

Astérisque

JEAN-PIERRE SERRE

**Appendice II : Quelques propriétés des groupes
algébriques commutatifs**

Astérisque, tome 69-70 (1979), p. 191-202

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__69-70__191_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Appendice II

Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs

par

Jean-Pierre SERRE

Soit G un groupe algébrique commutatif connexe sur un corps k de caractéristique 0 . Dans les pages qui précèdent, M. Waldschmidt et D. Bertrand utilisent les propriétés suivantes du groupe G :

- 1) existence d'une compactification projective lisse ;
- 2) croissance au plus quadratique de la fonction hauteur, lorsque k est algébrique sur $\mathbb{Q}$;
- 3) uniformisation par des fonctions entières d'ordre ≤ 2 , lorsque $k = \mathbb{C}$.

Ce sont ces propriétés que je me propose de démontrer. La méthode suivie, inspirée de Severi [Sev] et Weil [We 1], consiste à se ramener, par une fibration convenable, aux deux cas particuliers déjà connus : celui où G est un groupe linéaire, et celui où G est une variété abélienne.

§ 1. Compactification de G

1.1. Le groupe L

On sait ([Ba 1], [Ros 1]) que G possède un plus grand sous-groupe linéaire connexe L . Le groupe L se décompose en $L = L_u \times L_m$, où L_u est unipotent et L_m est de type multiplicatif. Pour simplifier, nous supposons (*) que L_m est déployé sur k , i.e. produit de groupes isomorphes au groupe multiplicatif G_m (on peut toujours se ramener à ce cas par extension finie du corps de base). Comme L_u est produit de groupes isomorphes au groupe additif G_a (loc.cit.), on peut écrire L comme un produit

$$L = \prod_{\alpha} L_{\alpha},$$

(*) On pourrait se débarrasser de cette hypothèse en utilisant les compactifications de L_m construites par J.-L. Brylinski (C.R.A.S., 288, 1979, p. 137-139).

où les L_α sont égaux à G_a ou à G_m . Dans ce qui suit, nous choisirons une telle décomposition.

1.2. Compactification de L

Soit $\bar{L}_\alpha$ l'unique courbe lisse, complète et connexe contenant L_α . On peut identifier $\bar{L}_\alpha$ à la droite projective P_1 ; on a

$$\bar{L}_\alpha - L_\alpha = \{\infty\} \text{ si } L_\alpha = G_a \text{ et } \bar{L}_\alpha - L_\alpha = \{0, \infty\} \text{ si } L_\alpha = G_m.$$

Nous choisirons pour compactification de L le produit

$$\bar{L} = \prod_{\alpha} \bar{L}_\alpha.$$

Soit $L^\infty = \bar{L} - L$; on a :

$$L^\infty = \bigcup_{\alpha} L_{\alpha}^{\infty}, \text{ où } L_{\alpha}^{\infty} = \{\bar{L}_\alpha - L_\alpha\} \times \prod_{\beta \neq \alpha} \bar{L}_\beta.$$

(Noter que $\bar{L}$ et L^∞ dépendent de la décomposition $L = \prod L_\alpha$ choisie.)

1.3. Construction de $\bar{G}$

Soit $A = G/L$. Le groupe A est une variété abélienne, et la projection canonique $p : G \rightarrow A$ fait de G un espace fibré principal localement trivial, de base A et de groupe structural L (cf. [Ros 1]). Or la loi de composition $L \times L \rightarrow L$ se prolonge en $L \times \bar{L} \rightarrow \bar{L}$, autrement dit définit une action de L sur $\bar{L}$. On peut donc parler de l'espace fibré $\bar{G} = G \times^L \bar{L}$ associé à l'espace fibré principal G , et de fibre type $\bar{L}$. (Si G s'obtient en "recollant" des $U_i \times L$, où les U_i sont des ouverts de A , $\bar{G}$ s'obtient en recollant les $U_i \times \bar{L}$.) Nous noterons encore par p la projection de l'espace fibré $\bar{G}$ sur sa base A . Comme A et $\bar{L}$ sont complètes et lisses, il en est de même de $\bar{G}$. De plus, l'injection $L \rightarrow \bar{L}$ définit un plongement de G dans $\bar{G}$ qui identifie G à un ouvert dense de $\bar{G}$; ainsi, $\bar{G}$ est une compactification lisse de G .

La loi de composition $G \times G \rightarrow G$ se prolonge en $G \times \bar{G} \rightarrow \bar{G}$, autrement dit définit une action de G sur $\bar{G}$; cela résulte de la propriété analogue pour L et $\bar{L}$. En particulier, tout champ de vecteurs invariant sur G se prolonge à $\bar{G}$; si U est un ouvert affine de $\bar{G}$, un tel champ définit une dérivation de l'algèbre affine de U .

1.4. Diviseurs et plongements projectifs de $\bar{G}$

Chacun des L_α^∞ définit une sous-variété $G_\alpha^\infty = G \times^L L_\alpha^\infty$ de $\bar{G}$. Si l'on pose $G^\infty = \bigcup_{\alpha} G_\alpha^\infty$, on a $G^\infty = \bar{G} - G$; c'est la sous-variété "à l'infini" de $\bar{G}$. Chacune des composantes irréductibles des G_α^∞ et de G^∞ est de codimension 1; cela permet d'identifier les G_α^∞ et G^∞ à des diviseurs positifs de $\bar{G}$.

Soit d'autre part D un diviseur de A , et soit $\tilde{D} = p^*(D)$ son image réciproque

par $p : \bar{G} \rightarrow A$. Si a et b sont des entiers, notons $D_{a,b}$ le diviseur $a\tilde{D} + bG^\infty$.

PROPOSITION 1 - Supposons D ample. Il existe alors des entiers $a \geq 1$ et $b \geq 1$ tels que le diviseur $D_{a,b} = a\tilde{D} + bG^\infty$ de $\bar{G}$ soit ample.

Il est clair que L^∞ est un diviseur ample (et même très ample) de $\bar{L}$. Comme $G^\infty = G \times^L L^\infty$, il en résulte que G^∞ est relativement ample vis-à-vis de $p : \bar{G} \rightarrow A$, au sens de Grothendieck, EGA II.4.6. La prop.1 s'en déduit en appliquant EGA II.4.6.13.(ii).

COROLLAIRE - Il existe des entiers $a \geq 1$ et $b \geq 1$ tels que $D_{a,b}$ soit très ample, et que le plongement projectif de $\bar{G}$ défini par la série linéaire complète $|D_{a,b}|$ transforme $\bar{G}$ en une variété projectivement normale.

Si (a,b) est un couple d'entiers satisfaisant aux conditions de la prop.1, tout multiple assez grand de (a,b) a les propriétés énoncées dans le corollaire ; cela se voit en appliquant des résultats standard sur les diviseurs amples et très amples, cf. [H], chap.II, §§ 5,6,7 et exerc.5.14.

Remarques

1) On peut préciser la prop.1, et prouver que $D_{a,b}$ est ample (resp. très ample) pour tout couple (a,b) tel que $a \geq 1$ (resp. $a \geq 3$) et $b \geq 1$.

2) Soit $E_{a,b}$ le fibré de rang 1 associé au diviseur $D_{a,b}$ et soit $S_{a,b} = H^0(\bar{G}, E_{a,b})$ l'espace des sections de ce fibré. (Un élément de $S_{a,b}$ peut être identifié à une fonction rationnelle f sur $\bar{G}$ telle que $(f) \geq -D_{a,b}$.) Soit $\{X_0, \dots, X_N\}$ une base de $S_{a,b}$. Le cor. à la prop.1 revient à dire que l'on peut choisir $a \geq 1$ et $b \geq 1$ tels que :

- (i) les sections $(X_0, \dots, X_N)$ ne s'annulent simultanément en aucun point de $\bar{G}$;
- (ii) si P_N est l'espace projectif de dimension N , le morphisme $X : \bar{G} \rightarrow P_N$ défini par $(X_0, \dots, X_N)$ est un plongement ;
- (iii) pour qu'un diviseur positif $\mathfrak{F}$ de $\bar{G}$ soit linéairement équivalent à $mD_{a,b}$ (avec $m \geq 1$), il faut et il suffit qu'il existe un polynôme homogène $\varphi(X_0, \dots, X_N)$ de degré m , non identiquement nul sur $\bar{G}$, dont le diviseur des zéros soit $\mathfrak{F}$. (Autrement dit, pour tout $m \geq 1$, les hypersurfaces de degré m de P_N découpent sur $\bar{G}$ la série linéaire complète $|mD_{a,b}|$.)

1.5. Une propriété des endomorphismes $[n]_G$

Soit n un entier $\neq 0$. Notons $[n]_G$ (resp. $[n]_A, [n]_L$) l'endomorphisme $x \mapsto nx$ de G (resp. A, L).

PROPOSITION 2 - Les morphismes $[n]_{\bar{L}} : \bar{L} \rightarrow \bar{L}$ et $[n]_{\bar{G}} : \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ se prolongent en des morphismes

$$[n]_{\bar{L}} : \bar{L} \rightarrow \bar{L} \text{ et } [n]_{\bar{G}} : \bar{G} \rightarrow \bar{G}.$$

L'assertion relative à $\bar{L}$ se vérifie aussitôt sur la décomposition $\bar{L} = \prod \bar{L}_{\alpha}$. Celle relative à $\bar{G}$ se ramène à la précédente grâce à la fibration de $\bar{G}$ sur $\bar{A}$ de fibre $\bar{L}$.

La proposition suivante indique quelle est l'image réciproque par $[n]_{\bar{G}} : \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ des diviseurs G_{α}^{∞} et $\tilde{D}$ définis au n° 1.4.

PROPOSITION 3 - (a) Si $L_{\alpha} = G_a$, on a $[n]_{\bar{G}}^*(G_{\alpha}^{\infty}) = G_{\alpha}^{\infty}$.

(b) Si $L_{\alpha} = G_m$, on a $[n]_{\bar{G}}^*(G_{\alpha}^{\infty}) = |n| G_{\alpha}^{\infty}$.

(c) Soit D un diviseur de A dont la classe d'équivalence soit symétrique (i.e. invariante par $x \mapsto -x$). On a les équivalences linéaires suivantes :

$$[n]_{\bar{A}}^*(D) \sim n^2 D \text{ et } [n]_{\bar{G}}^*(\tilde{D}) \sim n^2 \tilde{D}.$$

Les assertions (a) et (b) se ramènent, grâce à la fibration de $\bar{G}$, aux assertions analogues pour $\bar{L}$, lesquelles se vérifient par calcul direct. En ce qui concerne (c), la formule relative à $[n]_{\bar{A}}$ est bien connue ([Mu], p.59, cor.3), et celle relative à $[n]_{\bar{G}}$ s'en déduit en appliquant p^* aux deux membres.

Soient a et b des entiers. Posons, comme au n° 1.4 :

$$D_{a,b} = a\tilde{D} + bG^{\infty} = a\tilde{D} + b \sum_{\alpha} G_{\alpha}^{\infty}.$$

COROLLAIRE 1 - On a

$$[n]_{\bar{G}}^*(D_{a,b}) \sim n^2 D_{a,b} - b Z_n,$$

où Z_n est un diviseur positif de $\bar{G}$ à support contenu dans G^{∞} .

D'après la prop.3, on a

$$[n]_{\bar{G}}^*(D_{a,b}) \sim n^2 a\tilde{D} + b \sum_{\alpha} c_{\alpha,n} G_{\alpha}^{\infty},$$

où $c_{\alpha,n}$ est égal à 1 si $L_{\alpha} = G_a$, et à $|n|$ si $L_{\alpha} = G_m$. Le corollaire en résulte, en posant

$$Z_n = \sum_{\alpha} (n^2 - c_{\alpha,n}) G_{\alpha}^{\infty}.$$

Supposons maintenant maintenant que D soit ample, que les entiers a et b soient ≥ 1 , et que les propriétés (i), (ii), (iii) de la Remarque 2) du n° 1.4 soient satisfaites. Identifions $\bar{G}$ à une sous-variété de P_N grâce à $X = (X_0, \dots, X_N)$. Sous ces hypothèses, on a :

COROLLAIRE 2 - Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $N+1$ polynômes

$$\varphi_0^{(n)}(X_0, \dots, X_N), \dots, \varphi_N^{(n)}(X_0, \dots, X_N),$$

homogènes de degré n^2 , à coefficients dans k , ne s'annulant simultanément en aucun point de G , et tels que, pour tout point $x = (x_0, \dots, x_N)$ de G , on ait

$$(*) \quad [n]_G(x) = (\varphi_0^{(n)}(x), \dots, \varphi_N^{(n)}(x)).$$

Cela se déduit sans difficulté du cor.1. Indiquons rapidement comment. Soit H_i le diviseur de $\bar{G}$ découpé par l'hyperplan $X_i = 0$ de P_N , et soit $H_{i,n} = [n]_G^*(H_i)$ son image réciproque par $[n]_G$. D'après le cor.1, on a

$$H_{i,n} + bZ_n \sim n^2 D_{a,b}.$$

Vu la propriété (iii), il existe un polynôme homogène $\varphi_i^{(n)}(X)$ de degré n^2 dont le diviseur des zéros est $H_{i,n} + bZ_n$. Quitte à multiplier les $\varphi_i^{(n)}$ par des scalaires, on peut s'arranger pour que, pour tout couple (i,j) , la fonction rationnelle $\varphi_i^{(n)} / \varphi_j^{(n)}$ soit l'image réciproque de la fonction X_i / X_j par $[n]_G$. On constate alors que les $\varphi_i^{(n)}$ répondent à la question.

Remarque. Lorsque $|n| \geq 2$, le support de Z_n est égal à G^∞ , et les $\varphi_i^{(n)}(X)$ sont tous nuls sur G^∞ . Cela montre que la formule $(*)$ ne s'étend pas aux points de G^∞ .

§ 2. Hauteurs

Dans ce §, on suppose k algébrique sur $\mathbb{Q}$.

2.1. Rappels

Si $x \in P_N(k)$ est un point rationnel de l'espace projectif P_N , on note $h(x)$ la hauteur logarithmique normalisée de x (cf. par exemple Waldschmidt, I, 1.d) ; c'est un nombre réel ≥ 0 , invariant par extension des scalaires. Si V est une k -variété, et si $\varphi : V \rightarrow P_N$ est un morphisme de V dans P_N , on note

$$h_\varphi : V(k) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

la fonction définie par $h_\varphi(x) = h(\varphi(x))$.

Supposons V projective. Deux fonctions réelles f et f' sur $V(k)$ sont dites équivalentes (ce que l'on écrit $f \sim f'$) si $|f - f'|$ est bornée. A tout diviseur de Cartier Δ de V , on peut attacher une fonction $h_\Delta : V(k) \rightarrow \mathbb{R}$, définie à équivalence près (au sens ci-dessus), et caractérisée par les propriétés :

- (i) h_{Δ} ne dépend que de la classe d'équivalence linéaire de Δ ;
- (ii) $h_{\Delta} + h_{\Delta'} \sim h_{\Delta + \Delta'}$;
- (iii) Si $\varphi : V \rightarrow P_N$ est un morphisme, et si Δ est l'image réciproque par φ d'un hyperplan de P_N , on a

$$h_{\varphi} \sim h_{\Delta} .$$

2.2. Hauteur sur $\bar{G}$ relativement à $D_{a,b}$

On revient aux notations du § 1. En particulier, on choisit un diviseur ample D de $A = G/L$ dont la classe d'équivalence soit symétrique (cf. prop.3) et l'on choisit des entiers $a, b \geq 1$ tels que le diviseur $D_{a,b} = a\tilde{D} + bG^{\infty}$ soit très ample. On note

$$\varphi : \bar{G} \rightarrow P_N$$

un plongement projectif de $\bar{G}$ correspondant à la série linéaire $|D_{a,b}|$, cf. n°1.4. On s'intéresse à la fonction hauteur h_{φ} relative à φ . Puisque $D_{a,b} = a\tilde{D} + bG^{\infty}$, on a

$$h_{\varphi} \sim ah_{\tilde{D}} + bh_{G^{\infty}}$$

et l'on est ramené à étudier les deux fonctions $h_{\tilde{D}}$ et $h_{G^{\infty}}$.

(1) La fonction $h_{\tilde{D}}$

On a $\tilde{D} = p^*(D)$, où p désigne la projection de $\bar{G}$ sur A . Il en résulte que $h_{\tilde{D}} \sim h_D \circ p$, où h_D est la fonction hauteur sur A relativement au diviseur D . D'après Néron [N1] on peut choisir h_D dans sa classe d'équivalence de telle sorte que ce soit une forme quadratique sur le groupe $A(k)$, et ce choix est unique. On a $h_D(x) = 0$ si $x \in A(k)$ est d'ordre fini, et $h_D(x) > 0$ sinon. Quitte à remplacer $h_{\tilde{D}}$ par une fonction équivalente, on peut supposer que $h_{\tilde{D}} = h_D \circ p$, et l'on voit alors que $h_{\tilde{D}}$ est une forme quadratique sur $G(k)$, à valeurs ≥ 0 , invariante par translation par $L(k)$.

(2) La fonction $h_{G^{\infty}}$

Cette fonction est "presque" invariante par translation :

LEMME 1 - Pour tout $x_0 \in G(k)$, les fonctions

$$x \mapsto h_{G^{\infty}}(x) \quad \text{et} \quad x \mapsto h_{G^{\infty}}(x + x_0)$$

sont équivalentes.

Soit f l'automorphisme $x \mapsto x + x_0$ de la variété G . On a vu au n° 1.3 que f se prolonge en un automorphisme de $\bar{G}$, et l'on a $f^*(G^{\infty}) = G^{\infty}$. Il en résulte que

$$h_{G^{\infty}} \circ f \sim h_{G^{\infty}} ,$$

d'où le lemme.

LEMME 2 - Soient $x_1, \dots, x_m$ des éléments de $G(k)$. Il existe des nombres réels A et B tels que

$$|h_{G^\infty}(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m)| \leq A + B \sum |n_i| \quad \text{pour tout } (n_i) \in \mathbb{Z}^m.$$

Le lemme 1 montre qu'il existe $B_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$|h_{G^\infty}(x + x_i) - h_{G^\infty}(x)| \leq B_i \quad \text{pour tout } x \in G(k)$$

On prend alors $A = h_{G^\infty}(0)$ et $B = \sup_i B_i$. L'inégalité cherchée se démontre immédiatement par récurrence sur $\sum |n_i|$.

Soit Γ un sous-groupe de type fini de $G(k)$. On peut exprimer le lemme 2 en disant que h_{G^∞} a une croissance au plus linéaire sur Γ . Comme $h_{\tilde{D}}$ est quadratique, on en déduit :

PROPOSITION 4 - Sur Γ , la fonction hauteur h_φ est somme de la forme quadratique $ah_{\tilde{D}}$ (déduite de la forme de Néron h_D sur $A(k)$) et d'une fonction à croissance au plus linéaire.

2.3. Hauteur sur G : cas général

PROPOSITION 5 - Soit $\psi : G \rightarrow P_M$ un morphisme de G dans un espace projectif, et soient $x_1, \dots, x_m$ des éléments de $G(k)$. Il existe des nombres réels A et C tels que

$$h_\psi(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m) \leq A + C(\sum |n_i|)^2 \quad \text{pour tout } (n_i) \in \mathbb{Z}^m.$$

(En d'autres termes, la croissance de h_ψ sur le sous-groupe Γ engendré par les x_i est au plus quadratique.)

C'est vrai lorsque ψ est le plongement φ du n°2.2, d'après la prop.4. Le cas général résulte de là, et du lemme élémentaire suivant (dont la vérification est laissée au lecteur) :

LEMME 3 - Soit V une variété algébrique. Soient

$$\varphi : V \rightarrow P_N \quad \text{et} \quad \psi : V \rightarrow P_M$$

des morphismes de V dans des espaces projectifs. Supposons que φ soit un plongement (de sorte que V s'identifie à une sous-variété localement fermée de P_N).

Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$h_\psi \leq \lambda + \mu h_\varphi \quad \text{sur } V(k).$$

Autrement dit, on a $h_\psi = \underline{O}(h_\varphi)$.

§ 3. Application exponentielle et uniformisation

Dans ce §, le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

3.1. Exponentielle

Soit $t(G)$ l'algèbre de Lie de G , autrement dit l'espace tangent à G en l'élément neutre ; c'est un espace vectoriel complexe de dimension égale à $\dim G$. Nous noterons

$$\exp_G : t(G) \rightarrow G(\mathbb{C})$$

l'application exponentielle de G (Bourbaki, LIE III § 6) ; rappelons que l'on peut caractériser $\exp_G$ par les deux propriétés suivantes :

- a) c'est un homomorphisme de groupes de Lie complexes ;
- b) son application tangente à l'élément neutre est l'identité.

Puisque G est connexe pour la topologie de Zariski, $G(\mathbb{C})$ est connexe pour la topologie usuelle. Il en résulte que $\exp_G$ est surjective ; si l'on note Ω_G son noyau ("groupe des périodes" de G), on obtient un isomorphisme de groupes de Lie complexes

$$t(G) / \Omega_G \simeq G(\mathbb{C}).$$

Soit f une fonction rationnelle sur G . On peut identifier f à une fonction méromorphe sur $G(\mathbb{C})$ (et même sur $\bar{G}(\mathbb{C})$). La fonction $F = f \circ \exp_G$ est une fonction méromorphe sur $t(G)$ invariante par Ω_G ; nous verrons plus loin (n° 3.5) que F est d'ordre strict ≤ 2 .

3.2. Préliminaires : algèbre affine de L

Nous utiliserons pour $L, L_\alpha, A, \dots$ des notations

$$t(L), t(L_\alpha), t(A), \dots$$

$$\exp_L, \exp_{L_\alpha}, \exp_A, \dots$$

$$\Omega_L, \Omega_{L_\alpha}, \Omega_A, \dots$$

analogues à celles définies ci-dessus pour G . Comme L_α est, soit G_a , soit G_m , son algèbre de Lie $t(L_\alpha)$ s'identifie à $\mathbb{C}$; nous noterons e_α la base canonique de $t(L_\alpha)$; on a

$$\exp_{L_\alpha}(ze_\alpha) = \begin{cases} z \in G_a(\mathbb{C}) = \mathbb{C} & \text{si } L_\alpha = G_a \\ e^z \in G_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* & \text{si } L_\alpha = G_m. \end{cases}$$

Le groupe des périodes de L_α est réduit à 0 si $L_\alpha = G_a$, et c'est l'ensemble des multiples entiers de $(2\pi i)e_\alpha$ si $L_\alpha = G_m$.

Comme L est produit des L_α , $t(L)$ est somme directe des $t(L_\alpha)$, donc a pour base la famille des e_α . Si $z \in t(L)$, on notera z_α ses coordonnées par rapport

à cette base ; on a

$$z = \sum_{\alpha} z_{\alpha} e_{\alpha}.$$

Soit Λ_L l'algèbre affine de L . L'application $f \mapsto f \circ \exp_L$ identifie Λ_L à la sous-algèbre de l'algèbre des fonctions holomorphes sur $t(L)$ engendrée par les z_{α} (pour $L_{\alpha} = G_a$) et les e^{α} et les $e^{-\alpha}$ (pour $L_{\alpha} = G_m$).

Base de Λ_L

Soit N_L l'ensemble des familles $n = (n_{\alpha})$, où n_{α} est un entier ≥ 0 si $L_{\alpha} = G_a$ et un entier de signe quelconque si $L_{\alpha} = G_m$. Si $n = (n_{\alpha})$ appartient à N_L , posons

$$|n| = \sup |n_{\alpha}|$$

et

$$e_n(z) = \prod_{L_{\alpha} = G_a} z_{\alpha}^{n_{\alpha}} \prod_{L_{\alpha} = G_m} e^{\alpha n_{\alpha}}.$$

Les fonctions $e_n(z)$, $n \in N_L$, forment une base de l'algèbre affine Λ_L .

Pôles

Soit $f \in \Lambda_L$. On peut considérer f comme une fonction rationnelle sur la variété projective L , n'ayant pas de pôle en dehors de L^{∞} , cf. n°1.2. Si b est un entier ≥ 0 , on a

$$(f) \geq -bL^{\infty}$$

si et seulement si f est combinaison linéaire des $e_n(z)$ avec $|n| \leq b$.

3.3. Préliminaires : périodes

Puisque $A = G/L$, on a $t(A) = t(G)/t(L)$ et $\Omega_A = \Omega_G/\Omega_L$.

Choisissons un supplémentaire de $t(L)$ dans $t(G)$. Cela nous permet d'identifier $t(G)$ à $t(L) \oplus t(A)$, et d'écrire tout élément t de $t(G)$ comme un couple :

$$t = (z, u) \quad \text{avec} \quad z \in t(L) \quad \text{et} \quad u \in t(A).$$

L'image de Ω_G par la projection $t \mapsto u$ est Ω_A . Choisissons un sous-groupe $\tilde{\Omega}_A$ de Ω_G qui se projette isomorphiquement sur Ω_A (c'est possible, puisque Ω_A est libre sur $\mathbb{Z}$). On a

$$\Omega_G = \tilde{\Omega}_A \oplus \Omega_L$$

et l'on sait (cf. n°3.2) que Ω_L admet pour base les $(2\pi i)e_{\alpha}$ pour $L_{\alpha} = G_m$. Si $\omega \in \Omega_A$, nous noterons $\tilde{\omega}$ son image réciproque dans $\tilde{\Omega}_A$. On a

$$\tilde{\omega} = (\eta_{\omega}, \omega) \quad \text{avec} \quad \eta_{\omega} \in t(L).$$

L'application $\omega \mapsto \eta_{\omega}$ est un $\mathbb{Z}$ -homomorphisme de Ω_A dans $t(L)$. Une fonction $F = F(z, u)$ sur $t(G)$ est invariante par $\tilde{\Omega}_A$ si et seulement si

$$F(z + \eta_w, u + w) = F(z, u) \quad \text{pour tout } w \in \Omega_A.$$

Pour qu'une telle fonction soit invariante par Ω_G il faut et il suffit qu'elle soit invariante par Ω_L , i.e. qu'elle soit invariante par $z \mapsto z_\alpha + 2\pi i$ (pour $L_\alpha = G_m$).

3.4. Croissance de certaines fonctions

Revenons à la situation du §1, et choisissons un diviseur positif et ample D de A . On sait (cf. [We 2]) qu'il existe une fonction thêta sur $t(A)$ dont le diviseur est l'image réciproque de D par $\exp_A$. Soit $\theta = \theta(u)$ une telle fonction. On a

$$\theta(u + w) = \theta(u) e^{E(u, w)} \quad (u \in t(A), w \in \Omega_A).$$

Nous n'aurons pas besoin de la forme explicite de $E(u, w)$, mais seulement de sa croissance à l'infini :

$$|E(u, w)| = O(1 + |u|^2 + |w|^2).$$

Soient a et b des entiers ≥ 1 . Soit $D_{a,b} = a\tilde{D} + bG^\infty$ le diviseur de $\tilde{G}$ défini au n° 1.4. Notons $S_{a,b}$ l'espace vectoriel des fonctions rationnelles f sur $\tilde{G}$ telles que $(f) \geq -D_{a,b}$. Si $f \in S_{a,b}$, notons $F = F(z, u)$ la fonction $f \circ \exp_G$ sur $t(G) = t(L) \oplus t(A)$, et posons :

$$\tilde{F}(z, u) = \theta(u)^a F(z, u).$$

Il est clair que $\tilde{F}$ est holomorphe. De plus :

PROPOSITION 7 - La fonction $\tilde{F}$ est d'ordre strict ≤ 2 .

Remarquons d'abord que, pour tout $u \in t(A)$, la fonction $z \mapsto \tilde{F}(z, u)$ appartient à l'algèbre affine de L , et que son diviseur est $\geq -bL^\infty$. D'après le n° 3.2, on peut donc écrire cette fonction sous la forme

$$\tilde{F}(z, u) = \sum_{|n| \leq b} e_n(z) \psi_n(u),$$

avec $\psi_n(u) \in \mathbb{C}$. Le fait que $\tilde{F}(z, u)$ soit holomorphe en u entraîne, par un argument standard, qu'il en est de même des ψ_n ; en particulier, les ψ_n sont bornés sur tout compact. Ce fait, joint à la croissance au plus exponentielle des $e_n(z)$, entraîne que, pour tout compact K de $t(A)$, il existe une constante C_K telle que

$$|\tilde{F}(z, u)| \leq \exp \{C_K(1 + |z|)\} \quad \text{pour } u \in K,$$

autrement dit

$$|\tilde{F}(z, u)| \leq \exp \{O(1 + |z|)\} \quad \text{pour } u \in K.$$

Choisissons K de telle sorte que $K + \Omega_A = t(A)$: c'est possible puisque $t(A)/\Omega_A \simeq A(\mathbb{C})$ est compact. Pour tout $u \in t(A)$ il existe $w \in \Omega_A$ tel que $u + w \in K$. On a

$$|w| = |u| + O(1).$$

Puisque F est invariante par Ω_G , on a

$$F(z + \eta_w, u + w) = F(z, u)$$

d'où

$$\tilde{F}(z + \eta_w, u + w) = \tilde{F}(z, u) \exp\{a E(u, w)\},$$

ou encore

$$\tilde{F}(z, u) = \tilde{F}(z + \eta_w, u + w) \exp\{-a E(u, w)\}.$$

On a vu que

$$|E(u, w)| = \underline{0}(1 + |u|^2 + |w|^2) = \underline{0}(1 + |u|^2).$$

D'autre part, puisque $u + w$ appartient à K , et que $|\eta_w| = \underline{0}(|w|)$, on a

$$|\tilde{F}(z + \eta_w, u + w)| \leq \exp\{\underline{0}(1 + |z| + |u|)\}.$$

En combinant ces deux majorations, on en déduit :

$$|\tilde{F}(z, u)| \leq \exp\{\underline{0}(1 + |z| + |u|^2)\},$$

ce qui montre bien que $\tilde{F}$ est d'ordre ≤ 2 au sens strict.

Remarque

Ecrivons $\tilde{F}(z, u)$, comme ci-dessus, sous la forme

$$\tilde{F}(z, u) = \sum_{|n| \leq b} e_n(z) \psi_n(u).$$

La prop.7 équivaut à dire que les fonctions $\psi_n(u)$ sont d'ordre strict ≤ 2 . Il devrait être possible (en suivant [Sev]) de préciser ce résultat, et de prouver que ces fonctions s'expriment algébriquement au moyen de dérivées itérées de fonctions thêta.

3.5. Application

Supposons les entiers a et b choisis de telle sorte que $D_{a,b}$ soit très ample, ce qui est possible d'après le cor. à la prop. 1. Soit $\{f_0, \dots, f_N\}$ une base de l'espace vectoriel $S_{a,b}$, et soit φ le plongement de $\tilde{G}$ dans l'espace projectif P_N défini par les f_i . Posons, comme ci-dessus :

$$F_i(z, u) = f_i \circ \exp_G$$

et

$$\tilde{F}_i(z, u) = \theta(u)^a F_i(z, u).$$

D'après la prop.7, les $\tilde{F}_i$ sont des fonctions holomorphes d'ordre strict ≤ 2 . De plus :

PROPOSITION 8 - (i) Les fonctions $(\tilde{F}_0, \dots, \tilde{F}_N)$ ne s'annulent simultanément en aucun point de $t(G)$.

(ii) L'application $\Phi : t(G) \rightarrow P_N$ définie par les $(\tilde{F}_i)$ est égale à $\varphi \circ \exp_G$.

Soit $t \in t(G)$, et soit $x = \exp_G(t) \in G(C)$. Puisque $D_{a,b}$ est très ample, il

existe un indice i tel que le diviseur

$$(f_i) + D_{a,b} = (f_i) + a\tilde{D} + bG^\infty$$

ne passe pas par x . Comme l'image réciproque de ce diviseur par $\exp_G$ est égale au diviseur de $\tilde{F}_i$, ce dernier ne passe pas par t . On a donc $\tilde{F}_i(t) \neq 0$, ce qui démontre (i). L'assertion (ii) résulte de ce que $\tilde{F}_i/\tilde{F}_j = F_i/F_j = f_i/f_j \circ \exp_G$.

COROLLAIRE 1 - L'application Φ définit par passage au quotient un isomorphisme de $G(G) = t(G)/\Omega_G$ sur une sous-variété localement fermée de P_N .

C'est clair.

COROLLAIRE 2 - Soit f une fonction rationnelle sur G . On peut écrire $f \circ \exp_G$ sous la forme

$$f \circ \exp_G = R(\tilde{F}_0, \dots, \tilde{F}_N) / S(\tilde{F}_0, \dots, \tilde{F}_N)$$

où R et S sont des polynômes homogènes de même degré tels que $S(\tilde{F}_0, \dots, \tilde{F}_N)$ ne soit pas identiquement nul.

En effet, il suffit de choisir R et S tels que

$$f = R(f_0, \dots, f_N) / S(f_0, \dots, f_N),$$

ce qui est possible puisque φ est un plongement de $\bar{G}$ dans P_N .

COROLLAIRE 3 - Si f est une fonction rationnelle sur G , la fonction $f \circ \exp_G$ est une fonction méromorphe d'ordre strict ≤ 2 .

Cela résulte du cor.2 et du fait que les $\tilde{F}_i$ sont d'ordre strict ≤ 2 .

REFERENCES

- [Ba 1] BARSOTTI, I. - Structure theorems for group varieties, *Annali di Mat.*, 38 (1955), 77-119.
- [H] HARTSHORNE, R. - Algebraic Geometry, GTM 52, Springer-Verlag, 1977.
- [Mu] MUMFORD, D. - Abelian Varieties, Oxford Univ.Press, 1970.
- [N 1] NÉRON, A. - Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes, *Ann. of Math.*, 82 (1965), 249-331.
- [Ros 1] ROSENBLIETH, M. - Some basic theorems on algebraic groups, *Amer.J.Math.*, 78 (1956), 401-443.
- [Sev] SEVERI, F. - Funzioni Quasi Abelianne, Pont. Acad.Sc., Vatican, 1947.
- [We 1] WEIL, A. - Variétés abéliennes, Colloque d'Algèbre et Théorie des Nombres, C.N.R.S. (1949), 125-128.
- [We 2] WEIL, A. - Introduction à l'étude des variétés kählériennes, Hermann, 1958.