Astérisque

DANIEL LASCAR

Une indicatrice de type "Ramsey" pour l'arithmétique de Peano et la formule de Paris-Harrington

Astérisque, tome 73 (1980), p. 19-30

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__19_0>

UNE INDICATRICE DE TYPE "RAMSEY" POUR L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO ET LA FORMULE DE PARIS-HARRINGTON

Daniel LASCAR

I.- PRÉLIMINAIRES ET LE THÉORÈME PRINCIPAL

Le but de cet exposé est de donner un exemple d'indicatrice pour l'arithmétique de Péano qui est d'inspiration combinatoire et dont la formulation ne fait nullement intervenir de notions métamathématiques telles que les axiomes du système, la notion de preuve ou la non-contradiction. De telles indicatrices furent élaborées en premier lieu par J. Paris, voir [P,bis], suite à ses travaux en collaboration avec L. Kirby, voir le premier exposé. L'exemple fort élégant que nous détaillons ci-dessous représente un "raffinement" par rapport à ceux de Paris et il est dû à L. Harrington, voir [P,H] ou [P,bis]. Ici, contrairement à [P,H] et conformément à [P,bis] nous présentons cet exemple en utilisant la méthode des indicatrices, voir aussi [M].

Evoquons d'abord quelques notions de la combinatoire finie qui sont formulables dans $\mathcal{P}$. Soient X un ensemble non-vide d'entiers et n un entier ; l'ensemble des parties de X à n éléments se note $[X]^n$ et la cardinalité de X se note $|X|$. On confondra les éléments de $[X]^n$ avec les suites extraites de X strictement croissantes et de longueur n. Dans ce contexte, nous identifierons aussi l'entier k et l'ensemble $\{0,\dots,k-1\}$; donc $P : [X]^n \to k$ signifie que P est une application de $[X]^n$ dans l'ensemble $\{0,\dots,k-1\}$. Si $P : [X]^n \to k$ et si $H \subseteq X$ est tel que P soit constante sur $[H]^n$, on dit que H est homogène pour P. La notation $X \to (m)^n_k$, où il est entendu que $m \geq n+1$, signifie que pour toute partition $P : [X]^n \to k$ il existe une partie homogène $H \subseteq X$ telle que $|H| \geq m$. La notation $\ell \to (m)^n_k$ abrège

$[1,\ell] \to (m)^n_k$ où $[1,\ell] = \{1,\dots,\ell\}$ et, en général, $[s,\ell] = \{s,s+1,\dots,\ell\}$. On écrira $[m,n]^k$ pour abréger $[[m,n]]^k$. Il est bien connu, voir [E,R] par exemple, que dans $\mathcal{P}$ on peut démontrer le :

I.1.- <u>THÉORÈME DE RAMSEY</u>. Pour tous $m,n,k \in \mathbb{N}$ il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\ell \to (m)^n_k$.

Appelons un ensemble fini non vide X un ensemble <u>dense</u>, [P] , ou <u>relativement grand</u> , [H,P] , ssi $|X| \geq \min X$. Nous allons étudier une variante de la relation $X \to (m)^n_k$ où l'on demandera que la partie homogène soit dense. Ecrivons $X \underset{*}{\to} (m)^n_k$ ssi pour toute P, $P : [X]^n \to k$, il existe une partie homogène H telle que H est dense et $|H| \geq m$. Nous définissons une fonction Y de deux arguments en posant :

I.2. $Y(a,b)$ = le plus grand entier c tel que $[a,b] \underset{*}{\to} (2\ c)^c_c$.

Remarquons tout de suite que la relation à cinq arguments $[a,b] \underset{*}{\to} (r)^t_s$ s'exprime par une formule de l'arithmétique qui est Δ^o_1 dans $\mathcal{P}$. D'autre part, il est clair que pour $c > b$, on ne peut avoir $[a,b] \underset{*}{\to} (2c)^c_c$. Il s'ensuit que Y est une application Δ^o_1 dans $\mathcal{P}$ et donc absolue.

Il est aussi évident que l'application Y est (prouvablement) monotone en la seconde variable.

I.3.- $\mathcal{P} \vdash \forall x,y,u\ (y \leq u \wedge x < y \to Y(x,y) \leq Y(x,u))$.

Afin de travailler un peu avec la relation $\underset{*}{\to}$ et l'application Y, nous notons quelques propriétés qui peuvent être démontrées dans $\mathcal{P}$.

I.4.- <u>PROPOSITION</u>. Si $[a,b] \underset{*}{\to} (r)^s_t$ est faux, alors $[a,b] \underset{*}{\to} (r+1)^{s+1}_{t+1}$ est également faux.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Rappelons que s doit être inférieur à r ; soit P une application de $[a,b]^s$ dans $\{0,\dots,t-1\}$ qui n'admet pas de partie homogène dense de cardinalité supérieure ou égale à r. Définissons $P' : [a,b]^{s+1} \to t+1$ par :

$$P'(\alpha_1,\dots,\alpha_{s+1}) = \begin{cases} P(\alpha_1-1,\dots,\alpha_s-1) & \text{si } \alpha_1 \neq a \\ t & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit X un sous-ensemble dense de $[a,b]$ de cardinalité supérieure ou égale à $r+1$. Si $a \in X$, alors X n'est pas homogène pour P' ; en effet, il existe dans $[X]^{s+1}$ une suite u contenant a et une autre v qui ne le contient pas ; alors $P'(u) = t$ et $P'(v) < t$. Si $a \notin X$, posons $X^* = \{\alpha-1 : \alpha \in X \wedge \alpha \neq \max X\}$; alors X^*

est un ensemble dense de cardinalité au moins r ; X^* n'est donc pas homogène pour P ; il en résulte que X n'est pas homogène pour P'. Ceci montre en particulier que $[a,b] \underset{*}{\rightarrow} (2\ c)^c_c$ si et seulement si $c \leq Y(a,b)$.

I.5.- REMARQUES. Nous aurons un raffinement puissant de ce résultat plus loin au moyen de la proposition II.1.

Nous allons voir maintenant que la fonction Y jouit d'une certaine propriété de convexité, à savoir

I.6 $Y(0,x+y) \leq 1 + \max(Y(0,x),Y(x,x+y),2)$.

Posons $c = 1 + \max(Y(0,x),Y(x,x+y),2)$. D'après ce que l'on vient de voir, il existe des applications P et Q de $[0,x]^c$ et $[x,x+y]^c$ dans c n'admettant pas de partie homogène dense de cardinalité au moins 2c. Considérons les applications P' et Q' suivantes de $[0,x]^{c+1}$ et $[x,x+y]^{c+1}$ dans $\{0,\ldots,c\}$

$$P'(\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}) = \begin{cases} P(\alpha_1-1,\ldots,\alpha_c-1) & \text{si } \alpha_1 \neq 0 \\ c & \text{si } \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$Q'(\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}) = \begin{cases} Q(\alpha_1-1,\ldots,\alpha_c-1) & \text{si } \alpha_1 \neq x \\ c & \text{si } \alpha_1 = x \end{cases}$$

Considérons aussi l'application R de $[0,x+y]^{c+1}$ dans $\{0,\ldots,c\}$ définie par

(i) $R = P'$ sur $[0,x]^{c+1}$

(ii) $R = Q'$ sur $[x,x+y]^{c+1}$

(iii) Si $|\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}\} \cap [0,x]| \geq 2$ et si $|\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}\} \cap [x,x+y]| \geq 2$, alors on pose $R(\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}) = |\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}\} \cap [0,x]|$

(iv) Si $\alpha_1 < x < \alpha_2$ ou $\alpha_c < x < \alpha_{c+1}$, on pose $R(\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}) = c$.

Soit X un ensemble dense ayant au moins 2c+2 éléments, et montrons que X n'est pas homogène pour R. Enumérons $X = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{c+2},\ldots,\alpha_\ell\}$. Si $X \subseteq [0,x]$ ou si $X \subseteq [x,x+y]$, la conlcusion est évidente ; sinon et si $X \cap [0,x]$ et $X \cap [x,x+y]$ ont tous deux au moins deux éléments, alors $\alpha_2 < x < \alpha_{\ell-1}$. Il existe donc une suite $u \in X^{c+1}$ qui contient $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{\ell-1}$ et α_ℓ. Remarquons que $c+1 \geq 4$ par définition. Or u n'épuise pas X et l'on peut trouver une autre suite v telle que

$v \cap [0,x]$ ait un élément de plus ou de moins que $u \cap [0,x]$ et par conséquent $R(u) \neq R(v)$. Dans le cas où $\alpha_1 < x < \alpha_2$, il est clair que $R(\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}) = c$ tandis que $R(\alpha_2,\ldots,\alpha_{c+2}) \neq c$; il en est de même si $\alpha_{\ell-1} < x < \alpha_\ell$.

Nous allons démontrer :

I.7.- THÉORÈME. (Paris-Harrington) La fonction $Y(x,y)$ est une indicatrice pour $\mathcal{P}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé, vérifions que

I.8 n $\quad \mathcal{P} \vdash \forall x,u,v \; \exists\, y([x,y] \underset{*}{\to} (u)^{\bar{n}}_v)$.

Pour ce faire, nous devons rappeler tout d'abord la forme infinie du Théorème de Ramsey :

I.9.- THÉORÈME DE RAMSEY (Forme Infinie) Soit $P : [\mathbb{N}]^n \to k$; alors il existe un ensemble homogène infini pour P.

Une analyse de la preuve de ce résultat, voir [P],[J], permet de voir qu'il existe un ensemble infini homogène qui est arithmétiquement définissable à partir de P. En fait, la démonstration "usuelle" donne une partie infinie homogène H pour P qui est Σ^0_{n+1} en P. Dans [J], il est démontré que l'on peut trouver une partie infinie homogène H qui est Π^0_n en P. (Il y est aussi démontré qu'en général on ne peut pas trouver une partie homogène infinie Σ^0_n en P). Pour le système d'axiomes $\mathcal{P}$, ceci veut dire qu'il existe une fonction primitive récursive qui associe à toute formule $\Phi(y_1,\ldots,y_k,v_1,\ldots,v_n,z)$ de $\mathcal{L}$ une formule $\psi(y_1,\ldots,y_k,v,z)$ telle que

$$\text{I.10} \qquad \mathcal{P} \vdash \forall y_1,\ldots,y_k \; \forall z \, [\forall v_1,\ldots,v_n \; \exists!\, u \leq z \; \Phi(y_1,\ldots,y_k,v_1,\ldots,v_n,u)$$

$$\longrightarrow \; \exists\, u \leq z \, [\, \exists^\infty v \, \psi(y_1,\ldots,y_k,v,z) \wedge \forall v_1,\ldots,v_n (\bigwedge_{i=1}^{n} \psi(y_1,\ldots,y_k,v_i,z) \to$$

$$\Phi(y_1,\ldots,y_k,v_1,\ldots,v_n,u))]]$$

Soit M un modèle de $\mathcal{P}$ et soient $a,b,c \in M$ et soit $n \in \mathbb{N}$ l'entier standard fixé, $n \geq 2$. Il s'agit de trouver $d \in M$ tel que $M \models [a,d] \underset{*}{\to} (b)^n_c$. Travaillons dans M : supposons qu'un tel d n'existe pas. Définissons alors par récurrence sur $d \geq a$ une application f_d de $[a,d]$ dans c, prolongeant f_{d-1} et jouissant de la propriété suivante : quel que soit $d' \geq d$, il est possible d'étendre f_d en une application $g : [a,d']^n \to c$ qui n'admet pas d'ensemble homogène dense ayant au moins b éléments. Notre hypothèse nous assure que la fonction vide qui est le seul choix pour f_{a+n-2} satisfait cette condition ; pour définir f_d à partir de f_{d-1}, on remarque d'abord qu'il n'y a qu'un nombre fini d'extensions de f_{d-1} à des fonctions de $[a,d]^n$ dans c ; pour chaque $d' > d$ au moins une de ces extensions peut se prolonger à son tour en une fonction g de $[a,d']^n$ dans c qui n'admet pas d'ensemble homogène dense de cardinalité au moins b ; il existe donc une extension f_d de f_{d-1}, $f_d : [a,d]^n \to c$, qui pour une infinité de $d' > d$ (et donc pour tout $d' > d$) peut s'étendre en une telle fonction g. La suite f_d étant construite, on définit une application F des n-uplets d'entiers dans c en posant $F(x_1,\ldots,x_n) = f_d(x_1,\ldots,x_n)$ pour $d > x_1,\ldots,x_n$. Revenant à l'extérieur de M, nous avons donc une définition de la fonction F par une formule comportant les paramètres a,b,c et n, disons $F(x_1,\ldots,x_n,u,a,b,c)$, telle que

$$M \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \ \exists! \ n \le c \ F(x_1,\ldots,x_n,u,a,b,c).$$

Par I.10, il existe une partie A définissable dans M, non bornée dans M et qui est homogène pour F. Soit α_1 un élément de A qui est plus grand ou égal à a et soit $X = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}$ une suite croissante extraite de A dans M telle que $\ell \ge b,\alpha_1$. Alors

$$M \models X \text{ est dense} \wedge X \text{ est homogène pour } f_{\alpha_\ell}$$

ce qui contredit la construction des f_d.

Le modèle M ayant été arbitraire, nous avons donc démontré que

I.11 $\quad \mathcal{P} \vdash \forall x \ \forall y \ \forall u \ \exists z \ ([x,z] \underset{*}{\to} (u)_y^{\overline{n}})$

La relation $[x,z] \underset{*}{\to} (u)_y^v$ étant Δ_1^o dans $\mathcal{P}$, donc absolue pour les modèles de $\mathcal{P}$, il nous reste à démontrer que $Y(a,b) > \mathbb{N}$ entraîne l'existence de $I \models \mathcal{P}$, $a < I < b$.

Supposons alors que $M \models \mathcal{P}$, que $a,b \in M$ et que $c \in M - \mathbb{N}$ et que l'on ait

$$M \models [a,b] \underset{*}{\to} (2c)_c^c \ .$$

Il faut trouver un segment initial $a < I < b$ qui est un modèle de $\mathcal{P}$. Nous allons supposer que les notions syntactiques -formule variable, etc- ont été formulées en termes arithmétiques, voir [Fe] par exemple ; nous identifions donc les formules et leurs nombres de Gödel. Moyennant cette identification, soit $i \mapsto \varphi_i$ une énumération des formules Δ_o^o de $\mathcal{L}$. Pour ces formules, la relation de satisfaction entre les formules $\varphi_i = \varphi_i(v_1,\ldots,v_\ell)$ et les suites finies d'entiers $\langle n_1,\ldots,n_k\rangle$, $\ell \le k$,

$$S(\varphi_i, \langle n_1,\ldots,n_k\rangle) \equiv \text{la suite } \langle n_1,\ldots,n_k\rangle \text{ satisfait } \varphi_i$$

est une relation récursive, même Δ_1^0 dans $\mathcal{P}$, qui est définie par récurrence sur la complexité logique de φ_i. On vérifie d'ailleurs par induction sur la complexité de φ_i que l'on a pour chaque $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P} \vdash \forall v_1,\ldots,v_k\ [\varphi_i(v_1,\ldots,v_k) \leftrightarrow S(\bar{\varphi}_i, < v_1,\ldots,v_k >)].$$

Soit $\delta > \mathbb{N}$ tel que $M \models 2^\delta \leq c$. Travaillant dans M, posons pour $i < \delta$ et $X = \{x_1,\ldots,x_c\} \in [a,b]^c$, $f(i,x) = 0$ si $S(\varphi_i, < x_1,\ldots,x_c >)$, 1 sinon. On obtient donc une partition de $[a,b]^c$ en $2^\delta \leq c$ classes en posant

$$f(x) = <f(0,x),\ldots,f(\delta-1,x)>$$

Soit H' une partie de [a,b] homogène dense pour f de cardinalité $\geq 2c$, posons $H' = \{e_1,\ldots,e_{\ell'}\}$. Soit $\ell = E(\frac{1}{2}\ \ell')$, la partie entière de $\frac{1}{2}\ \ell'$ et soit $H = \{e_1,\ldots,e_\ell\}$; évidemment, $\ell \geq c$ et $2\ell + 1 \geq e_1$.

Revenant à l'extérieur de M, notons que H est un ensemble d'indiscernables pour les formules φ_i, $i \in \mathbb{N}$: soient $s = \{e_{s_1},\ldots,e_{s_k}\}$ et $t = \{e_{t_1},\ldots,e_{t_k}\}$ deux suites croissantes extraites de H, et soit $\varphi_i = \varphi_i(v_1,\ldots,v_k)$, alors

I.12 $\quad M \models \varphi_i(e_{s_1},\ldots,e_{s_k}) \leftrightarrow \varphi_i(e_{t_1},\ldots,e_{t_k})$

Pour le voir, on remarque que les suites s et t se prolongent dans M dans des suites $x = \{e_{s_1},\ldots,e_{s_k},\ldots\}$ et $y = \{e_{t_1},\ldots,e_{t_k},\ldots\}$ de longueur c extraites de H et que $M \models f(i,x) = f(i,y)$. On va maintenant montrer que $H - \{e_1\} = \{e_2,e_3,\ldots\}$ est un ensemble d'indiscernables pour les formules Δ_0^0 à paramètres inférieurs ou égaux à e_1. Raisonnons par l'absurde, et soit n le plus petit nombre de paramètres $< e_1$ nécessaire pour distinguer deux suites croissantes d'éléments de $H - \{e_1\}$ de même longueur par une formule Δ_0^0. Par l'indiscernabilité (I.12), on a $n > 0$. On suppose donc qu'il existe $d_1,\ldots,d_n < e_1$ et une formule ψ à quantification bornée tels que

$$M \models \neg [\psi(e_1,d_1,\ldots,d_n,e_{s_1},\ldots,e_{s_k}) \leftrightarrow \psi(e_1,d_1,\ldots,d_n,e_{t_1},\ldots,e_{t_k})]$$

pour deux suites $e_{s_1} <\ldots< e_{s_k}$, $e_{t_1} <\ldots< e_{t_k}$ avec $e_1 < e_{s_1}$, $e_1 < e_{t_1}$. Dans la suite, on pose $s = \{e_{s_1},\ldots,e_{s_k}\}$, $t = \{e_{t_1},\ldots,e_{t_k}\}$, et on écrit $s < t$ pour signifier que $e_{s_k} < e_{t_1}$ et $\varphi(s)$ pour abréger $\varphi(e_{s_1},\ldots,e_{s_k})$. On voit donc qu'il existe des suites s et t qui vérifient

I.13 $\quad M \models \exists v_1 < e_1 \ldots \exists v_n < e_1 [\neg (\varphi(v_1,\ldots,v_n,s) \leftrightarrow \psi(v_1,\ldots,v_n,t))]$

Par l'indiscernabilité de H, on peut supposer que les suites vérifiant I.13 sont extraites de $\{e_2,\ldots,e_{2k+1}\}$. En posant $u = \{e_{2k+2},\ldots,e_{3k+1}\}$ on a

soit $M \models \neg [\psi(e_1,d_1,\ldots,d_n,s) \leftrightarrow \psi(e_1,d_1,\ldots,d_n,u)]$

soit $M \models \neg [\psi(e_1,d_1,\ldots,d_n,t) \leftrightarrow \psi(e_1,d_1,\ldots,d_n,u)]$

ce qui nous permet de supposer que dans I.13, les suites s et t satisfont en plus $s < t$. Divisons d_1 par 5k pour trouver $d_1 = 5k\delta_1 + \varepsilon_1$, avec $\delta_1 \leq \frac{d_1}{5k}$ et $\varepsilon_1 < 5k$; donc $\varepsilon_1 \in \mathbb{N}$. Nous avons alors

$$M \models \exists v_1 < \frac{e_1}{5k} [(\psi(e_1,5k_1 + \varepsilon_1,d_2,\ldots,d_n,s) \leftrightarrow \psi(e_1,5kv_1 + \varepsilon_1,d_2,\ldots,d_n t))]$$

Posons $\varphi(e_1,v_1,\ldots,v_n,s) \equiv \psi(e_1,5kv_1 + \varepsilon_1,v_2,\ldots,v_n,s)$. D'après le choix de l'entier n, si s' et t' sont dans $[H - \{e_1\}]^k$, et si $s' < t'$, on doit avoir $M \models A(e_1,d_2,\ldots,d_n,s',t')$ pour toute formule A à quantification bornée telle que $M \models A(e_1,d_2,\ldots,d_n,s,t)$. Par suite

$$M \models \exists v_1 < \frac{e_1}{5k} [\neg [\varphi(e_1,v_1,d_2,\ldots,d_n,s') \leftrightarrow \varphi(e_1,v_1,d_2,\ldots,d_n,t')]]$$

Posons
$$s_1 = \{e_2,\ldots,e_{k+1}\}$$
$$s_2 = \{e_{k+2},\ldots,e_{2k+1}\}$$
$$\vdots$$
$$s_{2\alpha} = \{e_{(2\alpha-1)k+2},\ldots,e_{2\alpha k+1}\}$$

avec $\alpha = E(\frac{\ell-1}{2k})$. Evidemment, le fait que $k \in \mathbb{N}$, $e_1 \notin \mathbb{N}$ et $2\ell+1 \geq e_1$ entraîne $\alpha > \frac{e_1}{5k}$. Considérons la fonction π à 2k arguments

$$\pi(s,t) = \mu x [x < \frac{e_1}{5k} \wedge (\neg \varphi(e_1,x,d_2,\ldots,d_n,s) \leftrightarrow \varphi(e_1,x,d_2,\ldots,d_n,t))]$$

Alors la suite $\pi(s_{2i-1},s_{2i})$, $1 \leq i \leq \alpha$, prend des valeurs inférieures à $E(\frac{e_1}{5k})$; du fait que $\alpha > \frac{e_1}{5k}$, il en découle qu'il existe $1 \leq i < j \leq \alpha$ tels que

$$\pi(s_{2i-1},s_{2i}) = \pi(s_{2j-1},s_{2j}) .$$

Or, la fonction π est définie au moyen d'une formule Δ_o^o à paramètres e_1 et $d_2,\ldots,d_n$; par le choix de n, pour tous $i < j < i' < j'$ dans $[1,2\alpha]$, on doit avoir $\pi(s_i,s_j) = \pi(s_{i'},s_{j'})$. Posons $d = \pi(s_1,s_2) = \pi(s_3,s_4) = \pi(s_4,s_5)$. Alors nous avons

$$M \models \neg[\varphi(e_1,d,d_2,\ldots,d_n,s_3) \leftrightarrow \varphi(e_1,d,d_2,\ldots,d_n,s_4)]$$

$$M \models \neg[\varphi(e_1,d,d_2,\ldots,d_n,s_3) \leftrightarrow \varphi(e_1,d,d_2,\ldots,d_n,s_5)]$$

$$M \models \neg[\varphi(e_1,d,d_2,\ldots,d_n,s_4) \leftrightarrow \varphi(e_1,d,d_2,\ldots,d_n,s_5)]$$

ce qui est absurde et ce qui termine la démonstration.

Utilisant de nouveau l'indiscernabilité I.12 des éléments de H, nous concluons que, pour $m \in \mathbb{N}$ les éléments de $H - \{e_1,\ldots,e_m\}$ sont indiscernables pour les formules Δ_o^o à paramètres inférieurs ou égaux à e_m.

Le lemme étant établi, posons $I = \{a \in M$: il existe $n \in \mathbb{N}$, $a < e_n\}$; nous disons que $I \models \mathcal{P}$. Tout d'abord, remarquons que I est clos pour la multiplication et donc pour l'addition : si $e_n^2 \geq e_{n+1}$, on aurait $e_{n+1} = e_n \cdot \mu + \lambda$ avec $\mu;\lambda \leq e_n$ et $e_{n+2} \neq e_n \cdot \mu+\lambda$, contrairement à l'indiscernabilité des e_k, $k \in \mathbb{N}$.

I.14.- <u>LEMME DE VÉRITÉ</u>. Soit $E(y_1,\ldots,y_m) = Q v_n \ldots Q v_1 F(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ où F est sans quantificateur et Qv_i est soit $\forall v_i$, soit $\exists x_i, 1 \leq i \leq n$. Alors pour tous $a_1,\ldots,a_m \in I$, pour tous $e_{i_1} > \ldots > e_{i_n} > I$, on a

$$I \models E(a_1,\ldots,a_m) \Longleftrightarrow M \models Qv_n < e_{i_n} \ldots Qv_1 < e_{i_1} F(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m).$$

<u>Démonstration</u>. Par récurrence sur n. Pour fixer les idées, supposons $Qv_{n+1} = \forall v_{n+1}$ et que $a_1,\ldots,a_m < e_k$. Alors

$$I \models \forall b\, Qv_n \ldots Qv_1\, F(v_1,\ldots,v_n,b,a_1,\ldots,a_m) \Longleftrightarrow \text{pour tout } s \geq k,\ s \in \mathbb{N},$$

$$I \models \forall b < e_{s+1} Qv_n \ldots Qv_1\, F(v_1,\ldots,v_n,b,a_1,\ldots,a_m)$$

$$\Longleftrightarrow \text{(par l'hypothèse de récurrence) pour tout } s \geq k,$$

$$M \models \forall v_{n+1} < e_{s+1}\, Qv_n < e_{i_n} \ldots Qv_1 < e_{i_1}\, F(v_1,\ldots,v_n,v_{n+1},a_1,\ldots,a_m)$$

$$\Longleftrightarrow \text{(indiscernabilité) pour tout } e_{i_{n+1}}, e_k < e_{i_{n+1}} < e_{i_n}$$

$$M \models \forall v_{n+1} < e_{i_{n+1}} Qv_n < e_{i_n} \ldots Qv_1 < e_{i_1} F(v_1,\ldots,v_{n+1},a_1,\ldots,a_m).$$

Le lemme prouvé, quelques remarques termineront la démonstration. Le segment $I < M$ est clos pour l'addition et la multiplication de M ; les axiomes sur les fonctions primitives de $\mathcal{P}$ sont universels et donc automatiquement satisfaits dans I. Le schéma d'induction ou ce qui lui est équivalent, le principe de l'élément minimum, est satisfait dans I parce que d'après le Lemme de Vérité, toute partie X définissable de I est la restriction à I d'une partie définissable $\overline{X}$ de M ; l'élément minimum de $\overline{X}$ est donc l'élément minimum de X.

CQFD.

Par les résultats de l'exposé précédent, nous avons comme corollaire du Théorème de Paris-Harrington :

I.15.- <u>COROLLAIRE</u>. L'énoncé $\forall x \forall y \forall z([x,z] \underset{*}{\to} (2y)^y_y)$ est satisfait dans $\mathbb{N}$, mais il n'est pas prouvable dans $\mathcal{P} + \mathcal{T}_1$.

Il est clair, d'après la convexité de la fonction Y que nous avons

I.16.- <u>COROLLAIRE</u>. Dans $\mathcal{P} + \mathcal{T}_1$ on ne peut prouver l'énoncé $\forall m,n,k \exists \ell \ (\ell \underset{*}{\to} (m)^n_k)$.

II.- <u>RAFFINEMENTS ET APPLICATION</u>

Nous allons voir maintenant quelques raffinements des résultats que nous venons d'obtenir. Pour k entier, notons $\sqrt{k}$ le plus petit entier n tel que $n^2 \geq k$. On voit aisément (et dans $\mathcal{P}$) que pour $k > 7$, $1 + 2\sqrt{k} < k$. La proposition suivante est aussi démontrable dans $\mathcal{P}$ et elle est effectivement démontrée dans [P,H].

II.1.- <u>PROPOSITION</u>. (i) Soit $P : [X]^n \to k$ et soit $H \subseteq X$. Pour que H soit homogène pour P il faut et il suffit que toutes les parties de H à n+1 éléments soient homogènes pour P

(ii) Soit $P : [X]^n \to k$; alors il existe $P' : [X]^{n+1} \to 1 + 2\sqrt{k}$ telle que pour toute $H \subseteq X$, $|H| \geq n+2$, si H est homogène pour P' alors H est homogène pour P.

<u>Démonstration</u>.- (i) Supposons que $H = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}$ n'est pas homogène pour P ; ordonnons les suites croissantes de longueur n lexicographiquement et soit $\beta_1 < \ldots < \beta_n$ la première suite extraite de H telle que $P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \neq P(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ et soit k le premier entier tel que $\alpha_k \neq \beta_k$. Alors $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_k,\ldots,\beta_n\}$ n'est pas homogène pour P.

(ii) Soit $m = \sqrt{k}$. Rappelons notre convention $k = \{0,\dots,k-1\}$; $\ell \le k-1$ s'écrit $\ell = m.g+r$ où $g < m$, $r < m$. On définit deux applications $Q : [X]^n \to m$ et $R : [X]^n \to m$ par

$$P(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = m \, . \, Q(\alpha_1,\dots,\alpha_n) + R(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

et on définit $P' : [X]^{n+1} \to 1 + 2m$ par

$$P'(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\} \text{ est homogène pour } P \\ 1 + R(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \text{ si } \{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\} \text{ est homogène} \\ \qquad \text{pour } Q \text{ mais pas pour } P \\ 1 + m + Q(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \text{ si autrement.} \end{cases}$$

Soit $H = \{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+2}\}$ une partie homogène pour P'. Nous disons que $P'(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) = 0$. Supposons que $P'(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) = 1+m+s_o$; alors pour $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_n}$ extraits de $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}$, on a $P'(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_n},\alpha_{n+2}) = 1+m+s_o$ ce qui veut dire que $Q(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_n}) = s_o$; ceci est impossible parce qu'alors $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}$ est homogène pour Q.

Pour finir, supposons que $P'(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) = 1+s_1$, $s_1 < m$, alors $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}$ est homogène pour Q et pour R et donc pour P, ce qui est de nouveau une contradiction. C.Q.F.D

Posons $\theta(n) = m \iff m$ est le plus grand entier tel que $1+2\sqrt{m} \le n$. Pour $n \ge 7$, nous avons $\theta(n) > n$, donc la suite itérée $\theta^{(t)}(n)$ pour $n \ge 7$ est strictement croissante. Par la Proposition 1, on a que $[a,b] \underset{\star}{\to} (r)^s_n$ entraîne $[a,b] \underset{\star}{\to} (r)^{s-1}_{\theta(n)}$; en itérant on trouve que $[a,b] \underset{\star}{\to} (r)^s_n$ entraîne $[a,b] \underset{\star}{\to} (r)^{s-t}_{\theta^{(t)}(n)}$. Donc si $\theta^{(t)}(7) \ge k$ et si $s-t \ge n$ et $s+1 \ge m$, alors $\ell \underset{\star}{\to} (s+1)^s_7$ entraîne $\ell \underset{\star}{\to} (m)^n_k$.

Nous avons donc

$$\mathcal{P} \vdash \forall n \, \exists \ell \, (\ell \underset{\star}{\to} (n+1)^n_7) \to \forall m,n,k \, \exists \ell \, (\ell \underset{\star}{\to} (m)^n_k)$$

d'où

II.2 $\quad \mathcal{P} \vdash \mathcal{C}_1 \nvdash \forall n \, \exists \ell \, (\ell \underset{\star}{\to} (n+1)^n_7$.

D'autres raffinements sont aussi possibles - par exemple, définissons relation $\xrightarrow[\sqrt{\star}]{}$ en demandant que la partie homogène H satisfasse $|H| \geq \sqrt{\min H}$; alors on peut voir que la relation $[a,b] \xrightarrow[\sqrt{\star}]{} (2c)^c_c$ donne aussi une indicatrice pour P et donc, en raisonnant comme ci-dessus,

II.3 $\quad \mathcal{P} + \mathcal{C}_1 \nvdash \forall n \; \exists \ell (\ell \xrightarrow[\sqrt{\star}]{} (n+1)^n_7)$.

Nous terminons cet exposé avec quelques applications de ces résultats aux fonctions récursives prouvables (voir la fin du § 1 du premier exposé).

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto$ le plus petit ℓ tel que $\ell \underset{\star}{\to} (n+1)^n_n$. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction récursive prouvable. Nous disons qu'il existe uun entier k_f tel que $\sigma(x) \geq f(x)$ quel que soit $x \geq k_f$. Pour arriver à une contradiction, supposons que $X = \{x \in \mathbb{N} : f(x) > \sigma(x)\}$ soit infini. Reprenons alors la démonstration du Théorème de Mac Dowell-Specker, I.1,en imposant $X = X_o$, ce qui assure $X \in \mathcal{U}$. On obtient alors $M \succ_e \mathbb{N}$ tel que $M \models f(c) > \sigma(c)$ ou c est le point infini représenté dans l'ultrapuissance par la fonction identité. Par la convexité, voir I.6, de $\underset{\star}{\to}$ on a $M \models [c,\sigma(c)] \underset{\star}{\to} (c)^{c-1}_{c-1}$. Alors il existe un segment initial I de M tel que $c < I < \sigma^M(c)$ et $I \models \mathcal{P}$, cependant, $f^M(c) > I$ ce qui contredit l'hypothèse que f est une fonction absolue. Le lecteur se convaincra facilement qu'il en est de même pour la fonction $\tau : n \mapsto$ le plus petit ℓ tel que $\ell \underset{\star}{\to} (n+1)^n_7$.

Soit $P_1, P_2, \ldots$ une énumération des axiomes de $\mathcal{P}$. En examinant la preuve du Théorème I.14, on voit que pour chaque entier s, il existe n = n(s) tel que $\bigwedge_{i \in s} P_i \nvdash \forall m \; \exists \ell (\ell \underset{\star}{\to} (m)^{\overline{n}}_m)$ et même que la fonction $\sigma_s(m)$ = le plus petit ℓ tel que $\ell \underset{\star}{\to} (m)^{n_s}_m$ majore finalement toutes les fonctions récursives prouvables dans $\bigwedge_{i \leq s} P_i$. Ce résultat fut noté en premier lieu par Solovay qui utilisait une analyse des fonctions récursives prouvables en termes de la hiérarchie de GregorcyckWainer, [S].Plus récemment, Paris utilisant les travaux de Ketonen et Solovay, [K.S] , a démontré des résultats optimaux dans ce sens, voir [P,ter] .

BIBLIOGRAPHIE

[Fe] S. Feferman, Arithmetization of metamathematics in a general setting, F.M. 49.

[J] C. Jockusch, Ramsey's Theorem and recursion theory, JSL 37

[K.S] J. Ketonen and R. Solovay, Rapidly growing Ramsey functions, à paraître.

[M] K. Mc Aloon, Formes combinatoires du Théorème d'Incomplétude, Séminaire Bourbaki 1977-78, SLN

[P] J. Paris, On models of arithmetic, Proceedings of the London Logic Conference, 1970, SLN.

[P.bis] J. Paris, Some in dependence results for Peano arithmetic, JSL 1978.

[P.ter] J. Paris, A hierarchy of cuts for models of arithmetic, à paraître.

[P.H] J. Paris and L. Harrington, A mathematical incompleteness in Peano's arithmetic, Handbook of Mathematical Logic, North-Holland

[S] R. Solovay, Fast growing Ramsey functions, manuscrit.

[E.R] P. Erdös et R. Rado, Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set, Proc. London Math. Soc. (3) 2 (1952).