YVES GUIVARC'H

Théorèmes quotients pour les marches aléatoires

Astérisque, tome 74 (1980), p. 15-28
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__15_0>

THÉORÈMES QUOTIENTS POUR LES MARCHES ALÉATOIRES

Y. GUIVARC'H

Soit p une mesure de probabilité sur un groupe localement compact séparable G. On se propose d'étudier le comportement, au sens vague, de la suite de mesures de Radon $\frac{p^n}{p^n(\phi)}$ où ϕ est une fonction positive à support compact fixée. On peut montrer la convergence vers une mesure limite dans les cas où la représentation intégrale des fonctions propres de l'opérateur de convolution par p est connue. On traite en particulier le cas des groupes semi-simples [6] et le cas de certains groupes de type rigide ([4] , [13]) .

Dans le cas où $G = \mathbb{R}^d$, ce type de résultat s'appelle classiquement théorème quotient [15] et est une forme affaiblie des théorèmes locaux donnant un équivalent simple de $p^n(\phi)$.

Dans le cas G compact, ce type de résultat est très proche du théorème d'équirépartition de H. Weyl et peut s'obtenir par les mêmes méthodes [8] .

Dans le cas non commutatif des problèmes de ce type apparaissent en [1] en relation avec les propriétés ergodiques des solutions d'équations différentielles à "temps" complexe. Divers cas particuliers ont été examinés par différents auteurs ([2] , [3] , [7] , [19] , [11] , [12] , [14]) , souvent dans le but d'obtenir un équivalent de $p^n(\Phi)$. La méthode suivie ici est celle de [12] ; elle s'applique partiellement aux chaînes de Markov et les premiers résultats seront formulés dans ce cadre.

Soit E un espace métrique localement compact qui est réunion dénombrable de compacts sur lequel on désignera par $C_K^+(E)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact positives. Soit P une probabilité de transition sur E telle que, pour toute ϕ de $C_K^+(E)$, $P(x,\phi)$ appartienne aussi à $C_K^+(E)$. On se propose d'étudier la suite $P^n(x,\phi)$ $[\phi \in C_K^+(E)]$ et on sera amené à imposer à P diverses hypothèses d'irréductibilité qui seront vérifiées naturellement si E est discret ou si P définit une marche aléatoire sur un groupe G .

I₀) Pour tous ψ et ϕ de $C_K^+(E)$, il existe des réels α_k en nombre fini tels que

$$\psi \leqslant \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_k P^k\phi \quad .$$

I) Pour tout compact C de E et toute ϕ de $C_K^+(E)$, il existe des réels α_k , en nombre fini tels que l'on ait, pour tout n et tous x , y de C

$$P^n\ \phi(x) \leqslant \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_k\ P^{n+k}\ \phi(y) \quad .$$

I') L'énoncé est celui de I à la différence près que $r = 1$.

On peut remarquer que la condition I implique la condition $I_\circ$ et lui est équivalente si E est discret.

II) Il existe un réel α $(0 < \alpha < 1)$ et une probabilité de transition Q tels que $P^2 = \alpha P + (1 - \alpha)Q$.

Cette condition, de nature différente de $I_\circ$, I, I' implique, jointe à I , la condition I' car P étant dominé par P^2 , les P^{n+k} $(1 \leqslant k \leqslant r)$ de I sont dominés par P^{n+r+1} ce qui fournit I' .

Le théorème très simple suivant comporte diverses conditions que l'on vérifiera ensuite et donne le plan de l'étude ultérieure.

<u>Théorème 1</u>.- Supposons que le noyau P vérifie $I_\circ$ et que $\dfrac{P^{n+1}(x,\phi)}{P^n(x,\phi)}$ converge, pour x E et $\phi \in C_K^+(E)$, vers un nombre c_0 indépendant de x et ϕ . Si l'équation $P_\mu = c_0\mu$ où μ est une mesure de Radon positive a une solution unique, à un coefficient près, notée μ_0 , on a, pour tous x de E , ϕ et ψ de $C_K^+(E)$: $\lim\limits_n \dfrac{P^n(x,\phi)}{P^n(x,\psi)} = \dfrac{\mu_0(\phi)}{\mu_0(\psi)}$.

<u>Preuve</u> : Montrons la relative compacité de la suite de mesures de Radon $\mu_n = \dfrac{P^n(x,\cdot)}{P^n(x,\psi)}$ où x et ψ sont fixés : d'après $I_\circ$, il existe des α_k avec

$$\phi \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k\ P^k\ \psi$$

et donc
$$P^n\phi \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k\ P^{n+k}\ \psi \quad .$$

La condition de convergence de $\dfrac{P^{n+1}(x,\psi)}{P^n(x,\psi)}$ implique que pour n assez grand $P^{n+k}\ \psi(x) \leqslant 2\ c_0\ P^n\ \psi(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ et donc

$$P^n(x,\phi) \leqslant 2\ c_0\ \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k\right) P^n(x,\psi) \quad .$$

On a de plus :

$\forall\ \phi \in C_K^+(E)\quad P\mu_n(\phi) = c_n\ \mu_n(\phi)$ où $c_n = \dfrac{P^{n+1}(x,\phi)}{P^n(x,\phi)}$ et donc si μ est une valeur d'adhérence de la suite μ_n :

$$P\mu(\phi) = c\,\mu\,(\phi)\quad ,\quad P\mu = c\mu\quad .$$

Comme de plus $\mu_n(\psi) = 1$, on a aussi $\mu(\psi) = 1$, ce qui, grâce à l'hypothèse d'unicité de μ fournit $\mu = \dfrac{\mu_0}{\mu_0(\psi)}$.

La suite μ_n ayant pour unique valeur d'adhérence $\dfrac{\mu_o}{\mu_o(\psi)}$ converge vers cette mesure.

Remarque : Si la mesure $\sum\limits_0^\infty P^n(x,\cdot)$ est de Radon, on peut s'intéresser également à la convergence vague de la suite de mesures.

$$\pi_n = \frac{\sum\limits_n^\infty P^k(x,\cdot)}{\sum\limits_n^\infty P^k(x,\phi)}$$

où ϕ est un élément fixé de $C_K^+(E)$.

Le raisonnement précédent montre que pour les hypothèses du théorème 1 ou de son corollaire on a la convergence de π_n vers $\dfrac{1}{\mu_0(\phi)}\ \mu_0$.

Pour une mesure de Radon α à support compact et un élément ϕ de $C_K^+(E)$ on pose $\rho_\alpha\ (\phi) = \overline{\lim_n}\ [\alpha(P^n\phi)]^{1/n}$.

On définit une relation de préordre $\prec$ sur les mesures de Radon par $\alpha \prec \beta \iff$ pour toute ϕ de $C_K^+(E)$, il existe des réels positifs c_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ tels que, pour tout entier n on ait

$$\alpha(P^n\phi) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{k=r} c_k\ P^k\beta\right)(P^n\phi)$$

on a alors les propositions :

Proposition 1.- Supposons vérifiée la condition I$_\circ$ et notons H_c le cône des mesures de Radon positives μ vérifiant $P\mu \leqslant c\mu$. Alors H_c est à base compacte, le nombre $\rho_\alpha\ (\phi)$ est indépendant de ϕ et $c_o = \inf\limits_\alpha \rho_\alpha = \operatorname{Inf}\ \{c\ ;\ H_c \neq \{0\}\ \}$. De plus, il existe une mesure de Radon positive μ_o vérifiant $P\mu_o = c_o\ \mu_o$. Enfin si $\alpha < \beta$ on a $\rho_\alpha \leqslant \rho_\beta$.

Preuve : Soit $\psi \in C_K^+(E)$ $(\psi \neq 0)$ et montrons que $\mu(\psi) > 0$ si $\mu \in H_c$ $(\mu \neq 0)$. La condition I_o fournit pour $\phi \in C_K^+(E)$ $\phi \leqslant \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_k P^k \psi$

$$\mu(\phi) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k P^k \mu(\psi) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k c^k\right) \mu(\psi) \quad .$$

La condition $\mu(\psi) = 0$ entraîne donc $\mu(\phi) = 0$ pour tout ϕ de $C_K^+(E)$. Si $\mu \neq 0$, elle n'est donc pas vérifiée. Le même calcul montre la compacité au sens vague de l'ensemble des μ de H_c vérifiant $\mu(\psi) = 1$. On a aussi

$$P^n \phi \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k P^{k+n}\psi$$

$$\alpha(P^n\phi) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \alpha(P^{k+n}\psi)$$

et $\overline{\lim_n} [\alpha(P^n\phi)]^{1/n} \leqslant \overline{\lim_n} [\alpha(P^n\psi)]^{1/n}$ ce qui fournit $\rho_\alpha(\phi) \leqslant \rho_\alpha(\psi)$.

Soit $c > c_o = \inf_\alpha \rho_\alpha(\phi)$ et considérons α avec $c_o \leqslant \rho_\alpha(\phi) < c$. Considérons la mesure μ définie par $\mu = \sum_0^\infty \frac{1}{c^n} P^n \alpha$. Elle vérifie la relation

$$P\mu = c\mu \quad \text{et donc} \quad P\mu \leqslant c\mu \quad .$$

On a donc, pour $c > c_o$ $H_c \neq \{0\}$. Inversement, soit c un réel tel que $H_c \neq \{0\}$ et $\mu \neq 0$, telle que $P\mu \leqslant c\mu$. On a alors pour $\phi \in C_K^+(E)$ $\mu(P^n\phi) \leqslant c^n \mu(\phi)$ et si α est une mesure de Radon positive à support compact dominée par μ :

$$\alpha(P^n\phi) \leqslant c^n \mu(\phi) \quad , \quad \rho_\alpha(\phi) \leqslant c \quad .$$

Ceci prouve que $c_o = \mathbf{Inf} \ \{c \ ; \ H_c \neq \{0\} \}$.

L'intersection des cônes H_c $(c > c_o)$ n'est pas réduite à $\{0\}$ car leurs bases sont compactes et totalement ordonnées par inclusion. On a donc $\bigcap_{c > c_o} H_c = H_{c_o} \neq \{0\}$.

L'action de P sur H_{c_o} est un opérateur continu et le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff fournit une mesure μ_o vérifiant $P\mu_o = \lambda\mu_o$ $\mu_o \in H_{c_o}$.

Donc $c_o \leqslant \lambda < c_o$ et $P\mu_o = c_o \mu_o$.

Enfin, la relation $\alpha < \beta$ s'écrit

$$\alpha(P^n\phi) \leqslant \sum_{k=1}^{k=r} \beta(P^{n+k}\phi)$$

pour $\phi \in C_K^+(E)$ fixée $\rho_\alpha = \rho_\alpha(\phi) \leqslant \rho_\beta(\phi) = \rho_\beta$.

Proposition 2.- Sous la condition I, le nombre ρ_α est indépendant de α . Sous la condition I', la suite $[P^n\,\phi(x)]^{1/n}$ a une limite pour tous ϕ de $C_K^+(E)$ et x dans E .

Preuve : On écrit, pour x et y dans un compact C

$$P^n\,\phi(x) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k\, P^{n+k}\,\phi(y)$$ et si α , β sont à supports dans C :

$$\alpha(P^n\phi) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k\, \beta(P^{n+k}\phi) \qquad \rho_\alpha(\phi) \leqslant \rho_\beta(\phi)$$

d'où la première partie de l'énoncé.

Montrons que la suite $u_n = P^n\,\phi(x)$ vérifie une relation de la forme $u_{m+n+r} \geqslant \varepsilon\, u_m\, u_n$ pour certaines constantes r et ε , ce qui fournira de manière classique l'existence de la limite $u_n^{1/n}$.

La condition I' fournit ε' et r avec

$$P^{n+r}(y,\phi) \geqslant \varepsilon\, P^n(x,\phi)$$

pour tout n entier et y dans le support C de ϕ .

D'autre part on a

$$P^{m+n+r}(x,\phi) = \int P^m(x,d_y)\, P^{n+r}(y,\phi)$$

$$P^{m+n+r}(x,\phi) \geqslant \varepsilon\, P^m(x,C)\, P^n(x,\phi) .$$

Mais puisque $1_C \geqslant \varepsilon''\,\phi$ on a bien

$$P^{m+n+r}(x,\phi) \geqslant \varepsilon'\,\varepsilon''\, P^m(x,\phi)\, P^n(x,\phi)$$ d'où l'assertion voulue avec $\varepsilon = \varepsilon'\,\varepsilon''$.

Proposition 3.- Soit P une probabilité de transition sur E vérifiant la condition II et $\phi \in C_K^+(E)$ tel que, uniformément sur les compacts, on ait

$$\lim_n [P^n(x,\phi)]^{1/n} = c > 0 \quad . \quad \text{Alors on a aussi :}$$

$$\lim_n \frac{P^{n+1}(x,\phi)}{P^n(x,\phi)} = c \quad .$$

Cette proposition découlera du lemme

<u>Lemme</u>.- Pour tout α réel $(0 < \alpha < 1)$, il existe une fonction $\delta_\alpha(\varepsilon) > 0$ telle que si P et Q sont des noyaux positifs vérifiant $P^2 = \alpha P + (1-\alpha)Q$ on ait, pour tout $\varepsilon > 0$ et n assez grand

$$P^{n+1} \leqslant (1+\varepsilon)\, P^n + e^{-n\delta_\alpha(\varepsilon)} (I+P) \sum_0^n Q^k$$

$$P^n \leqslant (1+\varepsilon)\, P^{n+1} + e^{-n\delta_\alpha(\varepsilon)} (I+P) \sum_0^n Q^k \quad .$$

<u>Preuve</u> : La vérification de ces inégalités est purement combinatoire. On exprime d'abord P^{n+1} sous la forme $P^{n+1} = Pp_n(Q) + q_n(Q)$ où p_n et q_n sont des polynômes à coefficients positifs.

Ces polynômes se déterminent par la méthode des fonctions génératrices. On a les relations de récurrence :

$$p_{n+1}(x) = \alpha p_n(x) + q_n(x)$$

$$q_{n+1}(x) = (1-\alpha)x\; p_n(x)$$

$$p_o(x) = 1 \qquad p_1(x) = \alpha \quad .$$

Il suffit d'obtenir $p_n(x)$ qui satisfait $p_{n+1}(x) = \alpha p_n(x) + (1-\alpha)x\; p_{n-1}(x)$.

Posant $S(Y) = \sum_{n \geqslant 0} Y^n p_n(x)$ on obtient :

$$[1 - \alpha Y - (1-\alpha)x\, Y^2]\, S(Y) = 1$$

et $S(Y) = \sum_{n \geqslant 0} Y^n [\alpha + (1-\alpha)x\, Y]^n$ ce qui conduit à

$$P_n(x) = \sum_{2r \leqslant n} C^r_{n-r}\, \alpha^{n-2r} (1-\alpha)^r X^r \quad .$$

La relation de récurrence vérifiée par p_n montre que son degré est $\leqslant n$ et que ses coefficients sont majorés par 1 . Le rapport des coefficients successifs de p_n est $\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\, \frac{n-2r}{n-r}\, \frac{n-2r+1}{r+1}$ et si l'on pose $r/n = x$, il est donné par la la fonction $f_n(x)$ où

$$f_n(x) = \frac{1-2x}{1-x} \frac{1 + \frac{1}{n} - 2x}{\frac{1}{n} + x} \frac{1-\alpha}{\alpha^2} .$$

L'étude détaillée de f_n montre que f_n décroit lorsque x varie de 0 à $1/2$ en partant de la valeur $f_n(0) = (n-1) \frac{1-\alpha}{\alpha^2}$ qui est supérieure à 1 pour n assez grand. Cette fonction prend la valeur 1 pour x_n solution de $\frac{1-\alpha}{\alpha^2} (1-2x_n)(1-x_n+\frac{1}{n}) = (1+\frac{1}{n})(1-x_n)$ ce qui donne :

$$\rho = \lim_n x_n = \frac{1-\alpha}{2-\alpha} < 1/2 .$$

De plus, pour $x < \rho - \varepsilon/2$ on a $f_n(x) < (1-\varepsilon')^{-1}$ et pour $x > \rho + \varepsilon/2$ on a $f_n(x) < 1-\varepsilon'$ avec $\varepsilon' > 0$. Ceci fournit pour les coefficients de $p_n(x)$ dont l'indice est extérieur à l'intervalle $[(\rho-\varepsilon)n , (\rho+\varepsilon)n]$ la majoration exponentielle $e^{-\delta n}$ $(\delta > 0)$ puisque le plus grand coefficient de $p_n(x)$ est borné par un.

Pour r entier dans l'intervalle $[(\rho-\varepsilon)^n , (\rho+\varepsilon)^n]$ le rapport des coefficients correspondants de p_{n+1} et p_n, qui vaut

$$\alpha \frac{C^r_{n+1-r}}{C^r_{n-r}} = \alpha \frac{n-r+1}{n-2r+1}$$

est compris entre $1-\varepsilon'$ et $1+\varepsilon'$ avec $\varepsilon' > 0$. Ces polynomes vérifient donc, au sens des coefficients, les inégalités

$$p_{n+1}(x) \leqslant (1+\varepsilon')\, p_n(x) + e^{-\delta n} \sum_{k=0}^{n+1} x^k$$

$$p_n(x) \leqslant (1+2\varepsilon')\, p_{n+1}(x) + e^{-\delta n} \sum_{k=0}^{k=n} X^k \quad \text{où } \delta(\varepsilon') > 0 .$$

D'où les inégalités concernant les opérateurs P^n et P^{n+1}.

Preuve de la proposition : Soit λ réel avec $1 \leqslant \lambda \leqslant c$ et h_λ la fonction définie par $h_\lambda(x) = \sum_0^\infty 1/\lambda^n\, P^n(x,\phi)$, fonction qui est positive et bornée sur les compacts en raison de l'uniforme convergence de $[P^n(x,\phi)]^{1/n}$.

Posons alors $P_\lambda(x,dy) = \frac{1}{\lambda} P(x,dy) \frac{h_\lambda(y)}{h_\lambda(x)}$ et observons que, par définition de h_λ on a : $P_\lambda 1 \leqslant 1$.

On a de plus, $P_\lambda^2 = \frac{1}{\lambda^2} P^2(x,dy) \frac{h_\lambda(y)}{h_\lambda(x)}$

$P_\lambda^2 = \frac{\alpha}{\lambda} P_\lambda + \frac{1-\alpha}{\lambda} Q_\lambda$ et puisque Q_λ est positif et $\lambda \geqslant 1$:

$$P_\lambda^2 = \alpha P_\lambda + (1-\alpha) R_\lambda \quad \text{avec } R_\lambda \text{ positif et}$$

$$R_\lambda 1 = \frac{1}{1-\alpha} [P_\lambda^2 1 - \alpha P_\lambda 1] \leqslant 1 \quad .$$

Observons maintenant que si l'on définit la fonction ψ par $\phi(y) = \frac{\psi(y)\, h_\lambda(y)}{h_\lambda(x)}$ on a

$$P_\lambda^n(x,\psi) = \frac{1}{\lambda^n} P^n(x,\phi) \quad \text{et} \quad \lim_n [P_\lambda^n(x,\psi)]^{1/n} = \frac{c}{\lambda} \quad .$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et λ assez voisin de c pour que $c > \lambda e^{-\delta_\alpha(\varepsilon)}$.

D'après le lemme, on a, puisque $R_\lambda^n 1 \leqslant 1$:

$$\frac{P_\lambda^{n+1}(x,\psi)}{P_\lambda^n(x,\psi)} \leqslant (1+\varepsilon) + 2(n+1) \|\psi\|_\infty \frac{e^{-n\delta_\alpha(\varepsilon)}}{P_\lambda^n(x,\psi)}$$

soit $\overline{\lim_n} \frac{P_\lambda^{n+1}(x,\psi)}{P_\lambda^n(x,\psi)} \leqslant 1+\varepsilon$ et $\overline{\lim_n} \frac{P^{n+1}(x,\phi)}{P^n(x,\phi)} \leqslant \lambda(1+\varepsilon)$.

Comme $\lambda(1+\varepsilon)$ est arbitrairement proche de c , on a $\overline{\lim} \frac{P^{n+1}(x,\phi)}{P^n(x,\phi)} \leqslant c$.
Avec l'autre inégalité du lemme, on a finalement

$$\lim_n \frac{P^{n+1}(x,\phi)}{P^n(x,\phi)} = c \quad .$$

On peut remarquer que si $c = 1$, cette conclusion est immédiate à partir du lemme.
En résumé, on peut énoncer la

Proposition 4.- Sous la conditions I', la suite $[P^n(x,\phi)]^{1/n}$ $[x \in E,\ \phi \in C_K^+(E)]$ a une limite indépendante de x et ϕ . Cette limite est la plus petite valeur propre de l'opérateur sur les mesures positives associé au noyau P .

Considérons maintenant une mesure de probabilité p à support compact sur le groupe G et l'opérateur de convolution défini par $P(x,\cdot) = p * \delta_x$. Des conditions diverses assurent la validité de I_0 , I, I', II . Par exemple, I_0 ou I est équivalente à l'égalité de G et du semi-groupe fermé S engendré par le support de p .

Si l'identité appartient au support de p et si $S = G$, la condition I' est vérifiée. Si de plus p est atomique ou bien admet une densité bornée, la condition II est vérifiée. On supposera ici vérifiée la condition notée (H) :

$S = G$ et la limite de la suite $\dfrac{p^{n+1}(\phi)}{p^n(\phi)}$ existe pour tout ϕ de $C_K^+(E)$.

Le théorème 1 s'adpate alors ici sous la forme suivante :

<u>Théorème 2</u>.- Supposons la condition (H) vérifiée. Si les mesures de Radon positives μ solutions de $p * \mu = \mu * p = c_0 \mu$ où $c_0 = \lim [p^n(\phi)]^{1/n}$ sont les multiples de l'une d'elles μ_0 on a

$$\forall \phi \quad \psi \in C_K^+(G) \quad \lim \frac{p^n(\psi)}{p^n(\phi)} = \frac{\mu_0(\psi)}{\mu_0(\phi)} \quad .$$

<u>Preuve</u> : Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 1 : les valeurs d'adhérence possibles de la suite de mesure $\mu_n = \dfrac{p^n}{p^n(\phi)}$ vérifient $p * \mu = c_0 \mu$.
Puisque $p * \mu_n = \mu_n * p$ et que p est à support compact on a aussi $p * \mu = \mu * p = c_0 \mu$. La condition d'unicité de tels μ permet alors de conclure.
Observons que l'existence de μ_0 vérifiant $p * \mu_0 = \mu_0 * p = c_0\, \mu_0$ est assurée si p possède un support compact engendrant G en tant que semi-groupe. En effet les mesures $\mu = \sum_0^\infty \lambda^n\, p^n$ sont de Radon pour $\lambda < 1/c_0$ et vérifient

$$p * \mu = \mu * p \leqslant \frac{1}{\lambda}\, \mu \quad .$$

Le cône des mesures de Radon positives μ vérifiant

$$p * \mu = \mu * p < c_0\, \mu$$

est l'intersection des cônes précédents qui sont non vides et à base compacte : ce cône est aussi non vide. Comme il est stable par la convolution par p , il contient une droite fixe, d'après le théorème de Schander-Tychonoff, ce qui fournit μ_0 vérifiant

$$p * \mu_0 = c_0\, \mu_0 = \mu_0 * p \quad .$$

Le même raisonnement montre l'existence de μ dans le cône des mesures vérifiant $p * \mu = a\, \mu$ qui satisfait la relation

$$\mu * p = a'\mu$$

pour un certain $a' > 0$.

Etudions maintenant les mesures de Radon positives μ vérifiant les équations $p * \mu = a\mu$, $\mu * p = a'\mu$. Rappelons d'abord une construction de fonctions f vérifiant

$$p * f(h) = \int f(gh)\, dp(g) = af(h) \qquad (1)$$

ce qui permet d'obtenir $\mu = f \cdot dg$ vérifiant $p * \mu = a\,\mu$. Si dg est la mesure de Haar sur G invariante à gauche. Si B est un G espace localement compact sur lequel G opère continûment et si $\sigma(g,b)$ est un cocycle continu vérifiant l'identité $\sigma(gg',b) = \sigma(g,g'b)\,\sigma(g',b)$ on peut considérer la représentation de G associée et en particulier le noyau positif sur B défini par

$$\rho_\sigma[p](\Phi) = \int \phi(gb)\,\sigma(g,b)\, dp(g) \quad .$$

Alors dire que la fonction q_σ sur B vérifie $\rho_\sigma[p](q_\sigma) = aq_\sigma$ signifie que $\bar{\sigma}(g,b) = \sigma(g,b)\,\dfrac{q_\sigma(gb)}{q_\sigma(b)}$ vérifie l'équation (1) ; ces conditions se ramènent en effet à

$$\forall\, b \in B \quad \int \bar{\sigma}(g,b)\, dp(g) = a \quad .$$

Supposons que q_σ soit positive unique à un coefficient près et que la fonction $\bar{\sigma}(g,b)$ de g obtenue soit, pour tout $b \in B$, extrémale dans le cône H_a des solutions de (1) . Considérons alors la fonction f barycentre des fonctions $\bar{\sigma}(g,b)$ définie par

$$f(g) = \int \bar{\sigma}(g,b)\, d\alpha(b)$$

où α est une mesure de probabilité sur B et écrivons que la mesure $\mu_\sigma = f \cdot dg$ vérifie l'équation $\mu_\sigma * p = a'\mu_\sigma$.

Si δ est la fonction modulaire de G , cette équation s'écrit :

$$\iint_{G \times B} \bar{\sigma}(gh,b)\,\delta(h)\, dp(h)\, d\alpha(b) = a' \int \bar{\sigma}(g,b)\, d\alpha(b) \quad .$$

Si alors on considère le noyau positif défini par $\rho'_\sigma(p)[\phi] = \int \sigma(h,b)\,\delta(h)\,\phi(hb)\, dp(h)$ la mesure α doit vérifier, puisque $\bar{\sigma}(g,b)$ est extrémale :

$$q_\sigma \cdot \rho'_\sigma(p)\left[\frac{\alpha}{q_\sigma}\right] = a'\alpha \quad .$$

Soit $\alpha = q_\sigma \cdot \nu$ où ν est une mesure de Radon vérifiant $\rho'_\sigma(p)[\nu] = a'\nu$.

Si l'on suppose que cette équation a une solution unique à un scalaire près, on aura ainsi construit à partir de σ une unique mesure μ , à un scalaire près, vérifiant

$$p * \mu = a\mu \qquad \mu * p = a'\mu \quad .$$

La densité de cette mesure par rapport à la mesur de Haar gauche de G est donnée par

$$f_0(g) = \int \sigma(g,b)\ q_\sigma(gb)\ d\nu(b) \quad .$$

On peut observer que si G est unimodulaire, la condition

$$\int \bar{\sigma}(g,b)\ dp(g) = a \quad \text{implique} \quad a' = a \quad .$$

Sous la condition que p admette une densité bornée à support compact engendrant G en tant que semi-groupe, l'étude des extrémales des équations

$$p * \mu = a\mu \qquad p * f = af$$

a été faite en particulier lorsque G est semi-simple à centre fini [6] ou extension compacte d'un sous-groupe nilpotent distingué N , [4] ; elles peuvent toutes être construites comme précédemment et les espaces B correspondants sont homogènes et compacts. Les remarques précédentes relatives à l'unicité de q et α sont donc valables dans ce cas, à cause de la régularité de p . Elles sont également valables si G est nilpotent et p atomique à support fini engendrant G car les extrémales se réduisent alors à des exponentielles, comme en [4] .

Considérons maintenant la valeur minimum c_0 de a pour laquelle $Ha \neq \phi$ et observons que les extrémales correspondantes sont associées à un cocycle σ_0 et à un espace B_0 bien définis [10] . Ceci nous fournit l'existence et l'unicité à un scalaire près de μ_0 vérifiant

$$p * \mu_0 = \mu_0 * p = c_0\ \mu_0$$

dans les 3 cas envisagés :

I - G semi-simple à centre fini et p admet une densité bornée à support compact

II - G est extension compacte d'un sous-groupe nilpotent disitngué N et p vérifie la même condition que en I .

III - G est nilpotent et p est atomique à support fini engendrant G .

Précisons maintenant la nature de μ_0 dans les cas précédents. Dans le cas II l'espace B_0 est réduit à un point et $\sigma_0(g)$ est l'unique exponentielle $\lambda_0(g)$ où $\hat{p}(\lambda) = \int \lambda(g^{-1})\, dp(g)$ atteint son minimum. On a alors $\mu_0 = \lambda_0\, dg$.

Dans le cas III la situation est identique.

On peut noter que dans le cas II des conditions d'irréductibilité de l'action de G sur N assurent que $\lambda_0(g) = 1$ [10] et donc μ_0 est, indépendamment de p , une mesure de Haar.

Dans le cas I, désignons par $G = KAN$ une décomposition d'Iwasawa de G , et par m le contralisateur de A dans K . L'espace B_0 est alors la frontière de Furstenberg de G : $B_0 = G/MAN$.

Si on désigne la mesure K-invariante canonique sur B_0 par m , on a alors $\sigma_0(g,b) = (\frac{dg^{-1}m}{dm})^{1/2}(b)$, de sorte que $\rho\sigma_0$ est la représentation quasi-régulière de G . Afin d'exprimer μ_0 , désignons par δ la fonction modulaire de AN de sorte que $\delta\, dt$ est la mesure de Haar droite de AN si dt est la mesure de Haar gauche de AN et notons λ_0 la mesure symétrique $\delta^{1/2}\, dt$. Soient ν et ν' les probabilités sur B_0 définies par $\rho\sigma_0(p)[\nu] = c_0\, \nu$, $\rho\sigma_0(\check{p})[\nu'] = c_0\, \nu'$.

Alors on a en désignant encore par ν et ν' les probabilités sur K de projection ν et ν' sur B_0 et qui sont M-invariantes

$$p * \nu * \lambda_0 = c_0\, \nu * \lambda_0$$

$$\lambda_0 * \nu' * p = c_0\, \lambda_0 * \nu$$

$$p * (\nu * \lambda_0 * \nu') = c_0(\nu * \lambda_0 * \nu') = (\nu * \lambda_0 * \nu') * p$$

de sorte que, par l'unicité justifiée plus haut : $\mu_0 = \nu * \lambda_0 * \nu'$.

<u>Théorème 2</u> (résumé).- Supposons (G,p) de l'un des types I, II, III. Alors il existe une mesure de Radon μ_0 , de forme précisée plus haut, relativement invariante dans les cas II et III telle que

$$\forall\, \phi\, ,\, \psi \in C_K^+(G) \quad \lim \frac{p^n(\psi)}{p^n(\phi)} = \frac{\mu_0(\psi)}{\mu_0(\phi)}$$

comme application du théorème 1, on a, par exemple

Théorème 3.- Supposons (G,p) du type II et soit E un espace homogène de G. Supposons de plus que, pour toute exponentielle λ sur G on ait $\int \lambda(g)\, dp(g) \geqslant 1$. Alors, si m est la mesure de Haar de E on a pour tous ϕ et ψ de $C_K^+(E)$ et pour tout x de E

$$\lim_n \frac{p^n * \psi(x)}{p^n * \phi(x)} = \frac{m(\psi)}{m(\phi)} .$$

Remarques : Si l'on dispose d'une estimation de $p^n(\phi)$ par une suite a_n telle que $\frac{p^n(\phi)}{a_n}$ soit bornée inférieurement et supérieurement on obtient alors

$$\lim_n \frac{p^n(\psi)}{a_n} = \frac{\mu_0(\psi)}{\mu_0(\phi)}$$

ce qui généralise le théorème local classique lorsque $G = R^d$.

De telles estimations peuvent s'obtenir, dans des cas particuliers, par l'étude des représentations unitaires de G ([3], [7], [9], [11], [14]).

On peut observer également que le cas G discret et p symétrique conduit à des méthodes et résultats plus simples ([2], [7]). En particulier les mesures limites μ_0 possibles doivent vérifier

$$p * \mu_0 = c_0\, \mu_0 \quad , \quad \mu_0(g) \leqslant \mu_0(e)$$

ce qui simplifie l'étude de l'unicité. Par exemple, si les fonctions p-harmoniques bornées sont constantes, on a $c_0 = 1$ et $\mu_0(g) = \mu_0(e)$, ce qui justifie l'unicité voulue [2].

Si enfin G est le groupe "ax + b" et si p est suffisamment régulière, les réguliers de [5] permettent de conclure, comme dans le cas semi-simple, à l'unicité de μ_0 qui, ici, ne peut petre relativement invariante à cause de la non unimodularité de G. Le théorème s'étend donc à ce cas.

Bibliographie.-

[1] V.I. ARNOLD et A.L. KRYLOV : Uniform distribution of points on a sphere - Sov. Math. Dokl 4 n° 1 (1963) p. 1-5.

[2] A. AVEZ : Limites de quotients pour les marches aléatoires sur des groupes - C.R.Acad. Sc. Paris, Série 1. 276, 317-320 (1973).

[3] P. BALDI, P. BOUGEROL et P. CREPEL : Théorème central limite local sur les extensions compactes de R^d . Ann. Inst. Vol. XIV N° 1, (1978).

[4] J.P. CONZE et Y. GUIVARC'H : Propriété de droite fixe et fonctions propres des opérateurs de convolution. Séminaire de probabilités de Rennes, (1976). & Lecture Notes n° 404 "Théorie du potentiel et Analyse Harmonique". Springer Verlag (1974). p. 126-133.

[5] L. ELIE : Fonctions harmoniques sur le groupe affine. A paraître.

[6] H. FURSTENBERG : Translation-invariant cones of functions on semi-simple groups. Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965) 271-326.

[7] P. GERL : Wahrscheinlichkeitsmasse auf diskreten Gruppen. A paraître.

[8] U. GRENANDER : Probabilities on algebraic structures. John Wiley - New-York (1963).

[9] Y. GUIVARC'H : Equirépartition dans les espaces homogènes - Journées ergodiques, Rennes (1973) . & Lecture Notes Springer Verlag n° 532 (1976).

[10] Y. GUIVARC'H : Une loi des grands nombres pour les groupes de Lie - Séminaires de Probabilités I - Université de Rennes (1976).

[11] D.A. KAZDAN : Uniform distribution in the plane - Trudi. Mosk. Mat. Ob. (1965), t. 4.

[12] LE PAGE E. : Théorèmes quotients pour certaines marches aléatoires. C.R.Acad. Sc., t. 279, série A, n° 2, 1974.

[13] G.A. MARGULIS : Positive harmonic functions on nilpotent groups - Doklady, (1966), Tom. 166, n° 5.

[14] S. SAWYER : Isotropic Random walkds in a tree - Zeitschrift für Wahr - Springer Verlag (1978) n° 42.

[15] C. STONE : Ratio limit theorems for random walks on groups - Trans. Amer. Math. Soc. 125, (1966) 88-100.