

Astérisque

ALAIN HUARD

Une caractérisation des marches aléatoires récurrentes des espaces homogènes du groupe des déplacements de R^d

Astérisque, tome 74 (1980), p. 139-147

http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__139_0

© Société mathématique de France, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE CARACTÉRISATION DES MARCHES
ALÉATOIRES RÉCURRENTES DES ESPACES
HOMOGÈNES DU GROUPE DES DÉPLACEMENTS DE $\mathbb{R}^d$

Alain HUARD

Soit G_d le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$, H un sous groupe fermé connexe de G_d , M l'espace homogène droit $H \backslash G_d$ et π la projection canonique de G_d sur M .

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $X_i = (U_i, Y_i)$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi μ sur G_d ; P (respectivement Q) désigne le noyau de transition, U (respectivement N) le noyau potentiel, de la marche aléatoire droite de loi μ sur G_d (respectivement de la marche aléatoire de loi μ sur M).

π_1 désigne la projection de G_d sur $(I_d, \mathbb{R}^d)$, V le supplémentaire orthogonal dans $\pi_1(G_d)$ de l'espace vectoriel engendré par les directions asymptotiques de $\pi_1(H)$.

Nous savons que si $\dim V \leq 2$, M est récurrent, et qu'il est transitoire sinon. Nous allons nous attacher à essayer de caractériser les marches aléatoires récurrentes dans le cas où $\dim V \leq 2$, et ceci à l'aide de deux méthodes différentes, l'une utilisant le théorème central limite sur G_d , l'autre la méthode des fonctions barrières.

I - UTILISATION DU THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Théorème. - Soit μ une probabilité adaptée étalée sur G_d .

Si : 1) $\dim V = 2$

2) μ admet un moment d'ordre 2 (ie : si $\int_{G_d} |\lambda(g)|^2 d\mu(g) < +\infty$, où

λ désigne la composante de translation) la marche aléatoire de loi μ sur M est récurrente.

Démonstration : Nous allons montrer que le potentiel d'un compact K_0 de M est infini. L'espace vectoriel V s'identifie à $\mathbb{R}^2$. On appelle cylindre de G_d un sous ensemble de la forme $\mathcal{C} = SO(n) \times (B \oplus V^\perp)$, où B est un compact de V .

B s'appelle la base du cylindre $\mathcal{C}$ et l'on notera $\mathcal{C}_{\tau, M}$ (respectivement $\mathcal{C}_M$) le cylindre de base le disque fermé de centre τ (respectivement 0) dans V , et de rayon M . D'après la décomposition de Lévi-Malcev, nous pouvons supposer H résoluble, et dans ce cas, l'image par π de tout cylindre de G_d est contenue dans un compact K de M (cf [2]).

Soient K_τ l'image par π de $\mathcal{C}_{\tau, 1}$ et K_M celle de $\mathcal{C}_M$. Pour M assez grand ($M \geq 10$), $\mathcal{C}_M$ peut être recouvert par $4M^2$ cylindres $\mathcal{C}_\tau$. Soit I l'ensemble des centres τ (que l'on identifie aux éléments $(I_d, (\tau, 0))$ de G_d où $(\tau, 0)$ désigne l'élément de R^d dont les composantes sont 0 sur $V^\perp$ et qui coïncide avec τ sur V . Il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mu^k(\mathcal{C}_M) &\leq \sum_{\tau \in I} \sum_{k=0}^n \mu^k(\mathcal{C}_{\tau, 1}) \\ &\leq \sum_{\tau \in I} \sum_{k=0}^n P^k(\mathcal{C}_{\tau, 1}) \\ &\leq \sum_{\tau \in I} \sum_{k=0}^n Q^k(\pi(\mathcal{C}_{\tau, 1})) \\ &\leq \sum_{\tau \in I} \sum_{k=0}^n Q^k(x, K_1) \end{aligned}$$

où x désigne un point de M tel que $\pi(-\tau) = x$, et K_1 l'image par π de $\mathcal{C}_1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mu^k(\mathcal{C}_M) &\leq \sum_{\tau \in I} N(x, K_1) \\ &\leq 4M^2 \sup_{\tau \in I} N(x, K_1) \\ &\leq 4M^2 \sup_{x \in M} N(x, K_1) \\ &\leq 4M^2 \sup_{x \in K_1} N(x, K_1) \end{aligned}$$

d'après le principe du maximum.

Soit K_0 un compact de M tel que $x.K_1$ reste dans K_0 pour tout x de K_1

$$\sum_{k=0}^n \mu^k(\mathcal{C}_M) \leq 4M^2 N(K_0).$$

Choisissons maintenant ε fixé, $M = 2\varepsilon\sqrt{n}$. Alors

$$N(K_0) \geq \frac{1}{16n\varepsilon^2} \sum_{k=0}^n \mu^k(\mathcal{C}_{2\varepsilon\sqrt{n}}).$$

Considérons maintenant une famille $X_i = (U_i, Y_i)$ de variables aléatoires indépendantes sur G_d , de même loi μ . Notons μ_1 la loi des Y_i , $\mu_{1,n}^k$ la loi des variables aléatoires

$$\frac{T_k^g}{\sqrt{n}} = \frac{\lambda + vY_1 + U_1Y_2 + \dots + U_1 \dots U_{k-1}Y_k}{\sqrt{n}}$$

et $\bar{\mu}_n^k$ la loi marginale sur V .

Alors, $\sum_{k=0}^n \mu^k(\mathcal{C}_{2\varepsilon\sqrt{n}}) = \sum_{k=0}^n \bar{\mu}_n^k(B_{2\varepsilon})$ (où $B_{2\varepsilon}$ est la base du cylindre $\mathcal{C}_{2\varepsilon}$).

Soit f_ε définie sur R^2 , à valeurs dans R^+ , continue telle que

$$1_{B_\varepsilon} \leq f_\varepsilon \leq 1_{B_{2\varepsilon}}.$$

Il vient $N(K_0) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{16n\varepsilon^2} \sum_{k=0}^n \bar{\mu}_n^k(f_\varepsilon) = \alpha(\varepsilon)$.

Il suffit à présent de montrer que $\alpha(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ si $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cette démonstration repose sur le théorème central limite sur le groupe G_d (cf [3]) :

Soit Z_n^g la marche aléatoire droite de loi μ sur G_d , associée aux variables aléatoires $X_i = (U_i, Y_i)$, partant de g à l'instant 0, et T_n^g sa composante de translation.

Alors, si $d \geq 2$

si la loi des U_i est adaptée dans $SO(d)$

si μ admet un moment d'ordre 2

la variable aléatoire $\frac{T_n^g}{\sqrt{n}}$ converge en loi, quand n tend vers l'infini vers $\gamma = \mathcal{N}(0, \theta I_d)$ la loi $\frac{T_n^g}{\sqrt{n}}$ normale sur R^d centrée, de covariance θI_d (avec $\theta > 0$ si de plus μ est adaptée).

Ce théorème s'applique à la situation présente. Par suite, la loi marginale sur V , $\bar{\mu}_n^k$, converge également, lorsque k tend vers l'infini, vers $\bar{\gamma} = \mathcal{N}(0, \theta I_2)$, la loi normale sur R^2 , centrée et de covariance θI_2 . Notons $\bar{\gamma}_n^k$ la loi normale sur R^2 , centrée et de covariance $\frac{k}{n} \theta I_2$. Le lemme suivant, démontré dans (1) nous permettra de remplacer $\bar{\mu}_n^k$ par $\bar{\gamma}_n^k$ dans $\alpha(\varepsilon)$.

Lemme : Soit f continue, positive, à support compact sur R^2 .

Alors : $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\bar{\mu}_n^k(f) - \bar{\gamma}_n^k(f)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Par suite,

$$\alpha(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{16n\varepsilon^2} \sum_{k=0}^n \gamma_n^k(f_\varepsilon)$$

$$\alpha(\varepsilon) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{16n\varepsilon^2} \sum_{k=0}^n \gamma_n^k(B_\varepsilon)$$

$$\text{Mais } \gamma_n^k(B_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi\theta} \frac{n}{k} \iint_{\mathbb{R}^2} 1_{B_\varepsilon}(x,y) e^{-\frac{1}{2} \frac{n}{k} \frac{x^2+y^2}{\theta}} dx dy$$

Un calcul simple nous montre alors que

$$\alpha(\varepsilon) \geq \frac{\theta}{8} \int_0^{\frac{2\theta}{\varepsilon^2}} (1 - e^{-\frac{1}{u}}) du$$

et tend donc vers l'infini lorsque ε tend vers 0.

Le potentiel du compact K_0 est infini. La marche aléatoire de loi μ sur M est donc récurrente.

II - LA MÉTHODE DES FONCTIONS BARRIÈRES

Théorème 2.- Soit μ une probabilité adaptée étalée sur G_d si 1) $\dim V = 1$.

2) il existe $\delta > 0$ tel que μ admette un moment d'ordre $2+\delta$, alors la marche aléatoire de loi μ sur M est récurrente.

1) Deux lemmes préliminaires :

Lemme 1.- Soit μ une mesure de probabilité sur R et P le noyau de transition de la marche aléatoire droite associée. S'il existe une fonction f de R dans R^+ , telle que $Pf(x) \leq f(x)$ pour x en dehors d'un compact et tel que $f(x)$ tende vers l'infini avec $|x|$, alors la marche aléatoire droite de loi μ est récurrente.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons la marche transitoire.

Soit K le compact en dehors duquel $Pf(x) \leq f(x)$.

On a donc, pour $x \notin K$, et X de loi μ

$$E\{f(x+X)\} \leq f(x).$$

Soit X_n la marche de loi μ et T_K le temps d'entrée dans K .

En considérant la marche arrêtée au temps T_K , on aura

$$E_x\{f(X_{n \wedge T_K})\} \leq f(x)$$

Mais
$$E_x\{f(X_{n \wedge T_K})\} = E_x\{f(X_{T_K}) ; n > T_K\} + E_x\{f(X_n) ; n \leq T_K\}$$

La marche étant transitoire, il existe $x \notin K$ et $a > 0$ tels que $P_x\{T_K = +\infty\} = a$. Par suite, pour tout $M > 0$ il existe N tel que si $n > N$, alors

$$E_x\{f(X_n), n < T_K\} \geq \frac{Ma}{2}$$

M peut être choisi assez grand pour que $\frac{Ma}{2} > f(x)$, ce qui contredit l'hypothèse.

Lemme 2.- Soit X une variable aléatoire réelle centrée, admettant un moment d'ordre $2+\delta$, et soit $f : R \rightarrow R^+$

$$x \rightarrow |x|^{1/2}$$

Alors $E\{f(x+X)\} \leq f(x)$ pour x assez grand.

Démonstration :

* Considérons le développement en série de Mac Laurin suivant :

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{u^2}{2} + \dots$$

Il converge pour $|u| < 1$ et il existe C tel que, si $|u| < C$

$$(1+u)^{1/2} < 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{16}$$

*
$$E\{f(x+X)\} = E\{f(x+X) ; |X| < C|x|\} + E\{f(x+X) ; |X| > C|x|\}$$

Regardons le premier terme du membre de droite :

$$\begin{aligned} E\{f(x+X) ; |X| \leq C|x|\} &= |x|^{1/2} E\{(1 + \frac{X}{x})^{1/2} ; |X| \leq C|x|\} \\ &\leq |x|^{1/2} \left[P\{|X| \leq C|x|\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2|x|} E\{X ; |X| \leq C|x|\} - \frac{1}{16x^2} E\{X^2 ; |X| \leq C|x|\} \right] \end{aligned}$$

X étant centrée, on peut remplacer $E\{X; |X| < C|x|\}$ par $E\{X; |X| > C|x|\}$.

De plus $E\{X; |X| > C|x|\} \leq E(X^2)^{1/2} P\{|X| > C|x|\}^{1/2}$

$$\leq \frac{E(X^2)^{1/2} E\{|X|^{2+\delta}\}^{1/2}}{C^{1+\frac{\delta}{2}} |x|^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

donc
$$\frac{1}{2|x|} E\{X; |X| \leq C|x|\} \leq C_1 \frac{1}{|x|^{2+\frac{\delta}{2}}}$$

Il existe alors K_1 tel que pour $|x| > K_1$,

$$\frac{C_1}{|x|^{2+\frac{\delta}{2}}} < \frac{E\{X^2; |X| \leq C|x|\}}{16x^2}$$

et donc
$$E\{f(x+X); |X| \leq C|x|\} \leq |x|^{1/2} \left[1 - P\{|X| > C|x|\} - \frac{E\{X^2; |X| \leq C|x|\}}{32x^2} \right]$$

* Regardons à présent le second terme

$$\begin{aligned} E\{f(x+X); |X| > C|x|\} &\leq |x|^{1/2} E\left\{1 + \frac{|X|}{x} \Big|^{1/2}; |X| > C|x|\right\} \\ &\leq |x|^{1/2} \left[P\{|X| > C|x|\} + E\left\{\left|\frac{X}{x}\right|^{1/2}; |X| > C|x|\right\} \right] \end{aligned}$$

Rassemblons les deux termes ; il vient, pour $|x| > K_1$

$$E\{f(x+X)\} \leq |x|^{1/2} \left[1 + \frac{E\{|X|^{1/2}; |X| > C|x|\}}{|x|^{1/2}} - \frac{E\{|X|^2; |X| \leq C|x|\}}{32x^2} \right]$$

Par l'inégalité de Hölder appliquée à L_4 et $L_{4/3}$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{E\{|X|^{1/2}; |X| > C|x|\}}{|x|^{1/2}} &\leq \frac{E(X^2)^{1/4} P\{|X| > C|x|\}^{3/4}}{|x|^{1/2}} \\ &\leq \frac{E(X^2)^{1/4} E\{|X|^{2+\delta}\}^{3/4}}{C^{(2+\delta)3/4} |x|^{(2+\delta)3/4} |x|^{1/2}} \\ &\leq \frac{C_2}{|x|^{2+3\delta/4}} \end{aligned}$$

Il existe donc K_2 , tel que pour $|x| > K_2$, on ait

$$\frac{E\{|X|^{1/2} ; |X| > C|x|\}}{|x|^{1/2}} \leq \frac{E\{X^2 ; |X| \leq C|x|\}}{32x^2}$$

et pour $|x| > \sup(K_1, K_2)$, il vient $E\{f(x+X)\} \leq f(x)$.

2) Récurrence des marches aléatoires sur M

Considérons la marche aléatoire droite $Z_n^g = gX_1 \dots X_n$ de loi μ sur G_d satisfaisant aux hypothèses énoncées. Par invariance à gauche des marches droites, nous pouvons supposer que la composante des rotations de g est l'identité.

Remarquons que l'on peut remplacer la marche de pas (U_i, Y_i) par la marche de pas $(\sigma(U_i, Y_i))$ où σ est un automorphisme intérieur du groupe G_d par un élément de la forme (I_d, λ) sans rien changer au résultat annoncé : cet automorphisme ne change pas le comportement à l'infini de la norme de la projection sur V de la composante de translation.

Considérons alors $(\tilde{U}_i, \tilde{Y}_i) = (I_d, \lambda)(U_i, Y_i)(I_d, \lambda)^{-1}$

Il vient $\tilde{Y}_i = \lambda + Y_i - U_i \lambda$

$$E(\tilde{Y}_i) = \lambda + E(Y_i) - \lambda E(U_i).$$

Cherchons λ tel que $E(\tilde{Y}_i) = 0$, c'est-à-dire

$$(I_d - E(U_i))\lambda = -E(Y_i).$$

Un tel λ existe, puisque sinon $\det[I_d - E(U_i)] = 0$, et donc 1 est valeur propre de la matrice $E(U_i)$. Il existe alors $\gamma \in \mathbb{R}^d$, de norme 1 tel que

$$E(U_i) \cdot \gamma = E(U_i \cdot \gamma) = \gamma$$

$U_i \cdot \gamma$ appartient à la sphère unité de $\mathbb{R}^d$ qui est strictement convexe. Il en résulte que $U_i \cdot \gamma = \gamma$ presque sûrement, et donc que la mesure image de μ sur $SO(d)$ ne charge que le sous groupe d'isotropie de γ , ce qui est absurde puisqu'on l'a supposée adaptée.

Nous pourrions donc supposer $E(Y_i) = 0$.

Pour achever la démonstration, nous allons montrer que le potentiel d'un cylindre $\mathcal{C} = SO(d) (B \oplus V^\perp)$ de G_d est infini (où la base B du cylindre est un compact de l'espace vectoriel V identifié à $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}\text{Ce potentiel s'écrit } U(g, \mathcal{C}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_g * \mu^n(\mathcal{C}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{p_1(\lambda(g))} * \bar{\mu}^n(B) = \bar{N}(g, B)\end{aligned}$$

en intégrant selon les composantes de $V^\perp$ (p_1 désigne la projection sur V), $\bar{N}(g, B)$ est le potentiel de B pour la marche aléatoire projection sur V de la marche aléatoire droite de loi μ sur G_d . Il suffit donc de montrer que cette marche est récurrente.

D'après le lemme 2 :

$$E\{(\pi_1 \circ f)((I_d, \lambda)(U_1, Y_1))\} = E\{|p_1(\lambda + Y_1)|^{1/2}\} \leq |p_1(\lambda)|^{1/2}$$

Il faut vérifier que cette conclusion est valide à tous les pas de la marche, et pour cela il suffit de vérifier qu'elle l'est au deuxième pas, c'est-à-dire que

$$E\{|p_1(\lambda + Y_1 + U_1 Y_2)|^{1/2}\} \leq E\{|p_1(\lambda + Y_1)|^{1/2}\}$$

Y_2 étant indépendante de (U_1, Y_1) , on peut supposer (U_1, Y_1) et (U_2, Y_2) définies sur un espace de probabilité produit $\Omega_1 \times \Omega_2$. Y_2 étant centrée et admettant un moment d'ordre $2+\delta$ sur Ω_2 , $U_1(\omega_1)Y_2(\omega_2)$ le sera également pour tout ω_1 .

Nous pouvons donc appliquer le lemme 1 : La marche aléatoire projection sur V de la marche de pas (u_i, Y_i) sur G_d est récurrente. Par suite, la marche de loi μ sur M l'est également.

Résumé en anglais

We give a characterisation of recurrent random walks on homogeneous spaces of motion group of euclidian space R^d by using two different ways : the central limit theorem and the technic of cleavage functions. We prove that when the space M is recurrent and the measure that defines the random walk has a second order moment, the walk is recurrent.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) CREPEL P. - Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de R^2 , dans lecture Notes Vol. 532 - Théorie Ergodique - Springer Verlag.
- (2) GALLARDO L. - Sur deux classes de marches aléatoires - Thèse de 3^{ème} cycle - Nancy 1977.

- (3) GUIVARC'H Y., KEANE M., ROYNETTE B. - Marches aléatoires sur les groupes de Lie - Lecture Notes Vol. 624 - Springer Verlag.
- (4) HUARD A. - Sur quelques aspects des marches aléatoires du groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$ et de ses espaces homogènes - Thèse de 3^{ème} cycle Nancy 1978.

Alain HUARD

UER Sciences Mathématiques
UNIVERSITE DE NANCY I
Case officielle 140
54037 - NANCY CEDEX