

Astérisque

H. HENNION

B. ROYNETTE

**Un théorème de dichotomie pour une marche
aléatoire sur un espace homogène**

Astérisque, tome 74 (1980), p. 99-122

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__99_0>

© Société mathématique de France, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME DE DICHOTOMIE POUR UNE MARCHE ALÉATOIRE
SUR UN ESPACE HOMOGÈNE

H. HENNION - B. ROYNETTE

0.- Introduction

a) Soient G un groupe topologique localement compact à base dénombrable d'élément neutre e et μ une mesure de probabilité sur G . Soit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de v. a. indépendantes à valeurs dans G et de même loi μ . Soit $Z_n^g = gX_1 \dots X_n$ la marche aléatoire droite partant de g au temps 0 associée. C'est une chaîne de Markov dont le noyau de transition Q est donné par $Q(g, A) = \varepsilon_g * \mu(A)$ ($g \in G$, A borélien de G) et dont le noyau potentiel N est donné par $N(g, A) = N_A^1(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_g * \mu^{*n}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n(g, A)$. La mesure μ est dite adaptée si le support de μ engendre topologiquement G . Lorsque μ est adaptée, il est bien connu (cf. [8]) que l'une ou l'autre des situations suivantes est réalisée : ou tout état est récurrent, i. e. que la marche partant de e visite p. s. une infinité de fois tout ouvert non vide et $N(g, V) = +\infty$ pour tout ouvert non vide V de G et tout g de G ; ou tout état est transitoire, i. e. que la marche partant de e visite p. s. un nombre fini de fois tout compact et $N(g, V) < +\infty$ pour tout compact V et tout g de G .

b) Soient maintenant H un sous-groupe fermé de G et $M = H \backslash G$ le quotient à droite de G par H (M est l'ensemble des classes Hg ; G opère à droite sur M). Soient π l'application canonique de G dans M et $Y_n^x = \pi(gX_1 \dots X_n) = xX_1 \dots X_n$ (avec $x = \pi(g)$). Un calcul simple (cf. par exemple [9]) prouve que Y_n^x est une chaîne de Markov sur M dont le noyau de transition P est donné par $P(x, A) = \int_G 1_A(xg) d\mu(g) = \varepsilon_x * \mu(A) = Q(u, \pi^{-1}A)$ ($x \in M$, A borélien de M , $x = \pi(u)$ et $u \in G$), tandis que le noyau potentiel U est donné par $U(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_G 1_A(x.g) d\mu^{*n}(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_x * \mu^{*n}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A) = N(u, \pi^{-1}A)$. Pour toute f borélienne : $M \rightarrow \mathbb{R}_+$, les formules suivantes sont évidentes : $P^n f(x) = Q^n(f \circ \pi)(u)$ et $Uf(x) = N(f \circ \pi)(u)$ (avec $x = \pi(u)$). Nous appellerons cette chaîne Y^x la marche aléatoire droite de loi μ sur M .

c) Notre but est ici d'établir pour Y_n^x un théorème de dichotomie analogue à celui rappelé dans le premier alinéa. Si un tel théorème est évidemment vrai lorsque H est distingué dans G puisque, dans ce cas, Y_n^x s'identifie à la

marche aléatoire de loi $\pi(\mu)$ sur le groupe $H \setminus G$, il n'est pas vrai en général (cf. exemple 1) ci-dessous) ; aussi devrons-nous faire quelques hypothèses sur le triplet (G, H, μ) . Une étude complète des chaînes du type Y_n^x a déjà été faite par H. Hennion (cf. [6]) dans le cas où G est nilpotent discret à génération finie. Cette étude a ensuite été étendue dans [10] aux groupes de Lie nilpotents simplement connexes.

I.- Quelques remarques préliminaires sous l'hypothèse d'étalement

Dans tout ce qui suit, μ sera supposée étalée, i. e. qu'il existe un n tel que μ^{*n} soit non singulière par rapport à une mesure de Haar à gauche λ de G . Cette hypothèse est équivalente au fait qu'il existe un entier p , une constante $k_1 > 0$ et un ouvert U de G avec : $\mu^{*p}|_U \geq k_1 \lambda|_U$. Pour tout n , nous noterons μ_a^{*n} (resp. μ_s^{*n}) la partie absolument continue (resp. singulière) par rapport à λ de μ^{*n} . L'hypothèse d'étalement implique l'existence d'une constante $k_2 < 1$ telle que $\|\mu_s^{*n}\| \leq k_2^n$ pour n assez grand. Le noyau P^n se décompose de la même façon en P_a^n et P_s^n , avec $P_a^n f(x) = \varepsilon_x * \mu_a^{*n}(f)$ et $P_s^n f(x) = \varepsilon_x * \mu_s^{*n}(f)$. Si f est borélienne bornée, $P_a^n f$ est continue, comme convolée d'une fonction de L^1 et de L^∞ . Si f est une fonction harmonique bornée (i. e. $Pf = f$), alors f est continue. En effet : $\|f - P_a^n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty k_2^n$ pour n assez grand. Ainsi f est la limite uniforme de fonctions continues (cf. [2]).

Introduisons quelques notations.

Notons U_a (resp. U_s) le noyau défini par $U_a = \sum_{n=0}^{\infty} P_a^n$ (resp. $U_s = \sum_{n=0}^{\infty} P_s^n$). Remarquons qu'on a :

$$|U_s f(x)| \leq k_3 \|f\|_\infty \quad (1) ,$$

et que puisque μ est étalée, U_a envoie les fonctions positives boréliennes bornées dans les fonctions s. c. i.

Si A est une partie borélienne de M , nous noterons :

$$R_A^x = \{ \omega, \sum_{n=0}^{\infty} 1_A(Y_n^x(\omega)) = +\infty \} ; h_A(x) = P(R_A^x) \quad (x \in M)$$

$$P_A 1(x) = P(T_A^x < +\infty) (=1 \text{ sur } A) \text{ avec } T_A^x = \inf \{ n \geq 0, Y_n^x \in A \} .$$

Nous noterons encore : $S_A^x = \inf \{ n \geq 1 ; Y_n^x \in A \}$ et $g_A(x) = P \{ S_A^x = +\infty \}$ si $x \in A$ et $g_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

θ désignera comme d'habitude l'opérateur de translation $(Y_n^X \circ \theta = X_{n+1}^X)$. Pour toute v. a. C (resp. pour tout événement D), nous noterons indifféremment par $E_x(C)$ ou $E(C^X)$ (resp. $P_x(D)$ ou $P(D^X)$) l'espérance (resp. la probabilité) pour la m. a. issue de x à l'instant 0.

Nous noterons B_+ (resp. C_+) l'ensemble des fonctions positives bornées boréliennes (resp. continues positives bornées) définies sur M .

Définition.— Un élément x de M est dit transitoire s'il existe un voisinage V de x tel que $h_V(x) = 0$. Un élément x de M est dit récurrent si pour tout voisinage V de x , $h_V(x) = 1$.

Proposition 1.— Si μ est étalée, tout état est récurrent ou transitoire. L'ensemble des éléments transitoires est ouvert.

Lemme 1.— Soit A un borélien de M tel que $h_A \leq a < 1$ sur A . Alors $h_A = 0$ sur A (et donc partout).

Démonstration : Soient $x \in A$ et $\alpha = h_A(x) \leq a$; soit T_A^p le temps de $p^{\text{ième}}$ passage dans A . Il est clair que $\{T_A^p < \infty\} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} R_A$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe donc p tel que $P_x \{T_A^p < \infty\} \leq P \{R_A^X\} + \varepsilon = \alpha + \varepsilon$.

Par ailleurs, on a :

$$R_A = R_A \cap \{T_A^p < \infty\} = \{T_A^p < \infty\} \cap R_A \circ \theta_{T_A^p}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \alpha &= P(R_A^X) = P_x \{T_A^p < \infty ; R_A \circ \theta_{T_A^p}\} \\ &= E_x \{T_A^p < \infty ; h(Y_{T_A^p}^p)\} \\ &\leq a(\alpha + \varepsilon), \end{aligned} \quad (2)$$

puisque $Y_{T_A^p}^p \in A$; ainsi $\alpha \leq a\alpha$ et donc $\alpha = 0$.

Démonstration de la proposition 1 : Soit x non récurrent. Il existe V tel que $h_V(x) < 1$ (V voisinage de x) ; h_V étant harmonique est continue ; il existe donc un voisinage W de x , $W \subset V$ tel que $h_V \leq a < 1$ sur W . Or, $h_W \leq h_V$.

D'où $h_W \leq a < 1$ sur W et donc $h_W = 0$ sur W , ce qui prouve la proposition 1.

Proposition 2.- Supposons toujours μ étalée. Si x est un état transitoire, il existe un voisinage V de x et une constante C telle que $U|_V \leq C$ partout.

Démonstration : Soit x comme dans l'hypothèse. D'après la décomposition de Riesz, on a avec W comme dans la proposition précédente : $P_W 1 = U g_W + h_W = U g_W$. Notons avec des indices (n) la chaîne d'opérateur $P^n(Y_p^{(n)} = Y_{np})$. Il est clair que $h_W^{(n)} = 0$. Ainsi : $P_W^{(n)} 1 = U^{(n)} g_W^{(n)} (= 1 \text{ sur } W)$. Par ailleurs, puisque la marche partant de x ne visite W qu'un nombre fini de fois, on a : $g_W^{(n)} \rightarrow 1$ sur W $n \rightarrow \infty$. D'autre part, d'après l'équation de Poisson : $(I - P^n) U^{(n)} g_W^{(n)} = g_W^{(n)}$ et donc, sur W , on a :

$$\begin{aligned} g_W^{(n)} &= 1 - P^n U^{(n)} g_W^{(n)} \\ &= 1 - P_a^n U^{(n)} g_W^{(n)} - P_s^n g_W^{(n)}, \text{ d'où il résulte que } P_a^n U^{(n)} g_W^{(n)} \\ &\text{tend vers } 0 \text{ sur } W. \end{aligned}$$

Comme $\|P_s^n\| \leq k_2^n$ et $U^{(n)} g_W^{(n)} \leq 1$, on a :

$$g_W^{(n)} \geq 1 - k_2^n - P_a^n U^{(n)} g_W^{(n)}.$$

Le fait que $P_a^n U^{(n)} g_W^{(n)}$ tend vers 0 sur W et la continuité de $P_a^n U^{(n)} g_W^{(n)}$ impliquent l'existence d'un entier n_0 , d'une constante $k_4 > 0$ et d'un voisinage W' de x tels que :

$$g_W^{(n_0)} \geq k_4 1_{W'}.$$

D'où :

$$1 \geq U^{(n_0)} g_W^{(n_0)} \geq K_4 U^{(n_0)} 1_{W'}.$$

On a donc $U^{(n_0)} 1_{W'} \leq 1/k_4$ partout. Ainsi :

$$U|_{W'} = (I + P + \dots + P^{n_0-1}) U^{(n_0)} 1_{W'} \leq n_0 \frac{1}{k_4}.$$

La proposition est alors prouvée, avec $W' = V$ et $C = n_0 \frac{1}{k_4}$.

Nous noterons T_μ le semi-groupe fermé engendré par le support de μ .

Proposition 3.- Si $R \neq \emptyset$, l'ensemble fermé R des états récurrents est absorbant (i. e. : $P_{R_C} 1 = 0$ sur R , ou encore $R \cdot T_\mu \subset R$).

Démonstration : Notons déjà que si $f \in C_+$, $P^n f$ est continue et donc Uf est s. c. i. De même, si V est un ouvert de M , $U|_V$ est s. c. i.

a) Soit $x \in R$ et y tel que pour tout voisinage ouvert relativement compact V_{y_0} de y on ait : $P_x \{T_{V_{y_0}} < \infty\} = P_{V_{y_0}} 1(x) > 0$ (i. e. $y = g \cdot x$ avec $g \in T_\mu$) et que $U|_{V_{y_0}}$ est s. c. i., il existe un voisinage W de x tel que $F_{V_{y_0}} 1(x) \geq a > 0$ sur W .

b) $P_{V_{y_0}} 1$ étant surharmonique (i. e. : $P P_{V_{y_0}} 1 \leq P_{V_{y_0}} 1$), $P_{V_{y_0}} 1(Y_n^x)$ est une surmartingale positive. Elle converge donc p. s. quand $n \rightarrow \infty$ vers une v. a. $L_{V_{y_0}}^x$. Il est bien connu (cf. [1], p. 97) que $L_{V_{y_0}}^x = 0$ sur $(R_{V_{y_0}}^x)^c$. Par ailleurs : $L_{V_{y_0}}^x = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{V_{y_0}} 1(Y_n^x) \geq a > 0$ p. s., car x est récurrent. D'où : $P(R_{V_{y_0}}^x)^c = 0$ et donc $h_{V_{y_0}}(x) = 1$. D'après (2), il existe $y_0 \in V_{y_0}$ tel que $h_{V_{y_0}}(y_0) = 1$.

c) Prenant alors une suite d'ouverts relativement compacts V_n décroissants vers y , on en déduit, réitérant la construction précédente, l'existence d'une suite z_n , $z_n \in V_n$, $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ et telle que $h_{V_{y_0}}(z_n) \geq h_{V_n}(z_n) = 1$. Ainsi, $h_{V_{y_0}}(z_n) = 1$ et donc, $h_{V_{y_0}}$ étant continue, $h_{V_{y_0}}(y) = 1$ et y est donc récurrent. D'où $x \cdot T_\mu \subset R$ et la proposition est prouvée.

Remarque : Notons que les résultats que nous venons de prouver sont vrais dans la situation suivante : Y_n est une chaîne de Markov sur M dont le noyau de transition est fortement fellerien, i. e. envoie B_+ dans C_+ .

Il existe sur M une mesure quasi-invariante σ -finie (cf. [3]) ; soit γ une telle mesure (γ satisfait à : $\gamma \cdot g$ est équivalente à γ pour tout g de G). Cette mesure γ est telle que : $\gamma(A) = 0$ si et seulement si $\lambda(\pi^{-1}A) = 0$, où λ est une mesure de Haar sur G (3). La proposition suivante établit un théorème de dichotomie peu surprenant.

Proposition 4.- Si μ est étalée et si $T_\mu = G$, alors la chaîne Y_n^x satisfait à l'une des propriétés suivantes :

1) Tous les états sont récurrents et la chaîne est récurrente au sens de Harris par rapport à γ .

2) Tous les états sont transitoires et le potentiel de tout compact est borné.

Lemme 2.- Supposons que M s'écrive : $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ avec $h_{M_k} \equiv 0$. Alors le potentiel de tout compact est borné.

Démonstration du lemme 2 :

a) Reprenant les notations de la proposition 2, on a : $P_{K_k} 1 = U_{g_{M_k}}$ et donc $U_{g_{M_k}} = 1$ sur M_k . Soit $f_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} P^n g_{M_k}$. Puisque $U_{g_{M_k}} = 1$ sur M_k , il est clair que $1 \geq f_k > 0$ sur M_k .

Par ailleurs, de la relation $U P^n g_{M_k} \leq U_{g_{M_k}} \leq 1$, on déduit que $U f_k \leq 1$. Posons alors : $f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f_k$. Il est clair que $f \leq 1$, $f > 0$ partout sur M et $U f \leq 1$.

b) Soit maintenant n assez grand pour que $\mu_a^{*n}(G) > 0$. La fonction continue $g = P_a^n f$ est alors partout strictement positive et $U g = U P_a^n f \leq U P^n f \leq U f \leq 1$. Si maintenant K est un compact de M , il existe k_5 telle que $1_K \leq k_5 g$ et donc $U 1_K \leq k_5$. Ceci prouve le lemme 2.

Démonstration de la proposition 4 : Soit S_μ le semi-groupe ouvert des points de G possédant un voisinage sur lequel une puissance de μ majore un multiple de λ . De la relation $T_\mu \cdot S_\mu \subset S_\mu$ (cf. [2]) et du fait que $S_\mu \neq \emptyset$ (μ étant étalée), on déduit que $S_\mu = G$. Il en résulte que la marche Z_n^g sur G est λ -irréductible (cf. [9]) et donc que la marche Y_n^x sur M est γ -irréductible (3). On sait alors (cf. [9]) que Y_n^x satisfait à l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

1') Il existe un ensemble absorbant $F \subset M$ portant γ et une mesure σ -finie $\gamma' \gg \gamma$ telle que la restriction de Y_n^x à F soit récurrente au sens de Harris par rapport à γ' .

2') Le noyau potentiel est propre (i. e. : il existe une suite M_k de parties de M et des constantes C_k telles que : $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ et $U 1_{M_k} \leq C_k$).

Supposons 1') réalisée ; pour tout A tel que $\gamma(A) > 0$, on a $\gamma'(A) > 0$ et donc $h_A = 1$ sur F ; h_A étant continue, $h_A = 1$ partout ; si par contre $\gamma(A) = 0$, (3) et (1) montrent que $U 1_A = U 1_A \leq k_3$ de sorte que $h_A = 0$ partout ; et l'assertion 1 de la proposition est réalisée ; supposons 2') réalisée ; alors l'hypothèse du lemme 2 est satisfaite et l'assertion 2 de la proposition résulte de la conclusion de ce lemme.

Lorsque G est discret, nous obtenons un théorème de dichotomie complet. Ce théorème est en fait un cas particulier du théorème 1 du paragraphe suivant. Nous le présentons ici car sa démonstration est sensiblement plus simple que celle du

théorème 1.

Proposition 5.— Supposons G discret (et donc dénombrable) et μ adaptée. Alors, de deux choses l'une :

- ou tout état est récurrent et il n'y a qu'une seule classe de récurrence,
- ou tout état est transitoire.

Démonstration : a) Notons $i, j, \dots$ les éléments de M et $\overset{Y}{\mu}$ l'image de μ par l'application $g \rightarrow g^{-1}$. Soient $P(i,j)$ et $\overset{Y}{P}(i,j)$, $\overset{Y}{U}(i,j)$ et $U(i,j)$ les transitions et les potentiels correspondants. Puisque :

$$P^n(i,j) = \mu^{*n} \{g ; ig = j\} = \overset{Y}{\mu}^n \{g ; jg = i\} = \overset{Y}{P}^n(i,j) \quad \text{on a :}$$

$$U(i,j) = \overset{Y}{U}(i,j) . \quad (4)$$

b) Soient i un état récurrent et C_i la classe de i ; si i conduit à j (i. e. : $U(i,j) > 0$) , alors j est récurrent et appartient à C_i . Ainsi :

$$i \cdot T_\mu \subset C_i .$$

c) Soit i un état récurrent. i alors est $\overset{Y}{\mu}$ -récurrent d'après (4) ; si j conduit à i (i. e. $U(i,j) > 0$) , alors $\overset{Y}{U}(i,j) > 0$ et $i \overset{Y}{\mu}$ - conduit à j . Ainsi j est $\overset{Y}{\mu}$, donc μ -récurrent. Ainsi j conduit à i et j est μ -récurrent, i conduit donc à j , d'où :

$$i T_\mu^{-1} \subset C_i .$$

d) Finalement, μ étant adaptée, on déduit de : $i T_\mu \subset C_i$ et $i T_\mu^{-1} \subset C_i$ que $i \cdot G = M \subset C_i$ et $C_i = M$. Ceci prouve la proposition 5 .

Nous allons achever ce paragraphe en donnant un exemple prouvant que la proposition 4 ne saurait être étendue telle quelle si $T_\mu \neq G$ et prouvant que la proposition 5 ne saurait être étendue telle quelle si G n'est pas discret.

Exemple 1 : Soit G le groupe affine de $\mathbb{R}$. G est l'ensemble $\{(a,b) ; a \neq 0\}$ muni de la loi de multiplication : $(a,b) \cdot (a',b') = (aa', b+ab')$. G opère à gauche sur $M \cong \mathbb{R}$ de façon transitive par la formule : $(a,b) \cdot x = ax + b$. Soit $(X_1, Z_1) , \dots , (X_n, Z_n) , \dots$ une suite de v. a. indépendantes à valeurs dans G et de loi μ . Supposons μ étalée et : $\text{Supp } \mu \subset \left] 0, \frac{1}{2} \right] \times [-1, 1]$. La marche gauche Y_n^x associée est donnée par :

$$Y_n^x = X_n X_{n-1} \dots X_1 \cdot x + X_n X_{n-1} \dots X_2 Z_1 + X_n X_{n-1} \dots X_3 Z_2 + \dots + X_n Z_{n-1} + Z_n.$$

De l'hypothèse faite sur μ , on déduit que :

$$|Y_n^x| \leq |x| \cdot 2^{-n} + 2^{-(n-1)} + \dots 2^{-1} + 1 \quad \text{p. s.}$$

D'où :

$$|Y_n^x| \leq 2 + |x| \cdot 2^{-n} \quad \text{p. s. pour tout } n.$$

Ainsi, pour $x = 0$, on a : $U1_{[-2,2]}^{(0)} = +\infty$,

tandis que si K est un compact tel que $K \cap [-2,2] = \emptyset$,

$$U1_K^{(0)} = 0.$$

II.- Le théorème de dichotomie

Dans tout ce paragraphe, nous ferons les hypothèses suivantes :

H_1 . μ est adaptée et étalée.

Soient Δ_G (resp. Δ_H) la fonction module de G (resp. H) et χ le caractère (i. e. : l'homomorphisme à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$) défini sur H par

$$\chi(h) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}.$$

H_2 . χ se prolonge en caractère continu sur G , noté encore χ .

$$H_3 . C = \int_G \chi(g^{-1}) d\mu(g) \leq 1.$$

Remarques sur les hypothèses H_2 et H_3 :

a) Si H est unimodulaire, H_2 est satisfaite ; en effet, Δ_G^{-1} est un caractère sur G . Si H et G sont unimodulaires, H_2 et H_3 sont satisfaites (on peut prendre $\chi \equiv 1$ sur G). En particulier, lorsque G est compact, ou de Lie connexe de type R , ou discret, H_2 et H_3 sont satisfaites pour tout sous-groupe H fermé de G . Lorsque H est distingué dans G , H_2 et H_3 sont satisfaites, puisque $\Delta_G = \Delta_H$ sur H dans ce cas. Si G est de Lie connexe semi-simple, H satisfait à H_2 si et seulement si H est unimodulaire, H_3 est alors satisfaite : en effet, G admet pour seul caractère le caractère trivial $\chi \equiv 1$, un caractère étant égal à 1 sur le sous-groupe dérivé (G, G) . Un argument analogue montre que

H_2 et H_3 sont satisfaites lorsque H est semi-simple ou compact.

b) L'hypothèse H_2 est équivalente à l'existence d'une mesure m positive sur $M = H/G$, σ -finie et relativement invariante par l'action de G , i. e. telle que $m \cdot g = \chi(g^{-1}) m$ pour tout g de G . En particulier, lorsque $\chi \equiv 1$, m est invariante (cf. [3], p. 59).

Ceci étant, nous allons prouver :

Théorème 1.— Supposons H_1 , H_2 et H_3 réalisées, et désignons par m la mesure σ -finie relativement invariante sur M de facteur χ . Alors pour la marche Y_n^x de loi μ , on a : ou l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- 1) Tout état de M est récurrent.
- 2) La marche Y_n^x est récurrente au sens de Harris par rapport à m (i. e. A borélien de M , $m(A) > 0$ implique $h_A \equiv 1$ et $m(A) = 0$ implique $h_A = 0$) ou l'une de conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
- 3) Tout point de M est transitoire.
- 4) Le potentiel de tout compact est borné.

De plus, si $C = \int_G \chi(g^{-1}) d(g) < 1$, c'est la situation 3-4 qui est réalisée.

Démonstration : Si $f_1, f_2 \in B_+$, on note $\langle f_1, f_2 \rangle_m$ l'intégrale

$\int_M f_1(x) f_2(x) dm(x)$. μ désigne la mesure de probabilité sur G définie par

$$d^\nabla(g) = \frac{(g) d^\vee(g)}{\int_G (G) d^\vee(g)} \quad . \quad \mu \text{ étant étalée, il en est de même de } \nabla_\mu .$$

noterons avec des ∇ les objets relatifs à la marche droite de loi ∇_μ . En particulier, pour $\rho \in \mathbb{R}$, l'opérateur U^ρ est défini par : $U^\rho = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho n} \nabla^n$.

Lemme 3 (dualité).— Pour toute $f_1, f_2 \in B_+$: $\langle Pf_1, f_2 \rangle_m = C \langle f_1, \nabla f_2 \rangle_m$ et $\langle Uf_1, f_2 \rangle_m = \langle f_1, \nabla^{-\log C} f_2 \rangle_m$.

Démonstration du lemme 3 : On a :

$$\begin{aligned} \langle P^n f_1, f_2 \rangle_m &= \int_G \int_M dm(x) f_1(xg) d\mu^{*n}(g) f_2(x) \\ &= \int_G \int_M f_1(y) d\mu^{*n}(g) f_2(yg^{-1}) \chi(g^{-1}) dm(y) \\ &= \int_G \int_M f_1(y) d\mu^{\vee *n}(g) f_2(yg) \chi(g) dm(y) \\ &= \int_G \dots \int_G \int_M f_1(y) f_2(yg_1 \dots g_n) \chi(g_1 \dots g_n) dm(y) d\mu^\vee(g_1) \dots d\mu^\vee(g_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_G \dots \int_G \int_M f_1(y) f_2(yg_1 \dots g_n) (\chi(g_1) d\check{\mu}(g_1)) \dots (\chi(g_n) d\check{\mu}(g_n)) dm(y) \\
 &\quad \text{car } \chi \text{ est un caractère de } G \\
 &= \int_G \int_M f_1(y) f_2(yg) C^n d^{\nabla * n}(g) dm(y) \\
 &= C^n \langle f_1, P^{*n} f_2 \rangle_m,
 \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 3, par sommation sur n .

Comme conséquence de ce lemme 3, traitons tout de suite le cas $C < 1$.

Notons déjà l'équivalence entre 3 et 4, d'après la proposition 2. Supposons $C < 1$. Il est clair que $\int_U \nabla^{-\log C} 1 \leq \frac{1}{1-C}$. Ainsi pour tout compact V de M :

$$\langle U|_V, 1 \rangle_m = \langle 1_V, \int_U \nabla^{-\log C} 1 \rangle_m \leq \frac{m(V)}{1-C}.$$

On en déduit que $U|_V < +\infty$ m.p.s. et donc que $h_V = 0$ m.p.s.

h_V étant continue, on a donc $h_V = 0$ partout.

Lemme 4.— Soit A un borélien de M tel que $Pl_A \leq l_A$ m.p.s. et $Pl_{A^C} \leq l_{A^C}$ m.p.s., alors $m(A) = 0$ ou $m(A^C) = 0$.

Démonstration du lemme 4 :

a) Soit Λ l'ensemble des produits de convolution finis des probabilités μ et $\int \mu$ et soit Θ l'ensemble des éléments de G ayant un voisinage sur lequel un élément de Λ majore un multiple de λ . Il résulte du fait que μ est adaptée et étalée que $G = \bigcup_{\rho \in \Lambda} \text{Supp } \rho$ et que $\Theta \neq \emptyset$. Prouvons que $\Theta = G$. Soit $g \in \Theta$; il existe un ouvert V contenant g , $\tau \in \Lambda$ et $k_7 > 0$ tels que $\tau \geq k_7 l_V \lambda$. Si $h \in G$, $W = \{k; l_V(k^{-1} \cdot hg) > 0\}$ est un ouvert contenant h ; il existe donc un $\rho \in \Lambda$ tel que $\rho(W) > 0$. On a donc :

$\rho * \tau \geq k_7 \rho * (l_V \cdot \lambda) = k_7 (\rho * l_V) \cdot \lambda$. Mais $\rho * l_V$ est s.c.i. et $\rho * l_V(hg) = \int l_V(k^{-1} hg) \rho(dk) > 0$. Par suite, il existe un ouvert U contenant hg et $k_8 > 0$ avec $\rho * \tau \geq k_8 \cdot (l_U \cdot \lambda)$, donc $hg \in \Theta$. Ceci prouve que $\Theta = G$.

b) Remarquons ensuite que la relation $Pl_{A^C} \leq l_{A^C}$ m.p.s. implique :

$$0 = \langle Pl_{A^C}, l_A \rangle_m = \langle l_{A^C}, \int Pl_A \rangle_m \text{ et donc } \int Pl_A \leq l_A \text{ m.p.s.}$$

On a donc $Pl_A \leq l_A$ m. p. s. et $\nabla Pl_A \leq l_A$ m. p. s. P et ∇P étant compatibles avec l'égalité modulo m et Λ étant dénombrable, on déduit de la relation précédente l'existence d'un ensemble $N, m(N) = 0$ tel que, si $x \notin N$:

$$\int l_A(xg) \tau(dg) \leq l_A(x)$$

pour tout $\tau \in \Lambda$. Supposons maintenant $m(A^C) > 0$. Il existe donc un x_0 appartenant à A^C et N^C . On a donc

$$\int l_A(x_0 g) \tau(dg) = 0.$$

Puisque $\sigma = G$, tout $x \in M$ possède un voisinage sur lequel $l_A = 0$ m. p. s. et donc $m(A) = 0$. Ceci prouve le lemme 4.

Notons une autre propriété de P . D'après (3), si $m(A) = 0$, $p_a^n(x, A) = 0$ et donc :

$$(5) \quad \text{si } m(A) = 0 \text{ on a } Ul_A = U_s l_A \leq k_3 \text{ et } h_A = 0.$$

Nous allons maintenant donner deux démonstrations de notre théorème. La seconde repose sur les résultats de [12]. La première est indépendante de ces résultats. Le lecteur remarquera que ces démonstrations restent valables pour un noyau fortement fellérien satisfaisant aux conclusions des lemmes 4 et 5.

Première démonstration : Rappelons que $C = 1$.

Lemme 5.— Soient V un compact de M et $\Gamma = \{y ; Ul_V(y) = +\infty\}$. Alors, pour tout borélien A de M , $A \subset \Gamma$, tel que $m(A) > 0$, $Ul_A = +\infty$ m. p. s. sur A .

Démonstration du lemme 5 : Il n'y a rien à prouver si $m(\Gamma) = 0$. Supposons donc $m(\Gamma) > 0$.

a) Tout compact K' tel que $m(K') > 0$ contient un compact K tel que $m(K) = m(K')$ et tel que : $\forall k \in K, \forall V_k$ voisinage de k , $m(K \cap V_k) > 0$ (appelons un tel compact K m -parfait). En effet, il suffit de prendre $K = \{k \in K' ; \forall V_k \text{ voisinage de } k, m(V_k \cap K') > 0\}$ et de remarquer que $m(K' \setminus K) = 0$ puisqu'on peut recouvrir $K' \setminus K$ par une famille (donc par une famille dénombrable) de V_i telle que $m(V_i \cap K' \setminus K) = 0$.

b) Soit $\Theta_A = \{y \in A ; \nabla Ul_A(y) < +\infty\}$ (avec $A \subset \Gamma$, $m(A) > 0$). Il nous faut

prouver que $m(\Theta_A) = 0$. Supposons $m(\Theta_A) > 0$. D'après a), Θ_A contient un compact K m -parfait tel que $m(K) > 0$. Soient $k \in K$ et V_k un voisinage de k . On a donc : $\infty = \langle U|_V, l_{V_k} \rangle_m = \langle l_V, U|_{K \cap V_k} \rangle_m$ d'après le lemme 3. Ainsi, pour tout n , il existe t dans V tel que $U|_{K \cap V_k}(t) > n$. D'après le principe du maximum, il existe $u \in K \cap V_k$ tel que $\nabla U|_K(u) \geq U|_{K \cap V_k}(u) > n$. Par ailleurs, puisque $\|U_s f\| \leq k_6 \|f\|_\infty$, d'après (1), $\nabla U|_{K \cap V_k}(u) > n - k_6$. La fonction $\nabla U|_{K \cap V_k}$ étant s. c. i., $\{y; U|_{K \cap V_k}(y) > n - k_6\}$ est ouvert. Soit $\pi_n = \{u \in K; \nabla U|_K(u) > n - k_6\}$. D'après ce qui précède, π_n contient un ouvert dense de K . Or $\nabla U|_K$ est infini sur $\bigcap_n \pi_n$, qui est dense dans K d'après le théorème de Baire. Ceci est absurde, car $K \subset \Theta_A \subset A$ et $\nabla U|_A \geq \nabla U|_K$ est fini sur Θ_A . Ceci prouve le lemme 5.

Lemme 6.— Soient V un compact et $\Gamma = \{y; U|_V(y) = +\infty\}$. Pour toute $f \in B_+$ non m p. s. nulle dont le support est dans Γ , il existe une partie B de Γ relativement compacte, avec $m(B) > 0$, telle que pour tout $B' \subset B$ avec $m(B') > 0$, on ait : $\langle Uf, l_{B'} \rangle_m = +\infty$.

Démonstration du lemme 6 : Il n'y a rien à prouver si $m(\Gamma) = 0$. Supposons $m(\Gamma) > 0$. D'après le a) du lemme 5, on peut supposer $f = l_K$ avec $m(K) > 0$ et K m -parfait.

a) Γ^c est absorbant pour la marche Y_n^x de loi μ . En effet, soient $x \in \Gamma^c$ et $T^x = \inf \{n; Y_n^x \in \Gamma\}$. Alors, $U|_V(x) \geq E(U|_V(Y_{T^x}^x))$; $T_x < \infty = +\infty$ si $P\{T^x < \infty\} > 0$. Donc, $P\{T^x < \infty\} = 0$ et Γ^c est absorbant.

b) Ainsi, $\langle U|_\Gamma, l_{\Gamma^c} \rangle_m = 0 = \langle l_\Gamma, U|_{\Gamma^c} \rangle_m$ par dualité. Il existe donc $\Gamma_0 \subset \Gamma$, avec $m(\Gamma_0) = m(\Gamma)$ tel que $\nabla U|_{\Gamma^c} = 0$ sur Γ_0 . Ainsi, de tout point de Γ_0 , la marche ∇Y_n n'atteint pas Γ^c .

c) Soit $x_0 \in \Gamma_0 \cap K$; puisque $\nabla P^n(x, \Gamma) = 1$ sur Γ_0 , il existe n_0 tel que $P_a^{n_0}(x_0, \Gamma) > 0$; désignons alors par B un borélien relativement compact sur lequel une densité de $\nabla P_a^{n_0}(x_0, \cdot)$ par rapport à m soit strictement positive. Si $B' \subset B$ avec $m(B') > 0$, $P_a^{n_0}(x_0, B') = \delta > 0$; mais la continuité de la fonction $\nabla P_a^{n_0}(\cdot, B')$ implique l'existence d'un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que pour tout $x \in V_{x_0}$, $\nabla P_a^{n_0}(x, B') > \delta/2$. Il en résulte que si $x \in V_{x_0}$:

$$\nabla U_{B'}(x) \geq P_a^{\nabla n_0} \nabla U_{B'}(x) \geq \int_{B'} P_a^{\nabla n_0}(x, dy) \nabla U_{B'}(y) = +\infty,$$

d'après le lemme 5 .

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} \langle U_{f, l_{B'}} \rangle_m &= \langle U_{l_K, l_{B'}} \rangle_m = \langle l_K, \nabla U_{B'} \rangle \text{ par dualité} \\ &\geq \langle l_{K \cap V_{x_0}}, \nabla U_{B'} \rangle_m = +\infty, \end{aligned}$$

car $m(K \cap V_{x_0}) > 0$ et $U_{B'}$ est infini sur V_{x_0} . Ceci prouve le lemme 6.

Lemme 7.— Soit V un compact de M tel que $m(\Gamma) = m\{x ; U_V(x) = +\infty\} > 0$. Alors $U_V = +\infty$ partout.

Démonstration du lemme 7 :

a) Soit h une fonction harmonique bornée sur M . Soient $m = \sup_{x \in M} h(x)$ et $f = \{x ; h(x) = m\}$. Si $f \neq \emptyset$, F est un fermé absorbant.

En effet, F est fermé puisque h est continue. Soit $x \in F$; alors pour tout n , $E\{h(Y_n^x)\} = h(x)$ et donc $Y_n^x \in F$ p. s., ce qui prouve que F est absorbant.

b) Soit K un compact de Γ tel que $m(K) > 0$. Écrivons $U_K \wedge n = U g_n + h_n$ ($g_n \geq 0$, $h_n \geq 0$ et harmonique) la décomposition de Riesz de la fonction surharmonique $U_K \wedge n$. Écrivons $g_n = g_n^1 + g_n^2$ avec $g_n^1 = g_n \cdot l_\Gamma$ et $g_n^2 = g_n \cdot l_{\Gamma^c}$. Puisque Γ^c est absorbant pour Y_n^x (point a du lemme 6) et $K \subset \Gamma$, $U_K \wedge n$ est nulle sur Γ^c . Ainsi $h_n = 0$ sur Γ^c et $U g_n^2 = 0$ sur Γ^c et donc partout (principe du maximum). Par ailleurs, $g_n^1 = 0$ m p. s. (en effet, d'après le lemme 6, on aurait sinon : $n \cdot m(B) \geq \langle U g_n^1, l_B \rangle = +\infty$).

Par dualité, la relation $g_n^1 = 0$ m p. s. implique $U g_n^1 = 0$ m p. s. Finalement, $U_K \wedge n = h_n$ m p. s. avec h_n harmonique nulle sur Γ^c . En particulier, $U_K \wedge 1 = h_1$ m p. s. Comme $U_K \geq 1$ sur K , on a : $K \subset \{h_1 = 1\} \subset \Gamma$ m p. s. Or $\{h_1 = 1\}$ est absorbant d'après a). En faisant croître K vers Γ (et une réunion dénombrable de parties absorbantes étant absorbante), on en déduit qu'il existe Γ' avec $m(\Gamma \Delta \Gamma') = 0$ et Γ' absorbante. Comme Γ^c est absorbante, on a donc : $P_{\Gamma} \leq 1$ et $P_{\Gamma^c} \leq 1_{\Gamma^c}$ m p. s. D'après le lemme 4, $m(\Gamma^c) = 0$ (car $m(\Gamma) > 0$) et $U_V = +\infty$ m p. s.

c) Si $U_V = +\infty$ m p. s., alors $U_V = \infty$ partout. En effet, cela résulte immédiatement de l'inégalité $U_V(x) \geq P_a^n U_V(x)$ où n est assez grand pour que $P_a^n(x, M) > 0$. Le lemme 7 est prouvé.

Lemme 8.— Soit V un compact de M tel que $U|_V = +\infty$ partout. Alors pour tout A tel que $m(A) > 0$, $U|_A = +\infty$ partout.

Démonstration du lemme 8 : Ecrivons la décomposition de Riesz :

$U|_A \wedge n = U r_n + h_n$ ($r_n, h_n \geq 0$, h_n harmonique). D'après le lemme 6, r_n est m. p. s. nulle et donc par dualité $U r_n = 0$ m. p. s. Ainsi, $U|_A \wedge n = h_n$ m. p. s. L'ensemble $S_n = \{h_n = n\}$ est absorbant (point a du lemme 7) et donc $\{U|_A = \infty\} = \bigcap_n S_n$ m. p. s. est absorbant (une intersection dénombrable de parties absorbantes est absorbante). Comme $\{U|_A < +\infty\}$ est absorbant (lemme 6, a), on a :

$$P\{U|_A = \infty\} \leq P\{U|_A < \infty\} \text{ m. p. s. et } P\{U|_A < \infty\} \leq P\{U|_A = \infty\} \text{ m. p. s.}$$

et donc, d'après le lemme 4 :

ou $m\{U|_A < \infty\} = 0$ et alors $U|_A = \infty$ m. p. s. et donc $U|_A = \infty$ partout, d'après le point c du lemme 7,

ou $m\{U|_A = \infty\} = 0$; mais alors soit B comme dans le lemme 6. Pour n assez grand, l'ensemble $B' = \{U|_A < n\} \cap B$ est de mesure positive. On aurait alors, d'après le lemme 6 : $n \cdot m(B') \geq U|_B, 1_B, > +\infty$, ce qui est absurde. La dernière alternative n'a donc pas lieu et le lemme 8 est prouvé.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. En fait, il suffit de voir que si un point est récurrent, alors la chaîne est récurrente au sens de Harris. Soit x un point récurrent. Il existe un voisinage V de x tel que $h_V(x) = 1$. h_V étant continue, h_V est strictement positive dans un voisinage de x . Ainsi, $\Gamma = \{y ; U|_V(y) = +\infty\}$ est de mesure positive, d'où $U|_A = \infty$ partout (lemme 7). Soit A tel que $m(A) > 0$. On a donc (lemme 8) $U|_A = \infty$ partout. Ainsi la chaîne Y_n^x est m-irréductible de noyau non propre (cf. [9]). On en déduit que $h_A = 1$ m. p. s. et donc, h_A étant continue, $h_A = 1$ partout. Notre théorème est prouvé.

Deuxième démonstration ($C = 1$) : Cette démonstration s'appuie sur les résultats de [12], corollaire 2. Sous l'hypothèse (5) ($m(A) = 0$ implique $h_A = 0$), il est prouvé dans [12] que l'on a :

$$M = I \cup J \text{ avec}$$

a) $J = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k$, J_k étant absorbant et récurrent au sens de Harris par rapport à une mesure ν_k pour tout k .

b) $I = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$ avec $h_{I_k} \equiv 0$ pour tout k .

Lemme 9.— Soit A une borélien de M tel que $0 < m(A) < +\infty$. Si $h_A = 1$ sur A m p. s., alors $\bigvee h_A = 1$ m p. s. sur A .

Démonstration du lemme 9 : On désigne par π_A le noyau de la chaîne induite par Y_n^x sur A (cf. [9]), i. e. : $\pi_A = 1_A P(\sum_{k=0}^{\infty} (1_A c^k P)^n 1_A$.

Du lemme 3, on déduit que pour $f_1, f_2 \in B_+$, $\langle \pi_A f_1, f_2 \rangle_m = \langle f_1, \bigvee \pi_A f_2 \rangle_m$.

Sous l'hypothèse du lemme 9, on a donc : $m(A) = \langle \pi_A 1, 1 \rangle_m = \langle 1, \bigvee \pi_A 1 \rangle_m$.
D'où : $\bigvee \pi_A 1 = 1$ m p. s. sur A , ce qui prouve le lemme 9.

Lemme 10.— Soit ν_k l'unique mesure σ -finie invariante par P sur J_k . Alors :

- 1) ν_k est une mesure de Radon.
- 2) $\nu_k \ll m$ et il existe $D_k \subset J_k$ tel que ν_k soit équivalente à m sur J_k .

Démonstration du lemme 10 :

a) Puisque ν_k est σ -finie, $J_k = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_k^i$ avec $\nu_k(E_k^i) < +\infty$. Soit $x \in J_k$. Il existe un d et un i tels que $P_a^d 1_{E_k^i}(x) > 0$. Par suite, il existe un voisinage U de x et une constante k_9 tels que :

$$+\infty > \nu_k(E_k^i) \geq \int \nu_k(dy) P_a^d 1_{E_k^i}(y) \geq k_9 \nu_k(U), \text{ ce qui prouve le point 1.}$$

b) Soit $A \subset J_k$ tel que $m(A) = 0$. D'après (5), $h_A = 0$ et donc $\nu_k(A) = 0$, ce qui prouve que $\nu_k \ll m$. Il suffit alors de prendre $D_k = \{f_k > 0\}$, où f_k est une densité de ν_k par rapport à m .

Lemme 11.— Soit $K = \{x ; P 1_J(x) > 0\}$. Si $m(K) > 0$, il existe k_0 et n_0 tels que : $0 < \langle P_a^{n_0} 1_{D_{k_0}}, 1_K \rangle = \langle 1_{D_{k_0}}, P_a^{n_0} 1_K \rangle$.

Démonstration du lemme 11 : Soit $x \in K$. Il existe un indice $k(x)$ tel que $P_{J_{k(x)}}(x) > 0$. Cette relation implique successivement $h_{J_{k(x)}}(x) > 0$ et $h_{D_{k(x)}}(x) > 0$ (car $h_{J_k} \searrow_{D_k} = 0$), $U 1_{D_{k(x)}}(x) = +\infty$ et $U_a 1_{D_{k(x)}}(x) = +\infty$ d'après (1). Il existe donc finalement un indice $n(x)$ tel que $P_a^{n(x)} 1_{D_{k(x)}}(x) > 0$.

Si maintenant $m(K) > 0$, il existe deux indices k_0 et n_0 tels que :

$m \{x \in K ; P_a^{n_0} 1_{D_{K_0}}(x) > 0\} > 0$. Ceci prouve le lemme 11.

Lemme 12.— On pose $J^0 = \{x ; P_J 1(x) = 0\}$. Alors $J \cap J^0 : \emptyset$ et $M = J \cup J^0$ m p.s.

Démonstration du lemme 12 :

Le premier point est clair. Ecrivons $M = J \cup K \cup J^0$ et supposons $m(K) > 0$. Le lemme 11 prouve qu'il existe n et k et $D'_k \subset D_k$ avec $0 < m(D'_k) < +\infty$ et $P_a^{n_0} 1_{D'_k} > 0$ sur D'_k . On a alors d'après le lemme 10, 2, $v_k(D'_k) > 0$ et donc $h_{D'_k} = 1$ sur D'_k ; d'après le lemme 9, il existe D''_k , $D''_k \subset D'_k$ avec $m(D''_k) = m(D'_k)$ tel que $h_{D''_k} = 1$ sur D''_k . Soit $x \in D''_k$. On a

$$1 = h_{D''_k}(x) = P^{n_0} h_{D''_k}(x) \leq \int P^{n_0}(x, dy) P_{D''_k} 1(y) \leq 1 .$$

D'où :

$$\int P^{n_0}(x, dy) (1 - P_{D''_k} 1(y)) = 0 \text{ et donc } \int_K P^{n_0}(x, dy) (1 - P_{D''_k} 1(y)) = 0 .$$

Ainsi, il existe $K' \subset K$ avec $m(K') > 0$ tel que :

pour $y \in K'$, $P_{D''_k} 1(y) = 1$. D'où : $\langle 1_{K'}, \bigcup_{D''_k} 1_{D''_k} \rangle_m > 0$.

Par dualité , on en déduit que $\langle \bigcup_{D''_k} 1_{D''_k}, 1_{D''_k} \rangle_m > 0$, ce qui est absurde car $K' \subset J^C$ et $D''_k \subset J_k$ avec J_k absorbant. Ainsi $m(K) = 0$ et le lemme 12 est prouvé.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Du lemme 12, J et J^0 étant absorbants, on déduit que $P|_J \leq 1_J$ m p. s. et $P|_{J^C} \leq 1_{J^C}$ m p. s. D'après le lemme 4, ou $m(J) = 0$, ou $m(J^C) = 0$.

Si $m(J^C) = 0$, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$. Appliquant une nouvelle fois le lemme 4, on déduit que les J_k sont tous vides, sauf un. Ainsi $M = J_1$ m p. s. L'unicité de la mesure invariante prouve alors que $m = v_1$. Si $m(A) > 0$, alors $v_1(A) > 0$ et donc $h_A = 1$ p. s. h_A étant continue, $h_A = 1$ partout.

Si $m(J) = 0$, alors J est vide car $h_J = 0$ d'après (5). Ainsi, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ avec $h_{J_k} = 0$. Notre théorème est alors une conséquence du lemme 2 et ceci achève la

deuxième démonstration.

Comme corollaire du théorème 1, nous pouvons énoncer

Théorème 2.— Soit $M = H \setminus G$ un espace homogène possédant une mesure invariante m . Alors, pour toute marche aléatoire Y_n sur M de loi μ adaptée et étalée, la conclusion du théorème 1 est vraie.

Nous allons maintenant tirer quelques conséquences de notre théorème. Outre les hypothèses H_1, H_2, H_3 , nous supposerons, sans le repréciser, que $\bar{\nu}_\mu = \bar{\nu}$, i. e. $\chi \equiv 1$, ou encore que m est invariante. Cette hypothèse est satisfaite, en particulier si G et H sont unimodulaires. On a alors $C = 1$.

Définition.— Dans la situation 1-2, la chaîne Y_n^x est dite récurrente. Elle est dite transitoire dans la situation 3-4.

Corollaire 1.— La chaîne Y_n^x de loi μ sur $H \setminus G$ est récurrente si et seulement si la chaîne $\bar{Y}_n^x$ de loi $\bar{\nu}$ sur $H \setminus G$ l'est.

Démonstration du corollaire 1 : Supposons Y_n^x transitoire. Soit A un borélien tel que $0 < m(A) < +\infty$, la relation $+\infty < U1_A, 1_A > = < 1_A, \bar{U}1_A >$ montre que $\bar{U}1_A$ est fini m. p. s. sur A et le théorème 1 permet de conclure que Y_n^x est transitoire.

Notons M' l'espace quotient à gauche de G par H ($M' = G/H$, ensemble des classes gH ; G opère à gauche sur M'). A la mesure de probabilité μ sur G correspond la marche gauche $X_n \dots X_1 g = Z_n^{g'}$ sur G et la chaîne gauche $Y_n^{x'}$ sur M' ($Y_n^{x'} = \pi'(Z_n^{g'})$ avec $\pi'(g) = x$ et où π' est l'application canonique de G dans M'). Les objets relatifs à cette marche gauche seront notés avec des primes.

Corollaire 2.— La chaîne droite Y_n^x de loi μ sur $H \setminus G$ est récurrente si et seulement si la chaîne gauche $\bar{Y}_n^{x'}$ de loi $\bar{\nu}$ sur G/H est récurrente.

Démonstration : Supposons Y_n^x récurrente. Alors il existe une partie compacte A symétrique de G telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(H A) = +\infty$, d'où $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\nu}^{*n}(A H) = +\infty$. Ainsi $U'(\pi'(e), \pi'(A)) = +\infty$, ce qui prouve le corollaire.

Corollaire 3.— La marche Y_n^x de loi μ sur $H \setminus G$ est récurrente si et seulement si la marche gauche $Y_n^{x'}$ de loi μ sur G/H est récurrente.

Démonstration : Cela résulte immédiatement des corollaires 2 et 1.

Définition. - L'espace $H \setminus G$ (resp. G/H) est dit transitoire si toute marche droite (resp. gauche) de loi μ adaptée et étalée est transitoire. Il est dit récurrent sinon.

Remarque : Derriennic et Guivarc'h ont montré que si l'espace homogène $H \setminus G$ est non moyennable (cf. [5]) et s'il porte une mesure invariante, alors il est transitoire (cf. [4]).

Corollaire 4. - $H \setminus G$ est récurrent (resp. transitoire) si et seulement si G/H est récurrent (resp. transitoire).

Corollaire 5. - Les relations : 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(V \cap H) = +\infty$ pour un ouvert V relativement compact ; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(V \cap H) = +\infty$ pour tout ouvert relativement compact V ; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(H \cap V) = +\infty$ pour un ouvert V relativement compact ; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(H \cap V) = +\infty$ pour tout compact ouvert relativement compact, sont équivalentes.

Démonstration : Cela résulte du corollaire.

Corollaire 6. - Les relations suivantes sont équivalentes.

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(H \cap V) = +\infty$ pour tout V ouvert relativement compact de G .
- 2) Pour tout g de G , $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(g^{-1}Hg \cap V) = +\infty$.
- 3) Pour tout g de G , $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(V \cap g^{-1}Hg) = +\infty$.

Démonstration : L'équivalence de 2 et 3 résulte du corollaire précédent. Prouvons que 1 implique 2. Soit π_1 (resp. π_2) l'application canonique de G dans $H \setminus G$ (resp. dans $g^{-1}Hg \setminus G$). Un calcul simple prouve que $\pi_1(g)$ est récurrent pour la marche Y_n^x de loi μ sur $H \setminus G$ si et seulement si $\pi_2(e)$ est récurrent pour la marche droite Y_n^x de loi μ sur $g^{-1}Hg \setminus G$. Mais $\pi_1(g)$ est récurrent si et seulement si $\pi_1(e)$ l'est. Ainsi $\pi_1(e)$ et $\pi_2(e)$ sont récurrents en même temps. Le corollaire en découle sans peine.

Nous allons maintenant, lorsque $\chi \neq 1$, établir une version plus forte de notre théorème. Nous ferons l'hypothèse

$$H_4 : \int_G \text{Log } \chi(g^{-1}) d\mu(g) < 0.$$

Remarquons que lorsque $\chi \neq 1$ sur G_0 , composante connexe de G , H_3 implique H_4 . En effet, par convexité, on a :

$$\exp \int_G \text{Log } \chi(g^{-1}) \, d\mu(g) < \int_G \chi(g^{-1}) \, d\mu(g) = C \leq 1$$

d'où $\int_G \text{Log } \chi(g^{-1}) \, d\mu(g) < 0$. L'inégalité précédente est stricte, car sinon, on aurait : $\chi(g^{-1}) = k_{10}(n) \mu^{*n}$ p. s. Prenant n assez grand, χ serait constant sur un ouvert et donc sur un voisinage ouvert de l'élément neutre et enfin sur G_0 ; ainsi on aurait $\chi \equiv 1$ sur G_0 , ce qui n'est pas.

Nous allons prouver

Théorème 3.— Supposons H_1 , H_2 et H_4 . Alors la marche de loi μ Y_n^x sur M est transitoire et le potentiel de tout compact est borné.

Démonstration :

a) Soient $\varepsilon < 0$ et $A_\varepsilon = \{g ; \text{Log } \chi(g^{-1}) < \varepsilon\}$. Remarquons que $N_{A_\varepsilon} = +\infty$ d'après la loi des grands nombres et donc $N_a^1 A_\varepsilon = +\infty$ d'après (1). Ainsi, $S_\mu \cap A_\varepsilon \neq \emptyset$ et il existe donc un n_0 tel que $\mu_a^{*n_0}(A_\varepsilon) > 0$.

b) Pour démontrer que la marche de loi μ est de potentiel borné, il suffit de prouver la même chose pour la marche de loi μ^{*n_0} (cf. proposition 2). Aussi, dans ce qui suit, supposons nous que $\mu_a(A_\varepsilon) > 0$.

c) Soit $T_n = \sum_{i=0}^n \text{Log } \chi(X_i^{-1})$ (où les X_i sont de loi μ indépendantes sur G). T_n est une marche aléatoire sur $\mathbb{R}$. Soient $\varepsilon < 0$ et $\Gamma_\varepsilon = \inf \{n ; T_n < \varepsilon\}$. D'après [11], on sait que $E(\Gamma_\varepsilon) < +\infty$ puisque $E\{\text{Log } \chi(X_1^{-1})\} < 0$ d'après H_4 .

Soient Γ_ε^n les itérés du temps d'arrêt Γ_ε (i. e. : $\Gamma_\varepsilon^1 = \Gamma_\varepsilon$, $\Gamma_\varepsilon^{n+1} = \Gamma_\varepsilon^n + \Gamma_\varepsilon \circ \theta_{\Gamma_\varepsilon^n}$). A la marche Z_n^g de loi μ sur G , faisons correspondre la marche $Z_n^g = Z_{\Gamma_\varepsilon^n}^g$.

Soit μ_ε la loi de cette nouvelle marche. D'après a) et b), il est clair que μ_ε est étalée. De plus : $C = \int \chi(g^{-1}) \, d\mu(g) < 1$ (car $\text{Log } \chi(g^{-1}) \leq \varepsilon < 0$ μ p. s.).

Ainsi la marche Y_n^x de loi μ sur M est transitoire et de potentiel borné d'après le théorème 1. Soit U^ε l'opérateur défini par

$U^\varepsilon f(x) = E \left\{ \sum_{n=0}^{\Gamma_\varepsilon} f(Y_n^x) \right\}$. Puisque $E(\Gamma_\varepsilon) < +\infty$, il est clair qu'il existe une constante k_{11} telle que $|U^\varepsilon f(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot k_{11}$. Soit U le noyau potentiel de la marche Y_n^x . De la relation évidente $U f(x) = U^\varepsilon (U f)(x)$, on déduit alors

que $U f$ est borné pour toute f à support compact et cela prouve le théorème 3.

Montrons maintenant, sur un exemple, que la condition H_4 , lorsque $\chi \neq 1$, est presque la meilleure possible.

Exemple 2.— G est encore le groupe affine de $\mathbb{R}$. Ici, le caractère χ est donné par $\chi(a,b) = a$ et la condition H_4 s'écrit $\int \log a \, d\mu(a,b) > 0$. Soit μ étalée sur G telle que : $\text{supp } \mu \subset \{(a,b) ; b \geq 0\}$, $\int \log a \, d\mu(a,b) < 0$ et $\int |b| d\mu(a,b) < \infty$. Il est montré dans [7] que l'hypothèse $\int |b| d\mu(a,b) < +\infty$ peut être remplacée par l'hypothèse plus faible $\int_G \log \sup(b, 1) \, d\mu(a,b) < \infty$. On a, avec les notations de l'exemple 1, $Y_n^x = X_n X_{n-1} \dots X_1 x + \dots + X_n Z_{n-1} + Z_n$. Définissons :

$$L_n^x = (X_1, Z_1) \dots (X_n, Z_n) \cdot x = X_1 \dots X_n x + \dots + X_1 Z_2 + Z_1$$

(L_n^x est obtenu comme Y_n^x , mais en faisant les produits dans l'autre sens. L_n^x n'est pas une chaîne de Markov, mais a même loi que Y_n^x). De la relation $\int \log a \, d\mu(a,b) < 0$ et $\int |b| \, d\mu(a,b) < \infty$, on déduit, d'après la loi des grands nombres, qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $X_1 \dots X_n \leq e^{-\alpha n}$ p. s. pour n assez grand et $|Z_n| < n$ p. s. pour n assez grand. On en déduit facilement que L_n^x est une suite de Cauchy et donc $L_n^x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L^x$ p. s. Par ailleurs, vue la forme de L_n^x , L^x ne dépend pas de x . Ecrivons $L^x = L$ et soit ν la loi de L . D'autre part, de l'hypothèse : $\text{supp } \mu \subset \{(a,b) ; b \geq 0\}$, on déduit sans peine que $\mathbb{R}_+$ est absorbant pour Y_n^x . Ainsi : $\text{supp } \nu \subset \mathbb{R}_+$. Si maintenant f est continue à support compact, on a :

$$P^n f(x) = E \{f(Y_n^x)\} = E \{f(L_n^x)\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu(f) .$$

Si $\nu(f) > 0$, on a donc, $U f(x) = +\infty$ pour tout x . Par contre, si K est un compact de $\mathbb{R}_-^*$ et si $x \in \mathbb{R}_+$, puisque $\mathbb{R}_+$ est absorbant, $U|_K(x) = 0$.

III.- Une réciproque

Nous allons maintenant présenter une réciproque du théorème 1.

Un espace homogène M est dit dichotomique si pour toute mesure étalée et adaptée sur G , les conclusions du théorème 1 sont vraies pour la marche de loi μ sur M (la récurrence au sens de Harris étant étendue par rapport à une mesure γ quasi-invariante, c'est-à-dire telle que $\gamma \cdot g$ est équivalente à γ pour tout g

de G ; une telle mesure existe toujours). Nous allons prouver :

Théorème 4.— Soit G de Lie connexe et H un sous-groupe fermé de G . Supposons que :

- a) H est moyennable
- b) $H \setminus G$ est compact et dichotomique.

Alors, il existe sur $H \setminus G = M$ une mesure positive invariante (de masse finie).

Lemme 12.— (cf. [2], p. 67). Soit G de Lie semi simple non compact de centre fini. Soit $G = N A M \tilde{N}$ une décomposition de Bruhat de G (avec les notations classiques, M étant le centralisateur de A dans K) et $X = NAM \setminus G$ la frontière maximale de G . Alors, il existe une mesure μ sur G étalée et une mesure ν sur X μ invariante (c'est-à-dire, telle que $\nu * \mu = \nu$) et dont le support est strictement plus petit que X .

Démonstration du lemme 12 :

1°) Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de Lie de A et $H \in \mathcal{A}$ tel que $\alpha(H) < 0$ pour toute racine $\alpha \in \Delta$ (l'ordre mis sur les racines est celui qui a permis de déterminer N). Soit $a = \exp H$ et $c = \sup_{\alpha \in \Delta} \alpha(H)$; il est clair que $c < 0$ et qu'il existe une mesure sur $\tilde{\mathcal{N}}$ (l'algèbre de Lie de $\tilde{N}$) telle que :

$$\| \text{Ad } a \cdot Z \| \leq e^c \| Z \| \quad \text{pour tout } Z \in \tilde{\mathcal{N}}.$$

Soit V une boule ouverte (pour cette norme) de $\tilde{\mathcal{N}}$ et de centre 0 , et $\bar{V}$ son adhérence. Puisque $c < 0$, on a : $\text{Ad } a \bar{V} \subset V$, d'où :

$$a(\exp \bar{V}) a^{-1} = \exp (\text{Ad } a \bar{V}) \subset \exp V.$$

Soit $E = x \cdot (\exp \bar{V}) \cdot M$ (x étant l'image de NAM dans l'application canonique de G sur $NAM \setminus G$). E est compact. Si $m \in M$, on a :

$$E \cdot m \cdot a = x \cdot (\exp \bar{V}) M \cdot m \cdot a = x (a^{-1} \exp \bar{V}) \cdot M$$

(car M centralise a , et $x \cdot a^{-1} = x$). D'où :

$$E \cdot m \cdot a \subset x(\exp V) M \quad (\forall m \in M).$$

Or, $E' = x(\exp V) M$ est ouvert dans X . Par un argument de compacité il existe un ouvert U , voisinage de e dans G , tel que :

$E \cdot m \text{ a } U \subset E'$ et donc :

$E \cdot M \cdot a \cdot U \subset E$.

Soit $T = \{g \in G ; E \cdot g \subset E'\}$. Il est clair que T est un semi-groupe fermé de G qui d'après la relation précédente contient un ouvert de G . Il existe donc une mesure étalée μ sur G telle que $T_\mu \subset T$ et telle que $E \cdot T_\mu \subset E$.

2°) L'application qui a $n \in \tilde{N}$ fait correspondre $x \cdot n \in X$ est un homéomorphisme de $\tilde{N}$ sur un ouvert dense de X . Il est donc possible de choisir V assez petit pour que $E = x \cdot (\exp \bar{V}) \cdot M$ soit un compact dont le complémentaire dans X soit un ouvert non vide (en effet, sinon, pour tout y de X , on aurait : $y = x(\exp v_n)m_n$ avec $v_n \in \bar{V}_n$; faisant tendre n vers l'infini et $\bar{V}_n \downarrow 0$, on aurait : $y = x \cdot m$ pour un m et donc X serait réduit à un point, ce qui est absurde, G n'étant pas compact).

Soit γ une mesure de probabilité portée par E et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \gamma * \mu^p$. Un argument classique prouve que la suite v_n possède un point adhérent v (en topologie vague) satisfaisant à : $v * \mu = v$. Or, de la relation $E \cdot T_\mu \subset E$, on déduit que $\text{supp } v_n \subset E$ pour tout n , et donc $\text{supp } v \subset E$.

Lemme 13.— Soit $M = H \setminus G$ et X un G espace à droite ; soit λ une mesure sur X , H invariante (c'est-à-dire telle que $\lambda * \varepsilon_h = \lambda$, $\forall h \in H$) . Soit m une mesure sur $H \setminus G$ et $\tilde{m}$ une mesure sur G telle que $\pi(\tilde{m}) = m$ (π : l'application canonique de G sur $H \setminus G$) . Alors :

1°) La formule $\lambda * m = (\text{par définition}) \lambda * \tilde{m}$ définit une mesure sur X (c'est-à-dire : $\lambda * \tilde{m}$ ne dépend pas du relèvement $\tilde{m}$ choisi).

2°) Soit μ une probabilité sur G ; si m est μ -invariant c'est-à-dire : $m * \mu = m$) alors, $\lambda * m$ est μ -invariante.

La démonstration de ce lemme est une simple vérification (cf. [13]).

Démonstration du lemme 4 :

1°) Soit $G = R \cdot S$ une décomposition de Lévi de G (R son radical résoluble, S semi-simple). Nous ne ferons la démonstration que si le centre de S est fini. Nous allons prouver que G est moyennable. Si S est compact, c'est clair (G serait extension compacte de son radical résoluble). Supposons donc S compact et prouvons que nous arrivons à une absurdité. Soit donc S non compact et $X = \text{NAM} \setminus S$ la frontière maximale de G l'action de R sur X étant triviale). Soit μ une mesure sur X comme au lemme 12. Notons encore μ une mesure sur G

dont l'image par : $G \rightarrow R \setminus G \simeq S$ est μ . D'après le lemme 12, il existe sur X une mesure ν telle que $\nu * \mu = \nu$ et $\text{supp } \nu \neq X$.

2°) G opérant sur X , H opère sur X . H étant moyennable, il existe une mesure λ sur X invariante ; par ailleurs, la marche de loi μ sur $H \setminus G$ étant récurrente au sens de Harris par rapport à une mesure quasi-invariante (puisque $H \setminus G$ est dichotomique et compact), il existe sur $H \setminus G$ une mesure invariante par $\mu(m = m * \mu)$ (cf. [9]). On en déduit (lemme 13) que $\nu' = \lambda * \tilde{m}$ est une mesure sur X μ invariante. Or, il n'existe sur la frontière maximale X qu'une seule mesure μ invariante (cf. [13]). Ainsi, $\nu' = \nu$. Or :

- le support de ν est différent de X
- le support de m sur $H \setminus G$ est tout $H \setminus G$ (car la chaîne de loi μ est récurrente). On peut relever m en une mesure $\tilde{m}$ dont le support est G tout entier. Ainsi le support de $\nu' = \lambda * \tilde{m}$ est X tout entier.

3°) Puisque G est moyennable, l'action de G sur les mesures de probabilité de l'espace compact $H \setminus G$ possède un point fixe, et le théorème 4 est prouvé.

Bibliographie.-

- [1] BREIMAN L., Probability, reading, Mass. Addison Wesley, 1968.
- [2] AZENCOTT R., Espaces de Poisson des groupes localement compacts, L. N. 148, Springer Verlag 1970.
- [3] BOURBAKI N., Livre VI, Intégration, chapitre VII, Hermann.
- [4] DERRIENNIC Y., GUIVARC'H Y., th. de renouvellement pour les groupes non moyennables, C.R.A.S., Tome 277, Oct. 1973.
- [5] EYMARD P., Moyennes invariantes et représentations unitaires, L. N. 300, Springer Verlag 1972.
- [6] HENNION H., Marches aléatoires des espaces homogènes des groupes nilpotents à génération finie, Zeit. für Wahr. 34, p. 245-267, 1976.
- [7] GRINTSEVICHYUS A. K., Th. of Proba., 1974, Vol. XIX, n° 1, p. 163-168.
- [8] LOYNES R. M., Products of independent random elements in a topological group, Zeit für Wahr. 1 (1963), 446-455.
- [9] REVUZ D., Markov chains, North Holland 1975.
- [10] SCHOTT R., Marches aléatoires sur un espace homogène de groupe nilpotent simplement connexe, (Thèse de 3ème Cycle, Nancy), 1976.

- [11] SPITZER R., Principes des cheminement aléatoires, C.I.R.O. Dunod 1970.
- [12] WINKLER W., Doeblin's and Harris' theory of Markov process, Zeit. für Wahr.
31, 1975, p. 79-88.
- [13] FURSTENBERG H., "A Poisson formula for semi-simple Lie group", Ann. Math.
(2) 77 (1963), p. 335-386.

Summary.-

The general result on recurrence and transience of points for Markov chains on a discrete state space extends to the case of a spread-out random walk on a homogeneous space ; if the homogeneous space has an invariant measure all the points are simultaneously recurrent or transient.

In the last part we prove the following theorem :

If G is a connected Lie group, H a closed subgroup of G .

Suppose that :

- a) H is amenable
- b) $H \setminus G$ is compact and all its points are simultaneously recurrent or transient.

Then $G \setminus H$ has a finite positive invariant measure.

H. HENNION
Département de Mathématiques et
Informatique
UNIVERSITE DE RENNES
35031 RENNES CEDEX

B. ROYNETTE
U.E.R. Sciences Mathématiques
UNIVERSITE DE NANCY I
54037 NANCY CEDEX