$ constructible.

Pour tout faisceau de $\mathbb{F}_1$ -modules $\mathcal{G}$ sur X , la flèche de restriction

$$i^* : H^n(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^n(X_s, i^* \mathcal{G})$$

est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$ (c'est le théorème de changement de base propre [1], [3]). En particulier la suite spectrale de Leray pour le morphisme $\bar{j} : X_{\bar{\eta}} \longrightarrow X$ et le faisceau $\bar{j}^* \mathcal{H}$ sur X :

$$E_2^{pq} = H^p(X, R^q \bar{j}_* (\bar{j}^* \mathcal{H})) \implies H^{p+q}(X_{\bar{\eta}}, \bar{j}^* \mathcal{H})$$

se réécrit

$$(1.3.3.1) \quad E_2^{pq} = H^p(X_s, \Psi^q(\mathcal{H})) \implies H^{p+q}(X_{\bar{\eta}}, \bar{j}^* \mathcal{H})$$

(suite spectrale équivariante pour l'action de $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$). On en déduit que

$$(1.3.3.2) \quad \chi(X_{\bar{\eta}}, \bar{j}^* \mathcal{H}) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \chi(X_s, \Psi^q(\mathcal{H}))$$

1.3.4. On garde les hypothèses de 1.3.3.

Soit $\bar{S}$ le normalisé de S dans $\bar{\eta}$, soit $\bar{s}$ le point fermé de $\bar{S}$ et soit $\bar{X} = X \times_S \bar{S}$. On définit, pour tout $n \geq -1$, le

faisceau

$$(1.3.4.1) \quad \bar{\Phi}^n(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_{\bar{X}_S}^{n+1}(\bar{X}, \bar{\mathcal{H}})$$

où $\bar{\mathcal{H}}$ est l'image réciproque de $\mathcal{H}$ sur $\bar{X}$. Les $\bar{\Phi}^n(\mathcal{H})$ sont des faisceaux sur $\bar{X}_S$, mais, comme $\bar{X}_S \longrightarrow X_S$ est un homéomorphisme universel, on peut les considérer comme faisceaux sur X_S . On a, comme relation entre les $\bar{\Phi}$ et les Ψ , une suite exacte courte de faisceaux sur X_S

$$(1.3.4.2) \quad 0 \longrightarrow \bar{\Phi}^{-1}(\mathcal{H}) \longrightarrow i^* \mathcal{H} \longrightarrow \Psi^0(\mathcal{H}) \longrightarrow \bar{\Phi}^0(\mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

et des isomorphismes de faisceaux sur X_S

$$(1.3.4.3) \quad \bar{\Phi}^n(\mathcal{H}) \simeq \Psi^n(\mathcal{H})$$

pour $n \geq 1$.

On peut considérer aussi les groupes de cohomologie à support $H_{\bar{X}_S}^n(\bar{X}, \bar{\mathcal{H}})$. On dispose alors, d'une part, d'une suite spectrale

$$(1.3.4.4) \quad H^p(X_S, \bar{\Phi}^q(\mathcal{H})) \implies H_{\bar{X}_S}^{p+q}(\bar{X}, \bar{\mathcal{H}})$$

et, d'autre part, de la suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow H_{\bar{X}_S}^{n-1}(\bar{X}, \bar{\mathcal{H}}) \longrightarrow H^n(\bar{X}, \bar{\mathcal{H}}) \longrightarrow H^n(X_{\bar{\eta}}, \bar{j}^* \mathcal{H}) \longrightarrow \dots$$

qui se réécrit (compte-tenu du théorème de changement de base propre)

$$(1.3.4.5)$$

$$\dots \longrightarrow H_{\bar{X}_S}^{n-1}(\bar{X}, \bar{\mathcal{H}}) \longrightarrow H^n(X_S, i^* \mathcal{H}) \xrightarrow{sp} H^n(X_{\bar{\eta}}, \bar{j}^* \mathcal{H}) \longrightarrow \dots$$

la flèche

$$(1.3.4.6) \quad sp : H^n(X_S, i^* \mathcal{H}) \xleftarrow{i^*} H^n(\bar{X}, \bar{\mathcal{H}}) \xrightarrow{j^*} H^n(X_{\bar{\eta}}, \bar{j}^* \mathcal{H})$$

étant dite flèche de spécialisation.

En particulier,

$$(1.3.4.7) \quad \chi(X_{\bar{\eta}}, \bar{j}^* \mathcal{H}) - \chi(X_s, i^* \mathcal{H}) = \sum_{q \geq -1} (-1)^q \chi(X_s, \Phi^q(\mathcal{H}))$$

Remarques. - (i) Si $x \notin \sum_s$, $\Phi_x^n(\mathcal{H}) = 0$ pour tout $n \geq -1$;

(ii) si $x \in X_s$ et si $\mathcal{H}_x = 0$, alors $\Phi_x^{-1}(\mathcal{H}) = 0$ et $\Psi_x^n(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \Phi_x^n(\mathcal{H})$ pour tout $n \geq 0$.

1.4. Locale acyclicité [2], [13]

Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de type fini. Pour tout point géométrique x de X , on note $X_{(x)}$ le localisé strict de X en x , $S_{(s)}$ le localisé strict de S en $s = f(x)$, et, pour tout point géométrique t de $S_{(s)}$ on note $(X_{(x)})_t$ la fibre en t du morphisme $X_{(x)} \longrightarrow S_{(s)}$ induit par f .

Définition 1.4.1. - Soient $f : X \longrightarrow S$ comme ci-dessus et $\mathcal{H}$ un faisceau de $\mathbb{F}_1$ -modules (l nombre premier inversible sur S). On dit que $(X, \mathcal{H}, f)$ est localement acyclique en un point géométrique x de X d'image s dans S si, et seulement si, pour tout point géométrique t de $S_{(s)}$, la flèche de restriction

$$\mathcal{H}_x = R\Gamma(X_{(x)}, \mathcal{H}) \longrightarrow R\Gamma((X_{(x)})_t, \mathcal{H})$$

est un isomorphisme (on note encore $\mathcal{H}$ l'image réciproque de $\mathcal{H}$ sur $X_{(x)}$ ou sur $(X_{(x)})_t$). On dit que $(X, \mathcal{H}, f)$ est localement acyclique si $(X, \mathcal{H}, f)$ est localement acyclique en tout point x de X . On dit que $(X, \mathcal{H}, f)$ est universellement localement acyclique si après tout changement de base $S' \longrightarrow S$, le triplet $(X', \mathcal{H}', f')$ déduit de $(X, \mathcal{H}, f)$ est localement acyclique.

Remarque 1.4.2. - Si S est un trait strictement local de point fermé

s , alors $(X, \mathcal{F}, f)$ est localement acyclique en un point géométrique x de X_s si et seulement si $\bigoplus_x^n (\mathcal{H}) = 0$ pour tout $n \geq -1$.

Proposition 1.4.3.- Si $f : X \longrightarrow S$ est un morphisme propre de schémas, si $\mathcal{H}$ est un faisceau de $\mathbb{F}_1$ -modules constructible sur X (où 1 est un nombre premier inversible sur S) et si $(X, \mathcal{H}, f)$ est universellement localement acyclique, alors les faisceaux de $\mathbb{F}_1$ -modules $R^n f_{*} \mathcal{H}$ ($n \geq 0$) sont lisses sur S .

Proposition 1.4.4. [2] ou [3] .- Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme lisse de schémas et soit $\mathcal{H}$ un faisceau de $\mathbb{F}_1$ -modules lisse sur X (où 1 est un nombre premier inversible sur S), alors $(X, \mathcal{H}, f)$ est universellement localement acyclique.

2. Énoncé du théorème

2.1. Soit S un schéma noethérien excellent : par exemple, de type fini sur un corps, ou sur un anneau local noethérien complet ou sur un anneau de Dedekind dont le corps des fractions est de caractéristique nulle.

Soit 1 un nombre premier inversible sur S .

Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme séparé, lisse et de dimension relative 1.

Soit $Y \subset X$ un sous-schéma fermé de X que l'on suppose fini et plat sur S . On note $U = X - Y$ l'ouvert complémentaire et $u : U \hookrightarrow X$ l'inclusion.

Soit $\mathcal{H}$ un faisceau de $\mathbb{F}_1$ -modules lisse sur U de rang constant.

Pour tout $s \in S$, l'entier

$$\sum_{y \in Y_{\bar{s}}} [S_{W_y}(u! \mathcal{Y})|X_{\bar{s}} + \text{rang}(\mathcal{Y})]$$

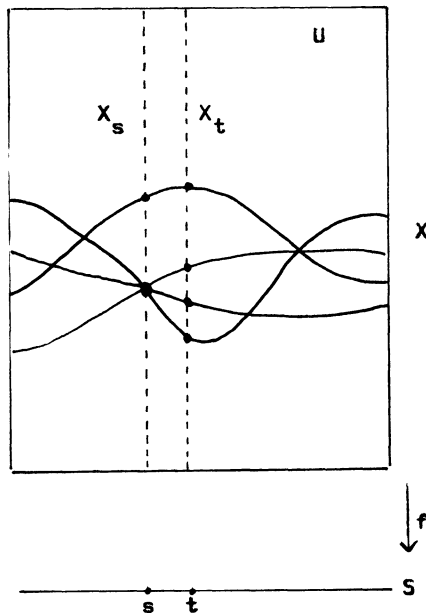
où $\bar{s}$ est un point géométrique localisé en s et où $X_{\bar{s}}$ et $Y_{\bar{s}}$ désignent respectivement les fibres de $X \longrightarrow S$ et $Y \longrightarrow S$ en $\bar{s}$, ne dépend pas du choix de $\bar{s}$; on le notera $\varphi(s)$. On a attaché à la situation une fonction

$$\varphi: S \longrightarrow \mathbb{N}$$

Théorème 2.1.1 (Deligne).— Avec les notations et hypothèses ci-dessus, on a les résultats suivants :

(i) la fonction φ est constructible et semi-continue inférieurement sur S (i.e. quels que soient $s, t \in S$ tels que $s \in \overline{\{t\}}$, on a $\varphi(s) \leq \varphi(t)$) ;

(ii) si la fonction φ est localement constante sur S , alors le triplet $(X, \mathcal{Y}, f)$ est universellement localement acyclique.



Corollaire 2.1.2.- Si, de plus, $f : X \longrightarrow S$ est propre, alors la locale constance de φ sur S implique que le faisceau $R^n f_* (u! \mathcal{H})$ est lisse sur S , pour tout $n \geq 0$.

C'est une conséquence immédiate de 2.1.1 et 1.4.3.

Remarque 2.1.3.- Si Y est l'image d'une section $\sigma : S \longrightarrow X$ de $f : X \longrightarrow S$, alors on peut remplacer la fonction φ par la fonction $\psi : S \longrightarrow \mathbb{N}$, où

$$\psi(s) = \sum_{\sigma(\bar{s})} S_{W_{\sigma(\bar{s})}}(u! \mathcal{H}|_{X_{\bar{s}}}) ,$$

dans le théorème ($\bar{s}$ étant un point géométrique localisé en s).

Plus généralement, si la fonction $s \longmapsto \text{card}(Y_{\bar{s}})$ est localement constante sur S , on peut remplacer la fonction φ par la fonction $\psi : S \longrightarrow \mathbb{N}$, où

$$\psi(s) = \sum_{y \in Y_{\bar{s}}} S_{W_y}(u! \mathcal{H}|_{X_{\bar{s}}}) ,$$

dans le théorème.

2.2. Exemple

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$.

Soient $S = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[x])$, $X = \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$ et

$f : X \longrightarrow S$ la projection $(x, y) \longmapsto x$.

Soit Y "l'axe des x ", de sorte que Y est une section de $f : X \longrightarrow S$, et soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{A}_k^2 \mid y \neq 0\}$. On considère le revêtement d'Artin-Schreier

$$\begin{array}{c} U' = \{((x, y), t) \in U \times \mathbb{A}_k^1 \mid t^p - t = x/y^d\} \\ \pi \downarrow \\ U \end{array}$$

où d est un entier positif premier à p ; c'est un revêtement fini, étale, galoisien de groupe de Galois $\mathbb{F}_p$. Soit

$$\rho: \text{Gal}(U'/U) = \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_1^*$$

un caractère non trivial. Soit $\mathcal{H}$ le faisceau de $\mathbb{F}_1$ -modules lisse sur U de rang 1 associé à $\pi: U' \longrightarrow U$ et à ρ . La fonction Ψ attachée à cette situation est :

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ d & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Cela résulte aussitôt de 1.1.7.

2.3. Principe et plan de la démonstration

L'idée est de relier $\varphi(s)$ à la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X_{\bar{s}, u!} \mathcal{H}|_{X_{\bar{s}}})$ de la fibre géométrique par la formule de Grothendieck-Ogg-Safarevič puis de voir comment varie cette caractéristique d'Euler-Poincaré avec s en utilisant la théorie des cycles évanescents. On n'est vraiment à même de réaliser ce programme que dans le cas où S est un trait et où $f: X \longrightarrow S$ est propre. Le plan de la démonstration est le suivant :

1.- On montre la constructibilité de φ , ce qui ramène la preuve de la semi-continuité de φ au cas où S est un trait strictement local.

2.- Pour ramener la preuve de la partie (ii) du théorème au cas où S est un trait strictement local, on prouve un théorème de changement de base 4.1.1.

3.- Dans le cas où S est un trait strictement local, on se ramène au cas où f est propre et l'on prouve un énoncé plus précis 5.1.1.

3. Preuve de la constructibilité de φ

3.1. Tout d'abord remarquons que $\varphi(s)$ ne dépend que de la fibre $(X_s, u! \mathcal{H} |_{X_s}, Y_s)$ de la situation et se calcule après passage à une extension algébriquement close de $\mathcal{K}(s)$, sans dépendre du choix de celle-ci.

Par des réductions standard [9], on est ramené à montrer l'assertion suivante :

(3.1.1) Si l'on suppose, de plus, S affine et intègre, il existe un ouvert dense de S sur lequel φ est constante.

3.2. Pour démontrer cette assertion, on peut remplacer S par un voisinage affine du point générique δ de S .

En particulier, comme l'ensemble des points normaux de S est un ouvert (on utilise ici le fait que S est excellent) qui contient δ , on peut supposer S normal. Alors, comme X est lisse sur S , X est aussi normal.

3.3. On peut aussi faire des changements de base par des morphismes $g : S' \longrightarrow S$ où S' est affine, intègre, noethérien, normal, de point générique δ' et tels que l'image de tout ouvert contenant δ' soit un voisinage de δ . En effet, si on note $(X', f', \mathcal{H}', \varphi')$ la situation après le changement de base, les hypothèses du théorème sont vérifiées par $(X', \mathcal{H}', f', \varphi')$ et $\varphi' = \varphi \circ g$.

3.4. On peut supposer que Y est une section de $f : X \longrightarrow S$.

Tout d'abord φ ne dépend que de la structure réduite de Y , donc on peut supposer Y réduit. Soit $K = \mathcal{K}(\delta)$ le corps des fractions de S . Comme $Y \longrightarrow S$ est fini, $Y_\delta = Y \times_S \delta = \text{Spec}(L)$ où L est

une K -algèbre finie. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K , alors $(L \otimes_K \bar{K})_{\text{red}}$ est isomorphe à $\bar{K}^n$ où $n \in \mathbb{N}$, donc il existe une extension finie K' de K contenue dans $\bar{K}$ telle que $(L \otimes_K K')_{\text{red}}$ soit déjà isomorphe à $(K')^n$. Soit $S' \longrightarrow S$ la normalisation de S dans K' . Faisons le changement de base $S' \longrightarrow S$ qui est du type envisagé en 3.3. Alors $(Y' \delta')_{\text{red}} = \bigsqcup_{i \in I} \delta'_i$ où

$\mathcal{K}(\delta'_i) = \mathcal{K}(\delta) = K'$ et $\text{card}(I) = n$. Donc quitte à remplacer S' par un voisinage affine de δ' , on a $Y' = \bigsqcup_{i \in I} Y'_i$ où $(Y'_i)_{\text{red}}$ est une section de $X' \longrightarrow S'$. Mais alors, $\varphi' = \sum_{i \in I} \varphi'_i$ où φ'_i

est la "fonction φ " associée à la situation

$(X'_i \xrightarrow{f'} S', Y'_i, \mathcal{Y}'_i|_{X'_i})$ avec $X'_i = X - \bigcup_{j \neq i} Y'_j$, d'où la conclusion.

3.5. On peut donc faire les hypothèses supplémentaires suivantes :

- a) S est affine, intègre, normal de point générique δ .
- b) Y est une section de $X \longrightarrow S$.
- c) X est normal et connexe ("normal" résulte de la lissité de f et de la normalité de S ; "connexe" car S est connexe et car on peut remplacer X par la composante connexe contenant Y).

d) Le faisceau $\mathcal{Y}$ sur U est donné par un revêtement fini étale galoisien $\tilde{U} \xrightarrow{\pi} U$, de groupe de Galois G , et par une représentation $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ où V est un $\mathbb{F}_1$ -vectoriel de dimension finie. On notera alors $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ la normalisation de X dans $\tilde{U}$ et on posera $\tilde{Y} = \pi^{-1}(Y)$, de sorte que $\tilde{X} - \tilde{Y} = \tilde{U}$ car X est normal.

Il reste à montrer sous ces hypothèses que la fonction Ψ (on

est dans le cas d'une section) est constante sur un voisinage de δ .

3.6. On peut supposer $\tilde{X}$ lisse sur S : en effet, $(\tilde{X})_\delta$ est une courbe sur $K = \mathcal{K}(\delta)$, donc il existe une extension finie radicielle K' de K telle que la normalisation de $((\tilde{X})_\delta \otimes_K K')_{\text{red}}$ soit lisse sur K' [10]. Soit $S' \rightarrow S$ la normalisation de S dans K' . Faisons le changement de base $S' \rightarrow S$ (qui est du type envisagé en 3.3). Alors la normalisation de $((\tilde{X})'_{x_S}, \delta')_{\text{red}}$ est lisse sur K' , donc, quitte à remplacer S' par un voisinage ouvert affine de δ' , on voit que la normalisation de $((\tilde{X})')_{\text{red}}$ est lisse sur S' . Maintenant, comme $\tilde{U} \xrightarrow{\pi} U$ est étale, $\tilde{U}$ est lisse sur S , donc $(\tilde{U})'$ est lisse sur S' , donc $(\tilde{U})'$ est réduit et normal, donc la normalisation de $((\tilde{X})')_{\text{red}}$ munie de sa projection naturelle sur $(X')_{\text{red}} = X'$ (car $X \rightarrow S$ est lisse) n'est autre que la normalisation de X' dans $(\tilde{U})'$. D'où l'assertion.

3.7. Considérons le revêtement fini $\tilde{Y} \rightarrow Y \equiv S$; $\tilde{Y}_\delta = \text{Spec}(\tilde{L})$ est une K -algèbre finie, donc il existe une extension finie K' de K et un entier m tels que $(\tilde{L} \otimes_K K')_{\text{red}}$ soit isomorphe à $(K')^m$ (voir 3.4). Faisons le changement de base par la normalisation $S' \rightarrow S$ de S dans K' (qui est du type envisagé dans 3.3). Alors $(\tilde{Y}', \delta')_{\text{red}} = \bigsqcup_{j \in J} \tilde{\delta}'_j$ où $\mathcal{K}(\tilde{\delta}'_j) = \mathcal{K}(\delta') = K'$ et $\text{card}(J) = m$ (δ' étant le point générique de S'). De plus comme $\tilde{X}$ est lisse sur S , il en est de même de $\tilde{X}'$ sur S' et donc $\tilde{X}'$ est normal. On peut donc faire l'hypothèse supplémentaire suivante

e) $(\tilde{Y}_\delta)_{\text{red}} = \bigsqcup_{j \in J} \tilde{\delta}_j$ avec $\mathcal{K}(\tilde{\delta}_j) = \mathcal{K}(\delta) = K$ pour tout $j \in J$ (J étant un ensemble fini).

3.8. On peut supposer que $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ est un revêtement d'Eisenstein : tout d'abord, précisons ce que l'on entend par revêtement d'Eisenstein : soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine normal et soit $Y = \text{Spec}(A/\mathfrak{p})$ un sous-schéma fermé intègre de codimension 1, un revêtement $\tilde{X} \longrightarrow X$, ramifié le long de Y , est dit d'Eisenstein s'il est de la forme

$$\tilde{X} = \text{Spec}(A[\pi] / (\pi^e + a_1 \pi^{e-1} + \dots + a_e))$$

où $\pi^e + a_1 \pi^{e-1} + \dots + a_e \in A[\pi]$ est un polynôme d'Eisenstein au sens suivant : $a_i \in \mathfrak{p}$, pour $i = 1, \dots, e$, et $a_e \in \mathfrak{p} - \mathfrak{p}^2$. En particulier, si X_δ est le localisé au point générique δ de Y (X_δ est le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien), $\tilde{X} \times_X X_\delta \longrightarrow X_\delta$ est un revêtement défini par une équation d'Eisenstein au sens de [16].

Revenons à la démonstration de la constructibilité de $\mathcal{C}_p$, soit X_δ le localisé de X en δ , d'après l'hypothèse supplémentaire e) ci-dessus, on a la décomposition

$$\tilde{X} \times_X X_\delta = \bigsqcup_{j \in J} \tilde{X}(\tilde{\delta}_j)$$

où, pour chaque $j \in J$, $\tilde{X}(\tilde{\delta}_j)$ est l'hensélisé de $\tilde{X}$ en $\tilde{\delta}_j$.

De plus, pour chaque $j \in J$,

$$\tilde{X}(\tilde{\delta}_j) \longrightarrow X_\delta$$

est un revêtement galoisien, totalement ramifié de traits henséliens, donc est un revêtement défini par une équation galoisienne et

d'Eisenstein au sens de [16] .

Mais $X_{(\delta)} = \varprojlim X'$ où X' parcourt la catégorie des schémas affines qui sont étales sur X et δ -ponctués, i.e. munis d'un X -morphisme $\delta \longrightarrow X'$. Par suite, il existe un schéma X' comme ci-dessus tel que

1) on ait une décomposition

$$\tilde{X} \times_X X' = \bigsqcup_{j \in J} \tilde{X}'_j$$

avec, pour chaque $j \in J$, un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\delta}_j & \longrightarrow & \tilde{X}'_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ \delta & \longrightarrow & X' \end{array}$$

2) pour chaque $j \in J$, le revêtement $\tilde{X}'_j \longrightarrow X'$ soit un revêtement galoisien et d'Eisenstein, ramifié le long de Y' , où Y' est l'adhérence de δ dans X' . On notera G_j son groupe de Galois, c'est le sous-groupe de G qui fixe $\tilde{\delta}_j$.

Le revêtement $\tilde{X}'_j \longrightarrow X'$ et la représentation

$$\rho|_{G_j} : G_j \longrightarrow GL(V)$$

détermine un faisceau $\mathcal{H}'_j$ de $\mathbb{F}_1$ -modules lisse sur $X' - Y'$.

Quitte à rétrécir X' , on peut supposer que le morphisme $Y' \longrightarrow Y$ est un isomorphisme, donc que Y' est l'image d'une section de l'application composée $f' : X' \longrightarrow X \longrightarrow S$. Notons Ψ_j la fonction Ψ associée à la situation $(X', Y', f', \mathcal{H}'_j)$. Un raisonnement analogue à celui de [12] , montre que $\Psi = \Psi_j$ (pour tout $j \in J$) .

3.9. On est donc ramené à la situation suivante :

1) $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(A/\mathfrak{p})$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier

que l'on peut supposer monogène, $\mathcal{O} = tA$, quitte à rétrécir X pour la topologie de Zariski, $f : X \longrightarrow S$ est en fait une rétraction de X sur $Y = S$.

2) $\tilde{X} = \text{Spec}(\tilde{A})$ avec

$$\tilde{A} = A[\pi] / (\pi^e + a_1 \pi^{e-1} + \dots + a_e)$$

où le polynôme $\pi^e + a_1 \pi^{e-1} + \dots + a_e \in A[\pi]$ est d'Eisenstein au sens où $a_k \in \mathcal{O}$ (pour $k = 1, \dots, e$) et $a_e \in \mathcal{O} - \mathcal{O}^2$.

3) $\tilde{X} \longrightarrow X$ est un revêtement galoisien de groupe de Galois G , étale au dessus de $U = X - Y$ et le faisceau $\mathcal{H}$ correspond à une représentation $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V)$.

Lemme 3.9.1.- Avec les hypothèses et les notations ci-dessus, il existe un ouvert V de $Y = S$, voisinage du point générique δ , sur lequel Ψ est constante.

En effet, calculons d'abord $\Psi(\delta)$: on procède comme en 1.1.5 ; $\tilde{A} \otimes_A \mathcal{O} \supset \mathcal{O}$ est une extension totalement ramifiée, galoisienne (de groupe de Galois G) d'anneaux de valuations discrètes et π est une uniformisante de $\tilde{A} \otimes_A \mathcal{O}$. Pour tout $g \in G$, $g(\pi) = \pi \cdot \pi^{-1} \cdot \tilde{A} \otimes_A \mathcal{O}$, donc peut s'écrire

$$g(\pi) = \pi = \alpha_g / b_g \cdot \pi^{i_g(g)}$$

avec $\alpha_g \in \tilde{A} - \pi \cdot \tilde{A}$, $b_g \in A - \mathcal{O}$ et $i_g(g) \geq 1$. Les groupes de ramification supérieurs de cette extension d'anneaux de valuations discrètes sont donc

$$G_i = \{ g \in G \mid i_g(g) \geq i + 1 \}$$

et

$$\Psi(\delta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{[G:G_i]} \dim_{\mathbb{F}_1} (V/V^{G_i})$$

Soit alors V l'ouvert de $Y = Y$ défini par $a_e/t \neq 0$,

$\alpha_g \neq 0$ et $b_g \neq 0$, pour tout $g \in G$ (α_g est a priori une fonction sur $\tilde{X}$, mais $\alpha_g|_{\tilde{Y}}$ peut être considérée comme une fonction sur Y car $\tilde{Y} \xrightarrow{\sim} Y$).

Si $y \in V$ et si $\bar{y}$ est un point géométrique au-dessus de y , on a alors

$$\tilde{X}_{\bar{y}} = X_{\bar{y}}[\pi] / (\pi^e + a_1 \pi^{e-1} + \dots + a_e)$$

où $a_1, \dots, a_e$ sont maintenant considérées comme fonctions sur $X_{\bar{y}}$ et π comme fonction sur $\tilde{X}_{\bar{y}}$. L'hypothèse $(a_e/t)(y) \neq 0$ assure que $\pi^e + a_1 \pi^{e-1} + \dots + a_e$ est un polynôme d'Eisenstein sur $X_{\bar{y}}$ au point $\bar{y}$, $\tilde{X}_{\bar{y}} \rightarrow X_{\bar{y}}$ est encore galoisien de groupe de Galois G . Pour tout $g \in G$, on a

$$g(\pi) - \pi = \alpha_{g/b_g} \cdot \pi^i \delta(g)$$

sur $\tilde{X}_{\bar{y}}$ et les hypothèses $\alpha_g(y) \neq 0$ et $b_g(y) \neq 0$ assurent que la valuation $i_y(g)$ de $g(\pi) - \pi$ sur $\tilde{X}_{\bar{y}}$ en $\bar{y}$ est égale à $i_{\delta}(g)$. Donc les groupes de ramification supérieurs de $\tilde{X}_{\bar{y}} \rightarrow X_{\bar{y}}$ en $\bar{y}$ sont encore les G_i ci-dessus et donc

$$\Psi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{[G_i:G]} \dim_{\mathbb{F}_1} (V/V_{G_i}) = \Psi(\delta)$$

D'où le lemme.

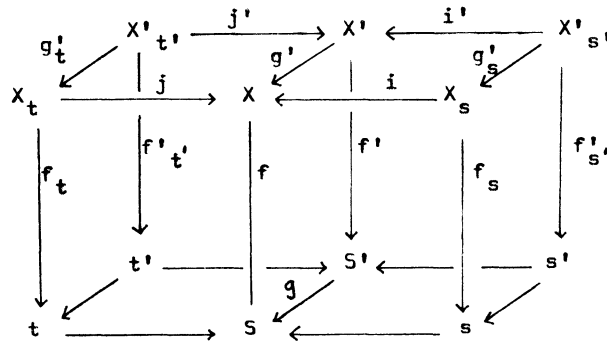
La constructibilité est démontrée.

4. Un théorème de changement de base

4.1 Soient S et S' deux schémas strictement locaux (i.e. spectre d'anneaux locaux henséliens à corps résiduels séparablement clos), de

points fermés s et s' respectivement. Soit $g : S' \rightarrow S$ un morphisme local (i.e. induit par un homomorphisme local entre les anneaux locaux correspondants). Soient t' un point géométrique de S' et $t = g(t')$ son image dans S .

Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini et soit $\mathcal{Y}$ un faisceau de $\mathbb{F}_1$ -modules constructible sur X . On fixe les notations par le diagramme suivant à carrés cartésiens



et on note $\mathcal{Y}' = g'^* \mathcal{Y}$ le faisceau sur X' image réciproque de $\mathcal{Y}$.

On dispose alors d'une flèche de changement de base dans

$D(X'_s, \mathbb{F}_1)$.

$$(4.1.1) \quad (g'_s)^* i^* Rj_* j^* \mathcal{Y} \rightarrow i'^* Rj'^* j'^* \mathcal{Y}'$$

Le théorème suivant est dû à Deligne :

Théorème 4.1.2.- Soit x' un point fermé de X'_s , d'image x dans X_s . On note Σ le lieu de non lissité du triplet $(X, \mathcal{Y}, f)$ et on suppose que x est un point isolé dans $\Sigma \cap X_s$, alors la flèche de changement de base 4.1.1 est un isomorphisme dans un voisinage de x' .

Corollaire 4.1.3.- On garde les hypothèses et les notations de

4.1.2. Soit $X_{(x)}$ (resp. $X'_{(x')}$) le localisé de X en x (resp. de X' en x'), alors la flèche naturelle

$$R\Gamma((X_{(x)})_{t, \mathcal{H}}) \longrightarrow R\Gamma((X'_{(x')})_{t, \mathcal{H}'})$$

est un isomorphisme.

4.2. Preuve du théorème 4.1.2

La démonstration est analogue à celle de ([5], 2.4.2).

Commençons par généraliser la construction du foncteur $R\tilde{\Phi}$ à la situation 4.1 ; on suivra pas à pas la construction de [5] .

Pour tout schéma T , on désigne par $K(T)$ la catégorie des complexes de faisceaux de $\mathbb{F}_1$ -modules, à homotopie près, et par $D(T)$ la catégorie dérivée correspondante.

Pour toute catégorie triangulée A , on note $\text{Tr}.A$ la catégorie des triangles distingués de A .

On veut construire un foncteur

$$D(X) \longrightarrow \text{Tr}.D(X_s)$$

qui associe à tout objet F de $D(X)$ un triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} & R\tilde{\Phi}(F) & \\ \swarrow & & \searrow \\ i^*F & \longrightarrow & i^*Rj_*j^*F \end{array}$$

où la flèche $i^*F \longrightarrow i^*Rj_*j^*F$ est la flèche de spécialisation.

Pour cela considérons la catégorie $\mathcal{K}$ formée des triplets $K = (L, M, u)$, à homotopie près, où L et M sont des complexes de faisceaux de $\mathbb{F}_1$ -modules sur X_s et où $u : L \longrightarrow M$ est un morphisme de tels complexes. On a un foncteur

$$K(X) \longrightarrow \mathcal{K}$$

qui associe à $F \in \text{ob}.K(X)$ le triplet

$$K = (F_s, sp^* F_t, F_s \xrightarrow{sp} sp^* F_t)$$

où $F_s = i^* F$, $F_t = j^* F$, $sp^* = i^* j_*$ et $sp : F_s \longrightarrow sp^* F_t$ est la flèche déduite, par application du foncteur i^* , du morphisme d'adjonction $F \longrightarrow j_* j^* F$.

Tout objet $K = (L, M, u)$ de $\mathcal{K}$ est isomorphe à un objet $K' = (L', M', u')$ de $\mathcal{K}$ où $u' : L' \longrightarrow M'$ est injective et où la suite exacte

$$0 \longrightarrow L' \xrightarrow{u'} M' \longrightarrow \text{Coker}(u') \longrightarrow 0$$

est scindée degré par degré (il suffit de prendre $L' = L$ et $M' = M \oplus \text{Cône}(u)$). On en déduit un foncteur

$$\mathcal{K} \longrightarrow \text{Tr.} K(X_s)$$

et par composition, un foncteur

$$K(X) \longrightarrow \text{Tr.} K(X_s)$$

que l'on notera

$$F \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} & \Phi_t(F) & \\ \swarrow & & \searrow \\ F_s & \xrightarrow{sp} & sp^* F_t \end{array} \right)$$

Cette construction passe aux catégories dérivées et fournit un foncteur

$$D(X) \longrightarrow \text{Tr.} D(X_s)$$

que l'on notera

$$F \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} & R\Phi_t(F) & \\ \swarrow & & \searrow \\ F_s & \xrightarrow{sp} & i^* Rj_* F_t \end{array} \right)$$

Revenons à la démonstration de 4.1.2. On dispose de deux triangles distingués

$$(T) : \begin{array}{ccc} & R\Phi_t(\mathcal{H}) & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ \mathcal{H}_s & \xrightarrow{\quad} & i^* Rj_* \mathcal{H}_t \end{array}$$

et

$$(T') : \begin{array}{ccc} & R\Phi_t(\mathcal{H}') & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ \mathcal{H}'_s & \xrightarrow{\quad} & i'^* Rj'_* \mathcal{H}'_t \end{array}$$

et d'une flèche de changement de base

$$(g'_s)^*(T) \longrightarrow (T')$$

Donc 4.1.1 est un isomorphisme au voisinage de x dans X_s si, et seulement si, il en est de même de

$$(4.2.1) \quad (g'_s)^* R\Phi_t(\mathcal{H}) \longrightarrow R\Phi_t(\mathcal{H}')$$

Le théorème étant de nature locale au voisinage de x , on peut supposer que f est propre.

D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre [1], la flèche naturelle

$$(Rf_* \mathcal{H})_t \longrightarrow R(f_s)_* i^* Rj_* j^* \mathcal{H}$$

est un isomorphisme, donc si on applique le foncteur $R\Gamma(X_s, \cdot)$ au triangle (T) on obtient un triangle distingué

$$(R\Gamma T) \begin{array}{ccc} & R\Gamma(X_s, R\Phi_t(\mathcal{H})) & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ R\Gamma(X_s, i^* \mathcal{H}) & \longrightarrow & R\Gamma(X_t, j^* \mathcal{H}) \end{array}$$

De même, on a un triangle distingué

$$\begin{array}{ccc}
 & R\Gamma(X'_s, R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H}')) & \\
 (R\Gamma T') \swarrow & & \nwarrow \\
 R\Gamma(X'_s, i'_* \mathcal{H}') & \longrightarrow & R\Gamma(X'_t, j'_* \mathcal{H}')
 \end{array}$$

De nouveau, on a un morphisme

$$(R\Gamma T) \longrightarrow (R\Gamma T')$$

Or X_s (resp. X_t) est propre sur s (resp. t), donc en invoquant encore le théorème de changement de base pour un morphisme propre [1] on voit que les "bases" de $(R\Gamma T)$ et $(R\Gamma T')$ sont isomorphes, donc les "sommets" aussi.

D'autre part, le théorème d'acyclicité locale pour les morphismes lisses 1.4.4 implique que la cohomologie de $R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H})$ est concentrée sur $\sum_s = \sum \cap X_s$.

Rappelons le lemme suivant

Lemme 4.2.2.- Soit T un schéma et soit $F \xrightarrow{i} T$ un fermé. Alors

$$i_* : D(F) \longrightarrow D(T)$$

est une équivalence de catégorie entre $D(F)$ et la sous-catégorie pleine de $D(T)$ formée des objets de $D(T)$ dont les faisceaux de cohomologie sont à support dans F .

En particulier, on peut regarder $R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H})$ comme un objet de $D(\sum_s)$, de sorte que

$$R\Gamma(X_s, R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H})) = R\Gamma(\sum_s, R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H}))$$

Comme x est un point isolé dans $\sum_s$, l'inclusion $\{x\} \hookrightarrow \sum_s$ fait de

$$R\Gamma(\{x\}, R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H})) = (R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H}))_x$$

un facteur direct de $R\Gamma(\Sigma_s, R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H}))$, donc de $R\Gamma(X_s, R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H}))$.
De même $(R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H}'))_x$ est un facteur direct de $R\Gamma(X'_s, R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H}'))$.
Par suite l'isomorphisme

$$R\Gamma(X_s, R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H})) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X'_s, R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H}'))$$

induit un isomorphisme

$$(R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H}))_x \xrightarrow{\sim} (R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H}'))_x,$$

Ceci achève la preuve du théorème puisque la cohomologie de $R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H})$ (resp. $R\tilde{\Phi}_t(\mathcal{H}')$) est concentrée en x (resp. x') dans un voisinage de x (resp. x').

4.3. Remarque

Le raisonnement précédent, combiné au théorème de finitude pour les morphismes propres, montre aussi que $i^* Rj_* j^* \mathcal{H}$ est constructible dans un voisinage de x dans X_s .

5. Cas où la base est un trait strictement local

5.1. Soit S un trait strictement local excellent. On notera s son point fermé et η son point générique. Soit $\overline{\eta}$ un point géométrique de S localisé en η .

Soit l un nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle de S .

Théorème 5.1.1.- Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme séparé, lisse et de dimension relative 1. Soit $Y \subset X$ un sous-schéma fermé, n'ayant qu'un seul point x en fibre spéciale et que l'on suppose fini et plat sur S . On note $U = X - Y$ l'ouvert complémentaire et $u : U \hookrightarrow X$ l'inclusion. Soit $\mathcal{H}$ un faisceau de $\mathbb{F}_l$ -modules

lisse de rang constant sur U . Alors, avec les notations de 2.1 et 1.3, on a

$$\varphi(s) = \varphi(\eta) - \dim_{\mathbb{F}_1}(\psi_x^1(u! \mathfrak{H})) .$$

Remarques : 1) Dans la situation de 5.1.1, on a

$$\Phi_x^n(u! \mathfrak{H}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = -1 \\ \psi_x^1(u! \mathfrak{H}) & \text{si } n = 1 \\ \psi_x^n(u! \mathfrak{H}) = 0 & \text{si } n \neq -1 \text{ et } 1 \end{cases}$$

En effet, tout d'abord $(u! \mathfrak{H})_x = 0$, donc $\Phi_x^{-1}(u! \mathfrak{H}) = 0$ et $\Phi_x^n(u! \mathfrak{H}) = \psi_x^n(u! \mathfrak{H})$ pour tout $n \geq 0$.

D'autre part, $\dim(X_\eta) = 1$, donc $\Phi_x^n(u! \mathfrak{H}) = \psi_x^n(u! \mathfrak{H}) = 0$,

pour tout $n \geq 2$, 1.3.2.2.

Enfin $\Phi_x^0(u! \mathfrak{H}) = \psi_x^0(u! \mathfrak{H}) = H^0((X_{(x)})_{\bar{\eta}}, u! \mathfrak{H})$; or $(X_{(x)})_{\bar{\eta}}$ est connexe (0-acyclicité des morphismes lisses [2]),

$Y \times_S (X_{(x)})_{\bar{\eta}}$ est non vide car Y est plat sur S , par hypothèse, et $\mathfrak{H}$ est lisse sur $(X_{(x)})_{\bar{\eta}} - Y \times_S (X_{(x)})_{\bar{\eta}}$, donc $H^0((X_{(x)})_{\bar{\eta}}, u! \mathfrak{H}) = 0$.

2) On a supposé que $Y \cap X_S$ est réduit à un point dans l'énoncé du théorème 5.1.1. Si l'on supprime cette hypothèse, alors

$Y \cap X_S = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est un ensemble fini et où chaque x_i est un point fermé. Comme S est hensélien, $Y = \bigsqcup_{i \in I} Y_i$ où

chaque Y_i est encore fini et plat sur S et où $Y_i \cap X_S$ est réduit au seul point x_i . Notons φ_i la fonction φ attachée à la situation $(X_i, f|_{X_i}, Y_i, \mathfrak{H}|_{X_i - Y_i})$ où $X_i = X - \bigcup_{j \neq i} Y_j$. Alors

$$\varphi = \sum_{i \in I} \varphi_i . \text{ Par suite } \varphi(s) = \varphi(\eta) - \sum_{i \in I} \dim_{\mathbb{F}_1}(\psi_{x_i}^1(u! \mathfrak{H}))$$

5.2. Prouvons que 5.1.1 entraîne 2.1.1

On a démontré la constructibilité de φ , donc, pour montrer que φ est semi-continue inférieurement, il suffit de montrer que, pour tout $s \in S$ et toute générisation t de s , on a $\varphi(s) \leq \varphi(t)$. Or, S étant noethérien, il existe un trait strictement hensélien S' , de point fermé s' et de point générique η' , et un morphisme $g : S' \rightarrow S$ tels que $g(s') = s$ et $g(\eta') = t$. Soit φ' la fonction φ associée à la situation obtenue par le changement de base $S' \rightarrow S$. D'après 5.1.1 et la remarque 2, on a $\varphi'(s') \leq \varphi'(\eta')$, donc $\varphi(s) = \varphi'(s') \leq \varphi'(\eta') = \varphi(t)$ d'où la conclusion pour la partie (i) de 2.1.1.

Supposons maintenant φ constante, la partie (ii) de 2.1.1 affirme alors que $(X, \mathcal{H}, f)$ est universellement localement acyclique. Puisque la constance de φ est une propriété qui commute au changement de base, il suffit de montrer que $(X, \mathcal{H}, f)$ est localement acyclique, i.e. que pour tout point géométrique x de X d'image s dans S et tout point géométrique t de $S_{(s)}$, la flèche de restriction

$$\mathcal{H}_x = R\Gamma(X_{(x)}, \mathcal{H}) \longrightarrow R\Gamma((X_{(x)})_t, \mathcal{H})$$

est un isomorphisme. Il suffit de le vérifier pour tout point x de Y puisque $(X, \mathcal{H}, f)$ est lisse en dehors de Y . On a alors $\mathcal{H}_x = 0$ et on doit donc montrer que $H^*((X_{(x)})_t, \mathcal{H}) = 0$. Or il existe un trait strictement hensélien S' , de point fermé s et de point générique η' , un point géométrique $\bar{\eta}'$ localisé en η' et un morphisme $g : S' \rightarrow S$ tels que $g(s') = s$ et $g(\bar{\eta}') = t$. D'après 4.1.2, on a

$$R\Gamma((X_{(x)})_t, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma((X'_{(x')})_{\bar{\eta}'}, \mathcal{H}')$$

(notations de 4.1.2). Or, pour tout $i \geq 0$,

$$H^i((X'_{(x')})_{\bar{\eta}'}, \mathcal{H}') = \psi_{x'}^i(\mathcal{H}')$$

On conclut à l'aide du théorème 5.1.1 et des deux remarques qui le suivent.

6. Déformation de revêtements

6.1. Gardons les notations et les hypothèses de 5.1.1, le résultat suivant jouera un rôle clé dans la démonstration de 5.1.1.

Proposition 6.1.1.- Quitte à se localiser en x sur X pour la topologie de Zariski, puis à faire un changement de trait strictement local sur la base S , on peut construire

a) un revêtement fini $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, étale au-dessus d'un voisinage de Zariski de x ,

b) une compactification

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{Z} - \tilde{F} = \tilde{X} & \hookrightarrow & \tilde{Z} & \longleftarrow & \tilde{F} \\ & \searrow \tilde{f} & \downarrow \tilde{g} & \swarrow & \tilde{g}|_{\tilde{F}} \\ & & S & & \end{array}$$

de $\tilde{f} = f \circ \pi : X \rightarrow S$, avec les propriétés suivantes :

1) $\tilde{g}$ est propre, purement de dimension relative 1 et le fermé "à l'infini" $\tilde{F}$ est fini sur S ;

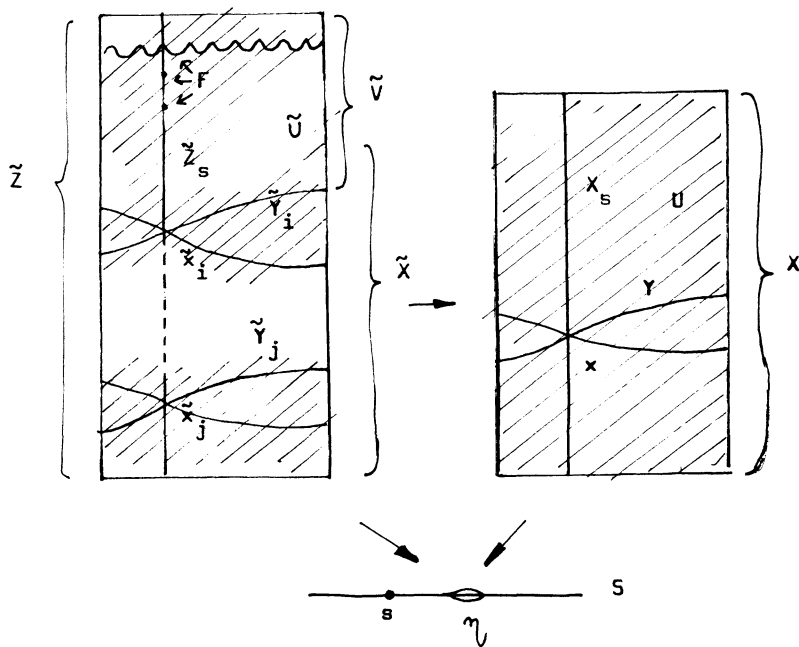
2) si l'on pose $\tilde{Y} = \tilde{\pi}^{-1}(Y)$ et $\tilde{U} = \tilde{X} - \tilde{Y} = \tilde{\pi}^{-1}(U)$, le faisceau de $\mathbb{F}_1$ -modules $\pi^*(\mathcal{H})$ se prolonge en un faisceau lisse $\tilde{\mathcal{H}}$ sur $\tilde{V} = \tilde{Z} - \tilde{Y}$.

Remarques : 1) Soit $(\tilde{x}_i)_{i \in I}$ la famille finie des points de $\tilde{\pi}^{-1}(x)$; comme S est hensélien $\tilde{Y} = \tilde{\pi}^{-1}(Y) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{Y}_i$ où $\tilde{Y}_i \cap \tilde{X}_S = \{\tilde{x}_i\}$ ($\tilde{Y}_i$ est la composante connexe de $\tilde{x}_i$ dans $\tilde{Y}$). Comme π est

étale au dessus d'un voisinage de x , π induit, pour tout $i \in I$, un isomorphisme de $\tilde{Y}_i$ sur $\tilde{Y}$ et $(\tilde{X}, \tilde{Y}_i)$ est un voisinage de (X, Y) pour la topologie étale. La situation initiale le long de Y se retrouve répétée le long de chaque $\tilde{Y}_i$ dans $\tilde{X}$.

2) Le changement de trait que l'on aura à effectuer pour pouvoir compactifier la situation n'est pas un changement de trait fini, l'extension résiduelle est de degré de transcendance 1, mais cela nous suffira.

3) Le faisceau initial $\mathcal{H}$ est ramifié le long de Y et "à l'infini de X "; la signification de 6.1.1 est que le revêtement $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ tue la ramification de $\mathcal{H}$ à l'infini sans modifier sa ramification le long de Y



Preuve de la proposition :

6.2. Une première "compactification"

6.2.1. Quitte à restreindre X en un voisinage ouvert affine de x , on peut supposer que X est affine, intègre et que l'on dispose d'une "coordonnée locale"

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & \mathbb{A}_S^1 \\ & \searrow f & \swarrow \text{projection} \\ & S & \end{array}$$

où T est étale et $T(x) = 0 \in \mathbb{A}_S^1 \subset \mathbb{A}_S^1$ (f est lisse de dimension relative 1)

6.2.2. Il existe alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \hookrightarrow & Z & \longleftrightarrow & F \\ & \searrow f & \downarrow g & \swarrow g|_F & \\ & & S & & \end{array}$$

où Z est un schéma intègre, F est un sous-schéma fermé de Z , tel que X s'identifie à l'ouvert dense $Z - F$ de Z , et où $g : Z \longrightarrow S$ est un morphisme propre, plat et de dimension relative 1.

D'après un résultat de Raynaud [7], on peut contracter toutes les composantes irréductibles de F qui sont contenues dans la fibre spéciale de Z_S (quitte à faire apparaître de nouvelles singularités sur Z). Donc on peut supposer $g|_F : F \longrightarrow S$ fini.

Enfin, quitte à normaliser Z , on peut supposer Z normal (en effet X est déjà normal et la normalisation de Z est finie sur Z).

On posera $V = Z - Y$ de sorte que (X, V) est un recouvrement

ouvert de Z et que $X \cap V = U$

6.2.3. Soit $\tilde{U} \xrightarrow{\pi} U$ un revêtement fini, étale et connexe qui trivialise $\mathcal{H}$ et soit $\pi : \tilde{Z} \longrightarrow Z$ la normalisation de Z dans $\tilde{U}$.

On a une immersion ouverte $\tilde{U} : \tilde{U} \hookrightarrow \tilde{Z}$ au-dessus de

$u : U \hookrightarrow X \hookrightarrow Z$, puisque U est normal, et π est un morphisme fini. On pose $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$, $\tilde{V} = \pi^{-1}(V)$ de sorte que $(\tilde{X}, \tilde{V})$ est un recouvrement ouvert de $\tilde{Z}$ et que $\tilde{X} \cap \tilde{V} = \tilde{U}$; on pose $\tilde{Y} = \pi^{-1}(Y)$ et $\tilde{F} = \pi^{-1}(F)$.

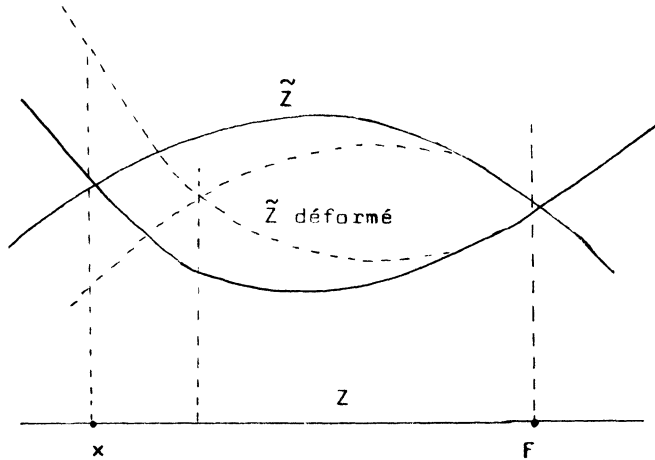
Remarque : $\tilde{Z}$ répond en partie à ce qui est demandé dans la proposition 6.1.1, à savoir :

1) $\tilde{g} = g \circ \pi$ est propre, de dimension relative 1 et $\tilde{F}$ est fini sur S ;

2) $\pi^*(\mathcal{H})$ est un faisceau constant sur $\tilde{U}$ donc se prolonge en un faisceau constant (à fortiori lisse) sur $\tilde{Z}$.

Par contre $\pi : \tilde{Z} \longrightarrow Z$ n'est pas en général étale au-dessus de x .

L'idée est alors la suivante : on va déformer le revêtement $\pi : \tilde{Z} \longrightarrow Z$ de façon à faire glisser le lieu de ramification loin de x , sans toucher à $\tilde{Z}$ au-dessus de l'infini F .



6.3. Déformation de $\pi : \tilde{Z} \longrightarrow Z$

6.3.1. On commence par déformer $\pi : \tilde{Z} \longrightarrow Z$ infinitésimalement.

Posons, pour tout $n \geq 0$,

$$S_n = S[[t]] / (t^{n+1})$$

Pour tout S -schéma E , on notera $E \times S_n$ au lieu de $E \times_S S_n$ la déformation triviale, ceci pour alléger les notations.

On se propose de construire un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{Z} = \tilde{Z}_0 & \hookrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \tilde{Z}_n & \hookrightarrow & \tilde{Z}_{n+1} \hookrightarrow \cdots \\
 \pi \downarrow & & & & \pi_n \downarrow & \square & \downarrow \pi_{n+1} \\
 Z & \hookrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z \times S_n & \hookrightarrow & Z \times S_{n+1} \hookrightarrow \cdots \\
 g \downarrow & & & & g \times \text{id}_{S_n} \downarrow & \square & \downarrow g \times \text{id}_{S_{n+1}} \\
 S & \hookrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S_n & \hookrightarrow & S_{n+1} \hookrightarrow \cdots
 \end{array}$$

qui réalisera "le glissement infinitésimal du lieu de ramification".

6.3.2. On a un recouvrement ouvert $(\tilde{X}, \tilde{V})$ de $\tilde{Z}$ tel que $\tilde{X} \cap \tilde{V} = \tilde{U}$ est étale sur U .

Rappelons le résultat suivant :

Lemme [14] : Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme étale de schémas ; il existe une et une seule déformation plate de $f : X \longrightarrow Y$ au-dessus de $Y[[t]]/(t^{n+1})$, à isomorphisme unique près ; c'est la déformation triviale.

Appliquons ce lemme à $\pi : \tilde{U} \longrightarrow U$; il en résulte que pour construire le diagramme ci-dessus, il suffit de construire des diagrammes analogues pour $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ et $\pi : \tilde{V} \longrightarrow V$ de telle sorte que $\pi_n : \tilde{X}_n \longrightarrow X \times S_n$ et $\pi_n : \tilde{V}_n \longrightarrow V \times S_n$ soient plats au-dessus de U_n pour tout $n \geq 0$. Ces deux diagrammes se recolleront alors nécessairement. On peut donc déformer indépendamment $\tilde{X}$ qui est un voisinage de $\tilde{Y}$ et $\tilde{V}$ qui est un voisinage de l'infini $\tilde{F}$.

6.3.3. Il reste à construire $\tilde{V}_n$ et $\tilde{X}_n$.

Pour $\tilde{V}_n$, on ne veut pas toucher $\tilde{Z}$ à l'infini, donc on prendra $\tilde{V}_n = \tilde{V} \times S_n$ (déformation triviale).

Pour $\tilde{X}_n$, on veut par contre faire glisser le lieu de ramification loin de x : on va "tordre" la déformation triviale $\tilde{X} \times S_n$ par un automorphisme $\tilde{\Phi}_n$ de $X \times S_n$ qui "fait glisser x ".

Soit

$$\varphi_n : \mathcal{A}_{S_n}^1 \longrightarrow \mathcal{A}_{S_n}^1$$

l'automorphisme induit par l'automorphisme $(T, t) \longmapsto (T + t, t)$ de $\mathcal{O}_S[[T, t]]/(t^{n+1})$. Comme $\varphi_n|_{S_0} = \text{id}_{\mathcal{A}_{S_0}^1}$ et que

$X \times S_n \xrightarrow{T \times \text{id}_{S_n}} \mathcal{A}_{S_n}^1$ est étale (déformation triviale de la coordonnée locale $X \xrightarrow{T} \mathcal{A}_S^1$), il existe un unique automorphisme $\tilde{\Phi}_n$ de $X \times S_n$ rendant commutatif le diagramme suivant [11]

$$\begin{array}{ccc}
 X \times S_n & \xrightarrow{\Phi_n} & X \times S_n \\
 \downarrow T \times \text{id}_{S_n} & & \downarrow T \times \text{id}_{S_n} \\
 \mathcal{A}_{S_n}^1 & \xrightarrow{\varphi_n} & \mathcal{A}_{S_n}^1
 \end{array}$$

On pose alors $\tilde{X}_n = \Phi_n^*(\tilde{X} \times S_n)$. On a donc un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X}_n & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_n} & \tilde{X} \times S_n \\
 \downarrow \pi_n & \square & \downarrow \pi \times \text{id}_{S_n} \\
 X \times S_n & \xrightarrow{\Phi_n} & X \times S_n
 \end{array}$$

On posera $Y_n = \tilde{\Phi}_n^{-1}(Y \times S_n)$ et $\tilde{Y}_n = \tilde{\Phi}_n^{-1}(\tilde{Y} \times S_n)$

On vérifie sans peine que $\tilde{V}_n \longrightarrow Z \times S_n$ et $\tilde{X}_n \longrightarrow Z \times S_n$ sont plats au-dessus de $U \times S_n$.

6.3.4. En résumé, on a construit une déformation formelle

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\mathfrak{Z}} = (\tilde{Z}_n) & & \\
 \downarrow & \downarrow (\pi_n) & \\
 \mathfrak{Z} = (Z \times S_n) & & \\
 \downarrow & \downarrow (f \times \text{id}_{S_n}) & \\
 \mathfrak{S} = (S_n) & &
 \end{array}$$

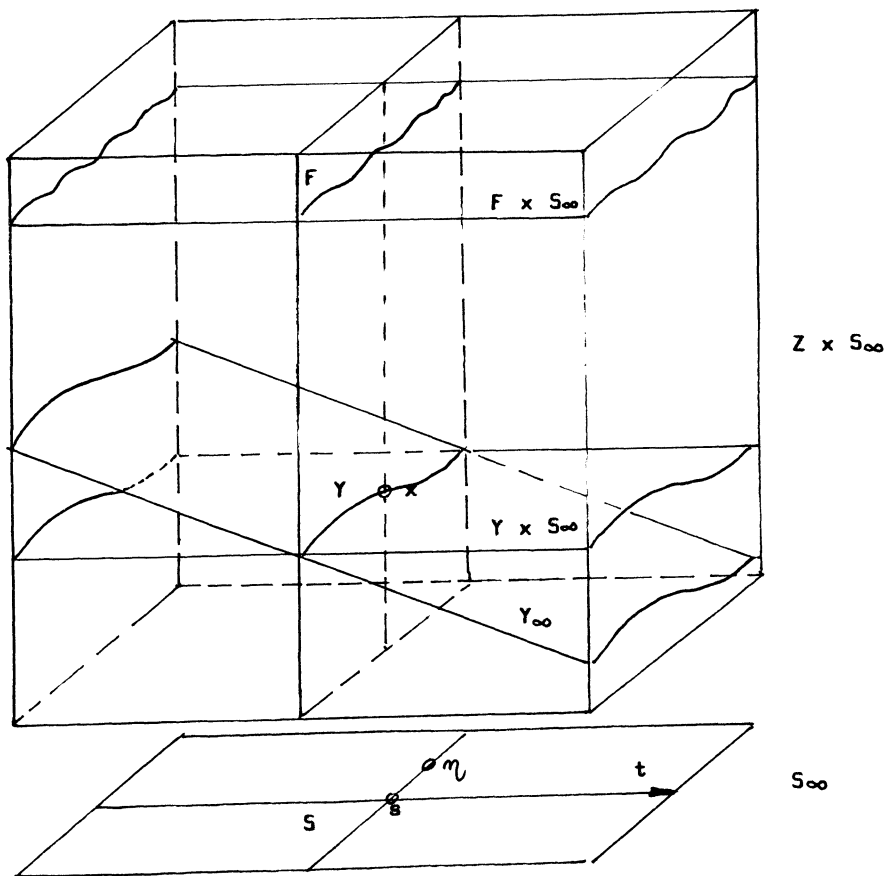
Cette déformation est algébrisable : en effet, si l'on pose

$S_\infty = S[[t]]$ et $Z \times S_\infty = Z \times_S S_\infty$, alors $\mathfrak{Z} \longrightarrow \mathfrak{S}$ est le complété formel de la projection naturelle $Z \times S_\infty \longrightarrow S_\infty$ le long de "t = 0". Comme le morphisme $\tilde{\mathfrak{Z}} \longrightarrow \mathfrak{Z}$ est fini, il résulte du théorème de Grothendieck [8] que $\tilde{\mathfrak{Z}} \longrightarrow \mathfrak{Z}$ est algébrisable en un morphisme fini

$$\pi_\infty : \tilde{Z}_\infty \longrightarrow Z \times S_\infty$$

On aura à considérer les sous-schémas fermés suivants de

$Z \times S_\infty : F \times S_\infty = F \times_S S_\infty$, $Y \times S_\infty = Y \times_S S_\infty$ et le sous-schéma fermé Y_∞ qui algébrise le sous-schéma fermé formel (Y_n) de $\mathcal{Z}$ (l'existence et l'unicité de Y_∞ sont garantis par le fait que $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{S}$ est propre [8])



Le résultat essentiel est alors le suivant

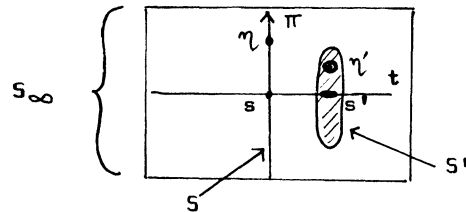
Lemme 6.3.4.1. Avec les notations et les hypothèses ci-dessus :

(i) $\pi : \tilde{Z}_\infty \rightarrow Z \times S_\infty$ est étale au-dessus de

$Z \times S_\infty - F \times S_\infty - Y_\infty$;

(ii) $\tilde{Z}_\infty$ et la déformation triviale $\tilde{Z} \times S_\infty$ sont localement isomorphes, pour la topologie étale, le long de $F \times S_\infty$.

6.3.5. Admettons provisoirement ce lemme et achevons la preuve de 6.1.1 : soit R l'anneau de valuation discrète strictement hensélien tel que $S = \text{Spec}(R)$ et soit π une uniformisante de R . On a alors $S_\infty = \text{Spec}(R[[t]])$. Le localisé de $R[[t]]$ en l'idéal premier principal engendré par t est encore un anneau de valuation discrète d'uniformisante π , on notera R' un hensélisé strict de cet anneau. Si k est le corps résiduel de R , le corps résiduel de R' est une clôture séparable de $k((t))$. Une autre façon de dire est que $S' = \text{Spec}(R')$ est un localisé strict de S_∞ au point générique du diviseur " $\pi = 0$ " de S_∞ .



On dispose d'une flèche de changement de trait strictement local

$$S' \longrightarrow S_\infty \longrightarrow S$$

c'est le changement de base cherché : en effet, soit $\pi' : \tilde{Z}' \longrightarrow Z'$ le morphisme déduit de $\pi_\infty : \tilde{Z}_\infty \longrightarrow Z \times S_\infty$ par ce changement de base, il répond aux exigences de 6.1.1. Tout d'abord, $\tilde{Z}' \longrightarrow S'$ est propre, purement de dimension relative 1, et le fermé à l'infini $\tilde{F}' = \pi'^{-1}(F')$, où $F' = F \times_S S'$, est fini sur S' (on utilise le fait que π' est fini). D'après la partie (i) de 6.3.4.1,

π' est étale au-dessus d'un voisinage de x' (où x' est le point de Z'_s , d'image x dans Z_s , ce qui a un sens car $Z'_s \rightarrow Z_s$ est un homéomorphisme universel) ; plus précisément, soit x_∞ l'image de x' par $Z' \rightarrow Z \times S_\infty$, alors $x_\infty \in Y \times S_\infty$, donc $x_\infty \notin Y_\infty$ puisque par construction $Y \times S_\infty$ et Y_∞ sont disjoints au-dessus de l'ouvert $S_\infty - S = \{t \neq 0\}$ de S_∞ .

Enfin, d'après la partie (ii) de 6.3.4.1, $\tilde{Z}'$ est localement isomorphe (pour la topologie étale) le long de F' à un revêtement fini qui trivialise le faisceau $\mathcal{H}'$ image réciproque de $\mathcal{H}$ sur $U' = U \times_S S'$, donc $\pi'^*(\mathcal{H}')$ se prolonge en un faisceau lisse sur $\tilde{Z}'$ au-dessus de F' . La proposition 6.1.1 est démontrée modulo 6.3.4.1.

6.3.6. Preuve de 6.3.4.1

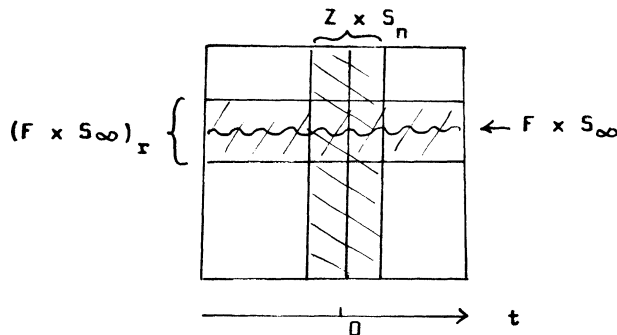
Pour la partie (i), considérons le lieu de ramification de $\pi_\infty : \tilde{Z}_\infty \rightarrow Z \times S_\infty$; comme $Z \times S_\infty$ est normal (Z est normal), que $\tilde{Z}_\infty$ est irréductible ($\tilde{Z}$ est irréductible) et que π_∞ est un morphisme de type fini dominant, ce lieu de ramification est le sous-schéma fermé de $\tilde{Z}_\infty$ défini par le $\mathcal{O}_{\tilde{Z}_\infty}$ -Idéal annulateur de $\Omega^1_{\tilde{Z}_\infty/Z \times S_\infty}$ ([11], 9.12), i.e. par la différentielle $\mathcal{O}_{\tilde{Z}_\infty/Z \times S_\infty}$ que l'on notera simplement $\mathcal{R}$.

Le complété formel de $\mathcal{R}$ le long de " $t = 0$ " est la différentielle du morphisme de schéma formel $\tilde{z} \rightarrow z$ et définit un sous-schéma fermé formel de $\tilde{z}$ qui est le lieu de ramification de $\tilde{z} \rightarrow z$ (pour chaque entier n , $\mathcal{O}_{\tilde{Z}_n/Z \times S_n}$ définit le sous-schéma de ramification de $\tilde{Z}_n \rightarrow Z \times S_n$ ([11], 9.12)). Or le lieu de ramification de $\tilde{z} \rightarrow z$ admet deux composantes,

l'une au-dessus du sous-schéma fermé formel $(F \times S_n)$ de $\mathcal{Z}$,
 l'autre au-dessus du sous-schéma fermé formel (Y_n) de $\mathcal{Z}$. Comme
 le morphisme $Z_\infty \longrightarrow S_\infty$ est propre, l'application qui, à un sous-
 schéma fermé de $Z \times S_\infty$ (resp. $\tilde{Z}_\infty$) fait correspondre son com-
 plété formel le long de " $t = 0$ " est une bijection sur l'ensemble
 des sous-schémas fermés formels de $\mathcal{Z}$ (resp. $\tilde{\mathcal{Z}}$) [8]. Donc
 le lieu de ramification de π_∞ est réunion de deux fermés de
 $\tilde{Z}_\infty$: l'un au-dessus de $F \times S_\infty$, l'autre au-dessus de Y_∞ , et
 π_∞ est étale au-dessus de l'ouvert $Z \times S_\infty - F \times S_\infty - Y_\infty$.

Pour la partie (ii), on va montrer que $\tilde{Z}_\infty$ et $\tilde{Z} \times S_\infty$ sont
 isomorphes au-dessus du complété formel de $Z \times S_\infty$ le long de
 $F \times S_\infty$ ("complété horizontal"). Cela entraînera la conclusion : en
 effet, $\tilde{Z}_\infty$ et $\tilde{Z} \times S_\infty$ sont finis au-dessus de $Z \times S_\infty$ et étales
 au-dessus de $Z \times S_\infty - F \times S_\infty$ dans un voisinage de $F \times S_\infty$,
 voisinage que l'on peut supposer affine puisque $F \times S_\infty$ est fini sur
 S_∞ et que S_∞ est un schéma local ; donc on peut appliquer le
 théorème d'Elkik [6] à cette situation. On en déduit que $\tilde{Z}_\infty$ et
 $\tilde{Z} \times S_\infty$ ont même hensélisés le long de $F \times S_\infty$, c'est exactement
 ce que l'on veut. Il reste à prouver que $\tilde{Z}_\infty$ et $\tilde{Z} \times S_\infty$ sont iso-
 morphes au-dessus du complété formel de $Z \times S_\infty$ le long de $F \times S_\infty$;
 il suffit de construire un système inductif d'isomorphismes entre
 $\tilde{Z}_\infty$ et $\tilde{Z} \times S_\infty$ au-dessus des voisinages infinitésimaux de $F \times S_\infty$
 dans $Z \times S_\infty$. Or, par construction, on dispose d'un système induc-
 tif d'isomorphismes entre $\tilde{Z}_n$ et $\tilde{Z} \times S_n$ au-dessus de $V \times S_n$
 $(n \in \mathbb{N})$. Soit $r \in \mathbb{N}$ fixé et soit F_r le r -ième voisinage infini-
 tésimal de F dans Z (où, ce qui revient au même, dans V), on
 dispose à fortiori d'un système inductif d'isomorphismes entre $\tilde{Z}_n$ et

$\tilde{Z} \times S_n$ au-dessus de $F_r \times S_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Soit $(F \times S_\infty)_r$ le r -ième voisinage infinitésimal de $F \times S_\infty$ dans $Z \times S_\infty$; $(F \times S_\infty)_r$ modulo t^{n+1} n'est autre que $F_r \times S_n$. Donc comme $(F \times S_\infty)_r$ est propre sur S_∞ , le théorème de Grothendieck [8] s'applique et l'on obtient un isomorphisme entre $\tilde{Z}$ et $\tilde{Z} \times S_\infty$ au-dessus de $(F \times S_\infty)_r$. Quand r varie, il est clair que l'on obtient un système inductif d'isomorphismes et on gagne



7. Preuve du théorème 5.1.1

7.1. Reprenons les notations et les hypothèses de 5.1.1. Il nous reste à démontrer la formule suivante :

$$\varphi(s) = \varphi(\eta) - \dim_{\mathbb{F}_1} \mathcal{V}_x^1(u; \mathcal{H})$$

que l'on peut réécrire, en tenant compte de la remarque 1 de 5.1 ,

$$(7.1.1) \quad \varphi(s) = \varphi(\eta) - \sum_{q \geq -1} (-1)^q \dim_{\mathbb{F}_1} \Phi_x^q(u; \mathcal{H})$$

D'après le théorème de Deligne 1.3.1, il suffit de montrer cette formule après un changement de traits strictement henséliens. Donc,

d'après 6.1.1, on peut supposer que l'on dispose des diagrammes a) et b) de 6.1.1. On gardera les notations de 6.1.1. On va montrer la formule suivante

$$(7.1.2) \quad \tilde{\varphi}(s) = \tilde{\varphi}(\eta) - \sum_{\tilde{x} \in \tilde{\pi}^{-1}(x)} \sum_{q \geq -1} (-1)^q \dim_{\mathbb{F}_1} \Phi_{\tilde{x}}^q(\tilde{\mathfrak{H}})$$

où $\tilde{\varphi}$ est la fonction φ associée à la situation $(\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{\mathfrak{H}}, \tilde{g})$.

Compte-tenu de la remarque 1 de 6.1, la formule 7.1.1 résultera de la formule 7.1.2 en divisant les deux membres de cette dernière égalité par le cardinal de $\tilde{\pi}^{-1}(x)$.

On posera dans la suite, pour tout faisceau $\mathcal{G}$ sur $\tilde{Z}$,

$$\Delta \chi(\mathcal{G}) = \chi(\tilde{Z}_{\tilde{\eta}}, \mathcal{G} | \tilde{Z}_{\tilde{\eta}}) - \chi(\tilde{Z}_s, \mathcal{G} | \tilde{Z}_s)$$

On va calculer $\Delta \chi(\tilde{u}! \tilde{\mathfrak{H}}) - \text{rang}(\tilde{\mathfrak{H}}) \cdot \Delta \chi(\mathbb{F}_1)$ de deux manières différentes.

7.2. Utilisation de la formule de Grothendieck-Ogg-Safarevič :

$\tilde{Z}_s$ et $\tilde{Z}_{\tilde{\eta}}$ sont des courbes connexes propres sur des corps algébriquement clos et $\tilde{u}! \tilde{\mathfrak{H}}$ est lisse là où $\tilde{Z}_s$ et $\tilde{Z}_{\tilde{\eta}}$ ne le sont pas.

Donc la formule de Grothendieck-Ogg-Safarevič s'applique à $\tilde{Z}_s$ et

$\tilde{Z}_{\tilde{\eta}}$ (1.2, remarque) et on obtient

$$\chi(\tilde{Z}_{\tilde{\eta}}, \tilde{u}! \tilde{\mathfrak{H}}) = \text{rang}(\tilde{\mathfrak{H}}) \cdot \chi(\tilde{Z}_{\tilde{\eta}}) - \tilde{\varphi}(\eta)$$

$$\chi(\tilde{Z}_s, \tilde{u}! \tilde{\mathfrak{H}}) = \text{rang}(\tilde{\mathfrak{H}}) \cdot \chi(\tilde{Z}_s) - \tilde{\varphi}(s)$$

d'où

$$(7.2.1) \quad \Delta \chi(\tilde{u}! \tilde{\mathfrak{H}}) - \text{rang}(\tilde{\mathfrak{H}}) \cdot \Delta \chi(\mathbb{F}_1) = \tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(\eta)$$

7.3 Utilisation de la théorie des cycles évanescents :

$\tilde{Z}$ est une courbe propre sur le trait S , donc on peut appliquer

1.3.4.7, on obtient

$$\Delta \chi(\tilde{u}! \tilde{\mathfrak{H}}) = \sum_{q \geq -1} (-1)^q \chi(\tilde{Z}_s, \Phi^q(\tilde{u}! \tilde{\mathfrak{H}}))$$

$$\Delta \chi(\mathbb{F}_1) = \sum_{q \geq -1} (-1)^q \chi(\tilde{Z}_s, \Phi^q(\mathbb{F}_1))$$

Or les $\Phi^q(\tilde{u}! \tilde{\mathcal{H}})$ sont concentrés d'une part sur $\pi^{-1}(x)$, d'autre part sur $\tilde{F}_s$, et les $\Phi^q(\mathbb{F}_1)$ sont concentrés sur $\tilde{F}_s$. Comme $\tilde{u}! \tilde{\mathcal{H}}$ est lisse, de rang égal à $\text{rang}(\mathcal{H})$, dans un voisinage de $\tilde{F}_s$ et que $\tilde{F}_s$ est un ensemble fini

$$\chi(\tilde{F}_s, \Phi^q(\tilde{u}! \tilde{\mathcal{H}})) = \text{rang}(\mathcal{H}) \chi(\tilde{F}_s, \Phi^q(\mathbb{F}_1))$$

pour tout $q \geq -1$, donc

$$(7.3.1) \quad \Delta \chi(\tilde{u}! \tilde{\mathcal{H}}) - \text{rang}(\mathcal{H}) \cdot \Delta \chi(\mathbb{F}_1) = \sum_{\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)} \sum_{q \geq -1} (-1)^q \dim_{\mathbb{F}_1} \Phi^q_{\tilde{x}}(\tilde{u}! \tilde{\mathcal{H}})$$

Par comparaison de 7.2.1 et 7.3.1, on obtient 7.1.2, ce qui achève la preuve du théorème 5.1.1 et par là même la preuve du théorème de semi-continuité.

Bibliographie :

- [1] M. ARTIN.- Théorème de changement de base pour un morphisme propre, S.G.A.4, exposé XII.
- [2] M. ARTIN.- Morphismes acycliques, S.G.A. 4, exposé XV.
- [3] P. DELIGNE.- Cohomologie étale : les points de départ , [Arcata] , S.G.A. 4 1/2 .
- [4] P. DELIGNE.- Théorème de finitude en cohomologie 1 -adique, [Th. Finitude] , S.G.A. 4 1/2 .
- [5] P. DELIGNE.- Le formalisme des cycles évanescents , S.G.A. 7 , exposé XIII.
- [6] R. ELKIK.- Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, Ann. de l'E.N.S., t. 6, fasc. 4 (1973), p. 553-604.
- [7] J. EMSALEM.- Projectivité des schémas en courbes sur un anneau de valuation discrète, Bull. Soc. Math. France, t. 101, (1973), p. 255-263 .
- [8] EGA III (première partie), § 5, Publ. Math. I.H.E.S. n° 11 .
- [9] EGA IV (troisième partie), § 9, Publ. Math. I.H.E.S. n° 28 .
- [10] EGA IV (quatrième partie), (17.15.14), Publ. Math. I.H.E.S. n° n° 32 .
- [11] A. GROTHENDIECK.- Morphismes étales, S.G.A. 1, exposé I .
- [12] A. GROTHENDIECK.- Formule d'Euler-Poincaré en cohomologie étale, S.G.A. 5, exposé X .
- [13] L. ILLUSIE.- Appendice à [4] .
- [14] S. LICHTENBAUM et M. SCHLESSINGER.- The cotangent complex of a morphism, Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967), p. 41-70 .
- [15] M. RAYNAUD.- Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, Séminaire Bourbaki 1965, n° 286 .
- [16] J.-P. SERRE.- Corps locaux, Paris, Hermann, 1968 .

- [17] J.-P. SERRE.- Représentations linéaires des groupes finis,
Collection Méthodes, Hermann, 1967 .
- [18] G. LAUMON.- "Travail en préparation"
- S.G.A. : Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie,
Lectures notes in Math., n° 224 (S.G.A 1), n° 305
(S.G.A. 4), n° 569 (S.G.A. 4 1/2) , n° 589 (S.G.A. 5),
n° 340 (S.G.A. 7 II)
- E.G.A. : Eléments de Géométrie Algébrique par A. Grothendieck
et J. Dieudonné.