Astérisque

DANIEL BERTRAND

Appendice I : Problèmes locaux

Astérisque, tome 69-70 (1979), p. 163-189

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__69-70__163_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 69-70 (1979) p. 163-189

Appendice I

Problèmes locaux

par
Daniel BERTRAND

I- INTRODUCTION

§ 1.1 . Position du problème

Soient G un groupe algébrique commutatif connexe défini sur un corps de nombres F, TG l'espace tangent à l'origine de G, et k le complété de F en une place v de F. L'ensemble G(k) des points k-rationnels de G est un groupe de Lie v-adique, et chaque application exponentielle v-adique sur G définit un difféomorphisme local $\exp_{G(k)}$ de TG(k) dans G(k). Si v est une place infinie, ce difféomorphisme admet un prolongement analytique sur TG(C), dont les propriétés arithmétiques ont fait l'objet des chapitres précédents[1]. Supposant désormais que v est une place finie p de F, nous nous proposons d'aborder les questions de transcendance liées à $\exp_p = \exp_{G(k)}$. Cette étude est motivée par plusieurs applications arithmétiques, qui seront détaillées à la fin de l'appendice.

C'est précisément l'absence d'un prolongement analytique naturel de l'application $\exp_p$ qui fournit le principal obstacle à la recherche des analogues p-adiques des résultats de [W]. Elle conduit à faire jouer, dès l'énoncé des critères de transcendance, un rôle central aux équations fonctionnelles satisfaites par $\exp_p$ (théorèmes d'addition et de multiplication ; rappelons que, dans le cas complexe -cf. [W], chap.8-, ces propriétés n'apparaissent que dans les situations "non normalisées").

Parallèlement aux applications exponentielles, nous étudierons les uniformisantes des groupes G(k) qui, comme les variétés abéliennes dégénérantes, admettent, parmi

[1] "Nombres transcendants et groupes algébriques", par Michel Waldschmidt (noté [W] dans ce qui suit).

leurs revêtements non ramifiés, des tores $(k^*)^n$. Les démonstrations de leurs propriétés arithmétiques sont alors très proches de la théorie complexe.

Les parties II et III de cet appendice sont consacrées à des critères de transcendance p-adiques. La quatrième partie, qui forme le coeur du présent travail, réunit les résultats de transcendance qu'on déduit de ces critères pour les sous-groupes à plusieurs paramètres de $G(k)$. Nous n'avons pas détaillé ce qu'ils expriment sur des groupes algébriques particuliers car, en l'absence de périodes non nulles liées à $\exp_p$, aucun nombre "naturel" n'apparaîtrait dans ces applications. En revanche, la considération des homomorphismes analytiques de $(k^*)^n$ dans les variétés abéliennes dégénérantes permet d'étudier les valeurs de certaines séries d'Eisenstein.

La dernière partie de l'appendice est donc consacrée aux applications de ces résultats de transcendance (et des généralisations qu'en fournit la théorie des formes linéaires de logarithmes) à diverses branches de la théorie des nombres. Les unes concernent l'arithmétique des corps de nombres, les autres la géométrie diophantienne.

§ 1.2 Notations

On désigne par k un corps non archimédien complet de caractéristique nulle, et de caractéristique résiduelle $p \neq 0$. On note $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers et $|\ |$ sa valeur absolue, normalisée par $|p| = p^{-1}$. On suppose (ce qui ne restreint pas la généralité des résultats de transcendance) que k est plongé dans le complété $\mathbf{C}_p$ d'une clôture algébrique du corps des nombres p-adiques $\mathbf{Q}_p$, et on désigne par $\bar{\mathbf{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}_p$. Dans la pratique, k sera soit $\mathbf{C}_p$, soit un corps localement compact (on notera alors δ son degré sur $\mathbf{Q}_p$).

Soit $f(X) = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} a_\nu X_1^{\nu_1} \ldots X_n^{\nu_n}$ une série de Laurent formelle à n variables à coefficients dans k. Pour tout nombre réel $r > 0$, on pose :

$$|f|_r = \sup_{\nu \in \mathbf{Z}^n} |a_\nu| \, r^{\|\nu\|},$$

où $\|\nu\| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$ désigne la longueur du n-uple ν. Les séries de Taylor f telles que $|f|_1$ est fini s'identifient aux fonctions strictement analytiques sur $\mathcal{O}^n$, dont l'ensemble sera noté $\mathcal{A}(\mathcal{O}^n)$.

La hauteur $H(P)$ d'un polynôme P à coefficients entiers algébriques désigne le maximum des hauteurs "usuelles" (au sens de [W], § 1.1.b) de ses coefficients.

Soit Γ un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini. A toute base $\mathcal{B} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell\}$ de Γ

sur Z, et à tout entier $N \geqq 0$, on associe l'ensemble

$$\Gamma_N = \Gamma_N(\mathcal{B}) = \{ \sum_{i=1}^{\ell} h_i \gamma_i \; ; \; h_i \in Z \; ; \; 0 \leqq h_i \leqq N \}$$

Certaines des définitions données plus bas font intervenir les ensembles $\Gamma_N(\mathcal{B})$. On pourra vérifier qu'elles sont indépendantes du choix d'une base $\mathcal{B}$ de Γ. On n'a donc pas explicité la dépendance en $\mathcal{B}$ des constantes apparaissant dans leurs énoncés.

Pour des raisons de clarté, on a enfin distingué, dans certains énoncés, l'algèbre Lie G des dérivations invariantes sur un groupe algébrique connexe G de son espace tangent à l'origine TG.

II - CRITERES DE TRANSCENDANCE GENERAUX

Les résultats rassemblés dans cette partie se rapportent à l'étude des sous-groupes à n paramètres p-adiques. Aussi n'y considère-t-on que des fonctions analytiques sur un voisinage de l'origine de k^n, que l'on peut, sans perte de généralité, identifier à $\mathcal{O}^n$. Comme dans le cas complexe, on est amené à distinguer deux situations, suivant que les fonctions considérées satisfont des équations différentielles algébriques (cas normalisé) ou non. Les critères de transcendance obtenus sont exposés aux §§ 2.1 et 2.2. Les outils d'analyse ultramétrique nécessaires à leur démonstration sont développés au § 2.4.

§ 2.1 Le cas normalisé

Dans les applications que nous avons en vue, le théorème 1 joue le rôle du corollaire 5.1.2 de [W]. Mais il concerne les solutions de systèmes différentiels vérifiant de plus une famille d'équations fonctionnelles.

On suppose donnés dans tout ce paragraphe n endomorphismes $\pi_1, \ldots, \pi_n$ du $\mathcal{O}$-module $\mathcal{O}^n$ tels que, pour tout n-uple $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ d'entiers rationnels >0, l'endomorphisme

$$\tau_\nu = \nu_1 \pi_1 + \ldots + \nu_n \pi_n$$

soit injectif.

A tout élément ν de $\mathbb{N}^n$, et tout élément f de $\mathcal{M}(\mathcal{O}^n)$, on associe l'élément

$$T_\nu f = f \circ \tau_\nu$$

de $\mathcal{M}(\mathcal{O}^n)$, et le n-uple

$$\underset{\sim}{f} = (f \circ \pi_1, \ldots, f \circ \pi_n)$$

d'éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$.

Définition 1 : on dira qu'une famille $\{f_1,\dots,f_\ell\}$ d'éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$ est d'ordre arithmétique fonctionnel fini (relativement à $\pi_1,\dots,\pi_n$) s'il existe un corps de nombres K, d'anneau d'entiers I, et des nombres réels ρ et c tels que, pour tout élément ν de $\mathbf{N}^n$, il existe 2ℓ éléments

$$\{P_{i,\nu}\ ,\ Q_{i,\nu}\ ;\ i=1,\dots,\ell\}\ \text{de}\ I\,[X_{sj}\ ;\ s=1,\dots,\ell\ ;\ j=1,\dots,n\,]$$

de degrès totaux $\leqq c\,\|\,\nu\,\|^\rho$, de hauteurs $\leqq \exp(c\,(1+\|\,\nu\,\|^\rho))$ tels que, pour $i=1,\dots,\ell$:

$$T_\nu f_i = P_{i,\nu}\,(\underset{\sim}{f}_1,\dots,\underset{\sim}{f}_\ell)\ /\ Q_{i,\nu}\,(\underset{\sim}{f}_1,\dots,\underset{\sim}{f}_\ell).$$

Un élément ζ de $\mathcal{O}^n$ sera dit régulier pour $\{f_1,\dots,f_\ell\}$ si, pour tout n-uple ν et tout indice i, il existe une telle représentation de $T_\nu f_i$ vérifiant en outre : $Q_{i,\nu}\,(\underset{\sim}{f}_1(\zeta),\dots,\underset{\sim}{f}_\ell(\zeta)) \neq 0$.

Le théorème 1 généralise à plusieurs variables le théorème 1 de [Be 3].

THÉORÈME 1 : Soit $\{f_1,\dots,f_\ell\}$ une famille d'éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$ d'ordre arithmétique fonctionnel fini. On suppose que le corps $\bar{\mathbf{Q}}\,(f_1,\dots,f_\ell)$ a un degré de transcendance $\geqq n+1$ sur $\bar{\mathbf{Q}}$, et qu'il existe n dérivations k-linéairement indépendantes de Lie (k^n) opérant sur l'algèbre $\bar{\mathbf{Q}}\,[f_i\circ\pi_j\ ;\ i=1,\dots,\ell\ ;\ j=1,\dots,n\,]$. Soit ζ un élément de $\mathcal{O}^n$, régulier pour $\{f_1,\dots,f_\ell\}$, et tel que $\pi_1(\zeta),\dots,\pi_n(\zeta)$ soient linéairement indépendants sur k. Alors, l'un au moins des nombres $f_i\circ\pi_j\,(\zeta)$ $(i=1,\dots,\ell\ ;\ j=1,\dots,n)$ est transcendant.

La démonstration du théorème 1 suit la démarche de [Be 3], §1.3. Supposant que les fonctions $f_1,\dots,f_\ell$ prennent simultanément des valeurs algébriques en ζ, on construit, grâce au principe des tiroirs et au lemme 1 énoncé plus bas, une fonction F, analytique sur $\mathcal{O}^n$, s'annulant à un ordre de multiplicité élévé aux points de l'ensemble $\{\tau_\nu(\zeta)\ ;\ \nu_i \in p\mathbf{N}\ ;\ 0<\nu_i\leqq N\}$, où N est un entier suffisamment grand. Le lemme de Schwarz sur les produits (§ 2.4, lemme 4) permet de majorer $|F|_p^{-1}$. Le lemme 1, joint à la formule du produit sur les corps de nombres, fournit la contradiction désirée (2).

LEMME 1 - Soient $\{f_1,\dots,f_\ell\}$ une famille d'éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$ d'ordre arithmétique fonctionnel fini. On reprend les notations qui lui sont associées par la définition 1. On suppose qu'il existe n éléments k-linéairement indépendants $D_1,\dots,D_n$ de Lie (k^n) opérant sur l'algèbre $I[\underset{\sim}{f}_1,\dots,\underset{\sim}{f}_\ell]$. Pour tout n-uple

(2) Voir D. Bertrand, Groupe de Travail d'Analyse ultramétrique, Paris, 1978-79, exposé n° 9 .

σ de $\mathbf{N}^n$, on note D^σ l'opérateur $D_1^{\sigma_1} \dots D_n^{\sigma_n}$. Alors, il existe un nombre réel $\gamma = \gamma(f_1,\dots,f_\ell)$ vérifiant la propriété suivante. Soient $L_1,\dots,L_\ell$ des entiers ≥ 0 de somme L, H un entier > 0 et P un élément de $I[X_1,\dots,X_\ell]$ de degré $\leq L_i$ en X_i, de hauteur $\leq H$. Pour tout couple (σ, ν) d'éléments de $\mathbf{N}^n$, la fonction $F = P(f_1,\dots,f_\ell)$ vérifie :

$$\Big(\prod_{i=1}^{\ell} Q_{i,\nu}^{L_i}(\underset{\sim}{f}_1,\dots,\underset{\sim}{f}_\ell)\Big)\, D^\sigma T_\nu F = R_{\sigma,\nu,P}(\underset{\sim}{f}_1,\dots,\underset{\sim}{f}_\ell) + \sum_{\substack{\|\kappa\| < \|\sigma\| \\ \kappa_j \leq \sigma_j}} r_{\kappa,\nu,P}\, D^\kappa T_\nu F,$$

où les fonctions $r_{\kappa,\nu,P}$ sont analytiques sur $\mathcal{O}^n$, et $R_{\sigma,\nu,P}$ désigne un élément de $I[X_{ij}\,;\ i = 1,\dots,\ell\ ;\ j = 1,\dots,n]$ de degrés partiels $\leq \gamma(\|\sigma\| + L_i \|\nu\|^\rho)$ en $X_{i1},\dots,X_{i,n}$, de hauteur

$$\leq H\,(1 + \gamma(\|\sigma\| + L\|\nu\|^\rho))^{\gamma\|\sigma\|} \exp(\gamma(\|\sigma\| + L(1 + \|\nu\|^\rho))).$$

Ce lemme, qui généralise une idée de Baker et Coates (voir [M 1], lemme 7.7. ; [Be 3], lemme 2), améliore, en point régulier pour $\{f_1,\dots,f_\ell\}$, les estimations de hauteur fournies par le lemme 5.4.2 de [W].

§ 2.2 Le cas non normalisé

L'énoncé obtenu dans ce cas concerne les valeurs de fonctions algébriquement indépendantes, sur un sous-groupe Γ de $\mathcal{O}^n$. Comme dans le cas complexe (voir [W], théorème 8.3.1), il fait intervenir une propriété métrique de Γ, caractérisée par son coefficient de densité $\varkappa(\Gamma,k^n)$. Pour alléger l'écriture (et pour pouvoir disposer plus tard d'un lemme de transfert, cf. § 2.3), nous supposerons ici k localement compact. On note δ son degré sur $\mathbf{Q}_p$, e son indice de ramification, f son degré résiduel, et $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.

Définition 2. On appelle coefficient de densité (relativement au corps localement compact k) d'un sous-groupe Γ de type fini de $\mathcal{O}^n$, et on note $\varkappa(\Gamma,k^n)$, le maximum des nombres réels $\varkappa$ vérifiant la propriété suivante : il existe un nombre réel $c = c(\varkappa)$ tel que, pour tout entier $\nu \geq 0$, la restriction à $\Gamma_{[cp^{f\nu/\varkappa}]}$ de la projection canonique : $\mathcal{O}^n \to (\mathcal{O}/\mathfrak{p}^\nu)^n$ est surjective.

Avec les notations de [Se 3], où $k = \mathbf{Q}_p$, Γ est alors dit $(1/\varkappa)$ - dense ; une normalisation différente est proposée dans [F], chapitre 3, § 5. Nous précisons au § 2.3 certaines propriétés du coefficient $\varkappa(\Gamma,k^n)$.

La définition suivante reprend celle de [W], § 1.1.b.

Définition 3. Soient f un élément de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$, Γ un sous-groupe de $\mathcal{O}^n$ de type fini, et ρ un nombre réel. On dira que f est d'ordre arithmétique inférieur ou

égal à ρ sur Γ s'il existe un corps de nombres K et un nombre réel c tels que, pour tout entier $N \geq 1$ et tout élément γ de Γ_N, le nombre $f(\gamma)$ est un élément de K de hauteur $\leq \exp(cN^{\rho})$.

Le théorème 2 a été démontré par Serre (voir [Se 3], théorème 2) lorsque les fonctions f_i sont des exponentielles, et que $k = \mathbb{Q}_p$. Il est énoncé par Flicker (voir [F], chapitre 3, § 5) lorsque tous les ρ_i sont égaux. La démonstration du cas général suit celle du théorème 8.3.1 (2e et 3e partie) de [W]. Nous nous bornerons à signaler que les estimations analytiques sont ici fournies par le lemme 5 du § 2.4.

THÉORÈME 2. Soient $\rho_1,\ldots,\rho_d$ des nombres réels, Γ un sous-groupe de type fini de $\mathcal{O}^n$, et $f_1,\ldots,f_d$ des éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$ d'ordre arithmétique respectivement inférieur ou égal à $\rho_1,\ldots,\rho_d$ sur Γ. On suppose que les fonctions $f_1,\ldots,f_d$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Alors :

$$\varkappa(\Gamma,k^n)\,(d-n) \leq \rho_1 + \ldots + \rho_d.$$

§ 2.3. Quelques mesures de répartition

Dans ce qui suit, Γ désigne un sous-groupe de type fini de $\mathcal{O}^n$, de rang ℓ sur $\mathbb{Z}$. On ne suppose k localement compact que lorsque le coefficient de densité $\varkappa(\Gamma,k^n)$ entre en jeu.

Rappelons tout d'abord la définition de l'exposant de Dirichlet $\mu(\Gamma,k^n)$, donnée au § 1.3.a de [W] dans un cadre général : c'est le plus petit des nombres $(\ell - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(\Gamma \cap \mathcal{V}))\,/\,(n - \dim_k \mathcal{V})$, où $\mathcal{V}$ parcourt l'ensemble des k-sous-espaces vectoriels de k^n de dimension $< n$. On notera que si k est une extension algébrique de degré δ de $\mathbb{Q}_p$, alors

$$\mu(\Gamma,k^n) \geq \delta\,\mu(\Gamma,\mathbb{Q}_p^{\delta n}) ;$$

lorsque Γ est inclus dans $\mathbb{Q}_p^n$, on a de plus :

$$\mu(\Gamma,k^n) = \delta\,\mu(\Gamma,\mathbb{Q}_p^{\delta n}) = \mu(\Gamma,\mathbb{Q}_p^n).$$

Parallèlement au cas complexe (voir [W], théorème 1.3.4), on peut, grâce à l'analogue p-adique, dû à Schlickewei (voir [Schl], théorème 1.1), du théorème de W. Schmidt, caractériser les sous-groupes bien répartis de $(\bar{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{Z}_p)^n$ de la façon suivante.

LEMME 2. Soit Γ un sous-groupe de $(\bar{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{Z}_p)^n$ de rang fini $\ell > n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $$\mu(\Gamma, Q_p^n) = \ell / n$$

ii) pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon) > 0$ telle que, pour tout entier $N \geq 1$:

$$\min \{|\gamma| \ ; \ \gamma \in \Gamma_N \ , \ \gamma \neq 0\} \geq c(\varepsilon) N^{-(\ell/n) - \varepsilon} .$$

Supposons maintenant k localement compact. On prendra garde au fait que la définition du coefficient de densité de Γ fait intervenir une normalisation différente de celle du cas complexe (voir [W], § 1.3.b). En particulier, on a :

$$\varkappa(\Gamma, k^n) = \delta \, \varkappa(\Gamma, Q_p^{\delta n}) .$$

Néanmoins, les énoncés du § 1.3 de [W] se traduisent sans difficulté en p-adique. Ainsi, $(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^{\nu})^n$ a $p^{f \nu n}$ éléments, dont les distances relatives sont minorées par $p^{-\nu/e}$. Donc on peut associer à tout nombre réel $\varkappa < \varkappa(\Gamma, k^n)$ une constante $C(\varkappa)$ telle que, pour tout entier $N \geq 1$, il existe un sous-ensemble S_N de Γ_N, ayant plus de $C(\varkappa) N^{\varkappa n}$ éléments, dont les distances relatives sont minorées par $C(\varkappa) N^{-\varkappa/\delta}$. En conséquence :

$$\varkappa(\Gamma, k^n) \leq \mu(\Gamma, k^n).$$

Le lemme 2, joint à un lemme de transfert p-adique (voir [Lu], lemme 3.16 et théorème 3.20) entraîne alors :

LEMME 3 . Soit Γ un sous-groupe de type fini de $(\bar{Q} \cap Z_p)^n$. On a :

$$\varkappa(\Gamma, Q_p^n) = \mu(\Gamma, Q_p^n) .$$

Dans le même ordre d'idées, on déduit de l'analogue p-adique du théorème de Khintchine (voir [Lu], théorèmes 4.22 et 4.24) que, si $\ell \geq n$ désignent deux entiers > 0, le groupe $\Gamma = Z\gamma_1 \oplus \ldots \oplus Z\gamma_\ell$ a un coefficient de densité égal à ℓ / n pour presque tout ℓ-uple $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell\}$ d'éléments de $\mathcal{O}^n$ (au sens de la mesure de Haar sur $\mathcal{O}^{\ell n}$) .

§ 2.4 . Les lemmes de Schwarz

Il s'agit d'améliorer le principe du maximum pour des fonctions analytiques s'annulant sur un ensemble S donné. Nous distinguerons deux types d'énoncés, suivant que S est soumis à des conditions linéaires ou métriques.

Définition 4 . Soit θ une fonction numérique sur $\mathbb{N}^2$. On dira qu'un sous-groupe Γ de $\mathcal{O}^n$ vérifie un lemme de Schwarz (avec multiplicités) de type θ s'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que, pour tout entier $N \geq 1$ et tout élément f de $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}^{-1} \mathcal{O}^n)$ s'annulant à l'ordre t sur Γ_N, on a :

$$|f|_1 \leqq p^{-c\,\theta(t\,,\,N)}|f|_p\,.$$

On vérifie aisément que $\theta(t\,,N)$ est majoré par $tN^{\mu(\Gamma\,,\,k^n)}$ (voir [W], lemme 7.1.7.), et un raisonnement à une variable montre que $\theta(t,N)$ peut être choisi égal à t. La première minoration non triviale de θ a été obtenue par Serre ([Se 3], proposition 2) lorsque $t = 1$, et sous une hypothèse métrique sur Γ. Le cas des multiplicités quelconques a été traité par Robba [Ro], auquel nous empruntons tous les énoncés de ce paragraphe.

Le lemme 4 correspond à une condition linéaire.

LEMME 4 - Soit Γ un sous-groupe de type fini de $\mathcal{G}^n$, tel que $\mu(\Gamma,k^n)$ soit $\geqq 1$. Alors Γ vérifie un lemme de Schwarz de type $\theta(t,N) = tN$.

En effet, Γ contient par hypothèse n éléments k-linéairement indépendants. Un changement de variables permet alors de supposer que Γ_N contient le produit $\{1,\ldots,N\}^n$. On conclut au moyen du théorème 2.3.1 de [Ro].

Le lemme 5 répond à la fois aux théorèmes 7.3.1 et 7.4.2 de [W]. On suppose maintenant k localement compact.

LEMME 5 - Soit Γ un sous-groupe de type fini de $\mathcal{G}^n$. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, Γ vérifie un lemme de Schwarz de type

$$\theta(t,N) = tN^{\kappa(\Gamma,k^n)-\varepsilon}\,.$$

Considérons en effet, pour tout nombre réel $\kappa < \kappa(\Gamma,k^n)$ et tout entier $N \geqq 1$, le sous-ensemble S_N de Γ_N défini au § 2.3, et soit σ_N la distance relative minimale des éléments de S_N. D'après le théorème 3.3.2 de [Ro], Γ vérifie un lemme de Schwarz de type

$$\theta(t,N) = t\,(\operatorname{card} S_N)\,\sigma_N^{\delta(n-1)}\,.$$

Le lemme 5 en découle.

Remarque 1 - Robba déduit de ces résultats le corollaire suivant ([Ro], théorème 3.4.1) : soit S un sous-ensemble de $\mathcal{G}^n$ tel que tout point de $\mathcal{G}^n$ soit à une distance $\leqq L^{-1/\delta}$ de S ; tout élément P de $k[X_1,\ldots,X_n]$ de degré $\leqq L$ vérifie alors :

$$|P|_1 \leqq C^L \sup_{\gamma \in S} |P(\gamma)|,$$

où $C = p^{1/(p-1)}$. En reprenant la démarche exposée au §§ 7.3 et 7.4 de [W], on pourra, inversement, établir la minoration

$$\theta(1,N) \geqq N^{\kappa(\Gamma,k^n)-\varepsilon}$$

à partir de ce corollaire.

Remarque 2 : D'après le lemme 3, on peut, lorsque $k = Q_p$, et que Γ est composé d'éléments algébriques sur Q, remplacer l'exposant $\kappa(\Gamma, k^n) - \varepsilon$ par $\mu(\Gamma, k^n) - \varepsilon$ dans la conclusion du lemme 5. Est-ce encore le cas lorsque Γ est un sous-groupe de type fini de $\mathcal{O}^n$ quelconque?

III - LE CAS D'UNE VARIABLE

Les critères de transcendance de la 2e partie (et, plus particulièrement, le théorème 2) peuvent être améliorés de façon notoire dans le cas unidimensionnel. Par ailleurs, un lemme de Schwarz sur les couronnes permet d'étudier les fonctions méromorphes sur k^*. Ces dernières conduisent à des situations "globales" qui, à l'instar du cas complexe, fournissent de meilleurs critères de transcendance. On les étudie aux § § 2.3 (où sont également traitées certaines fonctions méromorphes sur $(k^*)^n$) et 2.4 .

§ 3.1 . Les situations locales

L'amélioration obtenue dans le cas normalisé concerne l'hypothèse de régularité introduite au théorème 1, qui peut maintenant être omise. Par ailleurs, on peut supposer, sans perte de généralité, que l'endomorphisme π_1 est l'identité.

PROPOSITION 1 - *Soit $\{f_1, \ldots, f_\ell\}$ une famille d'éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{O})$ d'ordre arithmétique fonctionnel fini. On suppose que l'algèbre $\bar{Q}[f_1, \ldots, f_\ell]$ a un degré de transcendance ≥ 2 sur $\bar{Q}$, et qu'il existe une dérivation non nulle de Lie (k) la laissant stable. Soit ζ un élément non nul de $\mathcal{O}$. Alors, l'un au moins des nombres $f_1(\zeta), \ldots, f_\ell(\zeta)$ est transcendant.*

La démonstration de la proposition 1 suit celle du théorème 1. Mais, lorsque ζ n'est pas un point régulier pour $\{f_1, \ldots, f_\ell\}$, le lemme 1 ne permet en général plus d'estimer la hauteur de $D^\sigma T_\nu F(\zeta)$, et il convient de généraliser son énoncé de la façon suivante : soit s l'ordre en ζ de la fonction

$$Q_{\nu,P} = \prod_{i=1}^{\ell} Q_{i,\nu}^{L_i} \quad (f_1, \ldots, f_\ell) ;$$

alors

$$D^s Q_{\nu,P}(\zeta)\, D^\sigma T_\nu F(\zeta) = R_{s+\sigma,\nu,P}(f_1, \ldots, f_\ell)(\zeta) +$$

$$+ \sum_{0 \leq \varkappa < \sigma} r_{s+\varkappa,\nu,P}(\zeta)\, D^\varkappa T_\nu F(\zeta) .$$

Il reste à majorer s . On utilise à cet effet un théorème de Brownawell et Masser [Br - M] sur les algèbres différentielles de type fini, en vertu duquel l'ordre de

$Q_{\nu,P}$ en tout point de $\mathcal{O}$ est majoré par $cL\nu^{2^{\ell-1}\rho}$, où c désigne un nombre réel ne dépendant que de $f_1,\ldots,f_\ell$.

Remarque 3 : La proposition 1 est encore valable quand on remplace les fonctions τ_ν auxquelles sont associés les opérateurs T_ν (voir § 2.1) par une suite de contractions analytiques sur $\mathcal{O}$ plus générales. Ceci permet en particulier d'étudier directement les propriétés de transcendance des fonctions logarithmes de certaines lois de groupes formels.(3)

L'amélioration obtenue dans le cas non normalisée est plus fondamentale.

PROPOSITION 2 - Soient $\rho_1,\ldots,\rho_d$ et ℓ des nombres réels, Γ un sous-groupe de type fini de $\mathcal{O}$ de rang $\leq \ell$, et $f_1,\ldots,f_d$ des éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{O})$ d'ordre arithmétique respectivement inférieur ou égal à $\rho_1,\ldots,\rho_d$ sur Γ. On suppose que les fonctions $f_1,\ldots,f_d$ sont algébriquement indépendantes sur Q. Alors :

$$\ell\,(d-n) \leq \rho_1+\ldots+\rho_d\ .$$

En d'autres termes, le coefficient de densité $\kappa(\Gamma,\mathcal{O})$ peut ici être remplacé par le rang $\mu(\Gamma,k)$ de Γ. En effet, tout sous-groupe Γ de $\mathcal{O}$ de rang ℓ vérifie un lemme de Schwarz de type $\theta(t,N)=tN^{\ell}$. Ceci résulte aisément de la multiplicavité des normes $\{\ |\ |_r\ ;\ 0<r\leq 1\}$ sur l'algèbre de Banach $\mathcal{K}(\mathcal{O})$ (voir(4) [Se 3], proposition 2).

§ 3.2 - La situation globale normalisée

Les fonctions méromorphes sur k^* ou $(k^*)^n$ étudiées ci-dessous apparaîtront au § 3 comme uniformisantes de certaines variétés abéliennes. Signalons dès à présent qu'on peut, dans tous les énoncés obtenus dans ce cadre, remplacer le corps ultramétrique k par le corps des nombres complexes (voir [Be 1], remarque 3, et [F], chapitre 5, § 3).

Définition 5 - Soient $\mathcal{M}((k^*)^n)$ le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{K}((k^*)^n)$ des séries de Laurent convergeant sur $(k^*)^n$, et $\{\sigma,\rho\}$ un couple de nombres réels ≥ 0. On dira qu'un élément f de $\mathcal{M}((k^*)^n)$ est d'ordre inférieur ou égal à $\{\sigma,\rho\}$ s'il existe deux nombres réels c_1 et c_2 et deux éléments g_1 et g_2 de $\mathcal{K}((k^*)^n)$ tels que $f=g_1/g_2$, et que, pour $i=1,2$, et pour tout nombre réel $r>0$:

$$\log|g_i|_r \leq c_i(r+r^{-1})^{\sigma}(\log(r+r^{-1}))^{\rho}$$

(3) Voir D. Bertrand, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1976/77, exposé n° 1.

(4) Le premier lemme de Schwarz à une variable p-adique a été énoncé par K. Mahler (Compositio math., 2, 1935, pp. 259-275, proposition 3).

La proposition 3 répond au théorème 1.1.1 de [W].

PROPOSITION 3 - Soient K un corps de nombres, σ et ρ deux nombres réels ≥ 0, et $f_1,\dots,f_\ell$ des éléments de $\mathcal{M}(k^*)$ d'ordre inférieur ou égal à $\{\sigma,\rho\}$. On suppose que l'algèbre $K[f_1,\dots,f_\ell]$ a un degré de transcendance ≥ 2 sur K, et qu'il existe une dérivation non nulle de Lie (k^*) la laissant stable. Alors, l'ensemble des éléments de k^* où $f_1,\dots,f_\ell$ prennent simultanément des valeurs dans K est fini, et a au plus $4\,\sigma[K:\mathbb{Q}]$ éléments.

La démonstration de la proposition 3 est donnée dans [Be 1]. Elle repose sur un lemme de Schwarz sur les couronnes $\mathcal{C}_r = \{ z \in k^*, r^{-1} < |z| < r\}$ de k (voir [Be 1], lemme 2) :

LEMME 6 - Soient R et r deux nombres réels, $R > r > 1$, et f une fonction analytique sur $\mathcal{C}_R$ admettant h zéros (comptés avec leurs ordres de multiplicité) dans $\mathcal{C}_r$. Alors

$$\sup(|f|_r, |f|_{1/r}) \leq (r/R)^{(1-\alpha)h/2} \sup(|f|_R, |f|_{1/R}),$$

où $\alpha = (\log r) / \log R$.

Faute d'un lemme de Schwarz pour les fonctions analytiques sur $(k^*)^n$ (ou, plus généralement, sur le complémentaire d'un diviseur algébrique de k^n), la proposition 3 n'a pas encore été généralisée à plusieurs variables. Néanmoins, le lemme 6 permet, comme l'a montré Flicher, de traiter certaines situations pluridimensionnelles. Nous énonçons son résultat sous la forme suivante (voir [F], chapitre 5, proposition 1) :

THÉORÈME 3 - Soient K un corps de nombres, ρ un nombre réel > 0, et $f_1,\dots,f_\ell$ des éléments de $\mathcal{M}((k^*)^n)$ d'ordre inférieur ou égal à $\{0,\rho\}$. On suppose que l'algèbre $K[f_1,\dots,f_\ell]$ a un degré de transcendance $\geq n+1$ sur K, et qu'il existe n dérivations de Lie $(k^*)^n$ la laissant stable. Alors, pour tout élément ζ de $(k^*)^n$ où les fonctions $f_1,\dots,f_\ell$ sont définies, l'un au moins des nombres $f_1(\zeta),\dots,f_\ell(\zeta)$ est transcendant.

Cet énoncé suffira pour les applications que nous avons en vue.

§ 3.3 - La situation globale non normalisée

La définition 3 du § 2.2. (voir [W], § 1.1 b) s'adapte aux fonctions méromorphes sur k^* de la façon suivante.

Définition 6 - Soient $\{f_1,\dots,f_d\}$ une famille d'éléments de $\mathcal{M}(k^*)$, $\rho_1,\dots,\rho_d$ des nombres réels > 0, et Γ un sous-groupe libre de k^* de rang fini ℓ sur

Z . On dira que $\{f_1,\dots,f_d\}$ est d'ordre arithmétique inférieur ou égal à $\{\rho_1,\dots,\rho_d\}$ sur Γ s'il existe un corps de nombres K, des nombres réels $c_1,\dots,c_4 > 0$ et, pour $i = 1,\dots,d$, une représentation $g_{i,1}/g_{i,2}$ de f_i formée d'éléments de $\mathcal{R}(k^*)$ d'ordre inférieur ou égal à $\{0,\rho_i\}$, tels que, pour tout entier $N \geqq c_1$, un sous-ensemble S_N de Γ_N, de cardinal $\geqq c_2 N^{\ell}$, vérifie les conditions suivantes : pour $i = 1,\dots,d$, et tout élément γ de S_N, $|g_{i,2}(\gamma)|$ est minoré par $\exp(-c_3 N^{\rho_i})$ et $f_i(\gamma)$ est un élément de K de hauteur $\leqq \exp(c_4 N^{\rho_i})$.

L'analogue complexe de la proposition 4 est, après synthèse de Fourier, une conséquence immédiate de la remarque 1.1.6 de [W].

PROPOSITION 4 - Soient $\rho_1,\dots,\rho_d$ des nombres réels > 0, Γ un sous-groupe libre de k^* de rang fini ℓ sur $\mathbb{Z}$, et $\{f_1,\dots,f_d\}$ une famille d'éléments de $\mathcal{M}(k^*)$ d'ordre arithmétique inférieur ou égal à $\{\rho_1,\dots,\rho_d\}$ sur Γ. On suppose que les fonctions $f_1,\dots,f_d$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Alors :

$$\ell(d-1) \leqq \rho_1 + \dots + \rho_d - d .$$

Démonstration (voir également [W], § 8.3.d) : Posons $\rho = (\rho_1+\dots+\rho_d)/d$. On peut, sans perte de généralité, supposer que chacun des ρ_i est $< \rho + (\ell/d)$. On désigne par N un entier arbitrairement grand, et par C_1, C_2, C_3 des nombres réels >0 indépendants de N. Le principe des tiroirs permet de construire un élément P non nul de $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_d]$, de hauteur $\leqq \exp(C_1 N^{\rho+(\ell/d)})$, de degré $L_i \leqq N^{\rho+(\ell/d)-\rho_i}$ en X_i , tel que la fonction $F = P(f_1,\dots,f_d)$ s'annule aux points de l'ensemble S_N associé par la définition 6 à $\Gamma_N = \{\gamma_1^{n_1}\dots\gamma_\ell^{n_\ell}; 0 \leqq n_i \leqq N\}$. Posons $C_2 = 1 + \sup_i (|\gamma_i| + |\gamma_i|^{-1})$, $r = C_2^N$, $R = C_2^{2N}$ (de sorte que $r/R = C_2^{-N}$) , $G = \left(\prod_{i=1}^{\ell} g_{i,2}^{L_i}\right) F$, et supposons que, contrairement à la conclusion du théorème 4, on ait l'inégalité : $\ell + 1 > \rho + (\ell/d)$.

Le lemme 6 entraîne alors :

$$\sup\left(|G|_r,\ |G|_{1/r}\right) \leqq (r/R)^{N^{\ell}/4} \sup\left(|G|_R,\ |G|_{1/R}\right)$$

$$\leqq \exp\left(-C_3 N^{\ell+1}\right).$$

On conclut en reprenant le raisonnement par récurrence exposé au § 8.3.d de [W].

IV - RESULTATS DE TRANSCENDANCE

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier les propriétés arithmétiques des homomorphismes analytiques $\mathfrak{p}$-adiques d'un sous-groupe $\mathfrak{G}'$ d'un groupe algébrique G' dans un groupe algébrique G. Le cas où G' est une puissance du groupe additif fait l'objet des §§ 4.1 à 4.3, où sont tout d'abord précisés les propriétés des sous-groupes à plusieurs paramètres $\mathfrak{p}$-adiques de G. On traite au § 4.4 le cas où G' est une puissance de groupe multiplicatif, et G une variété abélienne dégénérante. Enfin, le § 4.5 réunit, sans démonstrations, les résultats que fournit la méthode de Baker.

§ 4.1 - Préliminaires

a) Sous-groupes à plusieurs paramètres.

(Le corps ultramétrique k est ici supposé localement compact). Soient $\mathfrak{S}$ un groupe de Lie sur k de dimension finie, et $T\mathfrak{S}$ son espace tangent à l'origine. L'application logarithme de $\mathfrak{S}$, définie de façon canonique sur la réunion des sous-groupes compacts de $\mathfrak{S}$, induit sur un sous-groupe ouvert $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$ un difféomorphisme à valeurs dans $T\mathfrak{S}$, dont l'inverse est une application exponentielle de $\mathfrak{S}$. Les autres applications exponentielles de $\mathfrak{S}$ n'en diffèrent que par des homomorphismes à valeurs dans le sous-groupe de torsion de $\mathfrak{S}$, et définissent, sur un sous-groupe compact ouvert $\mathfrak{C}$ de $T\mathfrak{S}$ suffisamment "petit", une même application $\exp_{\mathfrak{S}}$, strictement analytique sur $\mathfrak{C}$. Du point de vue de la théorie des nombres transcendants, on pourra donc se limiter à l'étude des valeurs de $\exp_{\mathfrak{S}}$. Nous spécifions ci-dessous une représentation de l'application $\exp_{\mathfrak{S}}$ lorsque $\mathfrak{S}$ provient d'un groupe algébrique commutatif [5].

Soient donc G un groupe algébrique commutatif connexe, de dimension g, défini sur un corps de nombres F, k le complété de F en une place finie $\mathfrak{p}$ de F, et $X = \{X_0, \ldots, X_N\}$ les coordonnées d'un plongement projectif ψ de G défini sur F. Quitte à faire une extension finie de F, on peut, après un choix convenable du plongement ψ, se placer dans les hypothèses du § 1 de l'Appendice II [6]. D'autre part, on peut, sans perte de généralité, supposer que l'image $\mathfrak{G}$ du sous-groupe $\mathfrak{C}$ de $TG(k)$ par l'application $\exp_{G(k)}$ est contenue dans l'ouvert affine G_0 défini par $X_0 \neq 0$. C'est dans ce cadre que nous nous plaçons désormais.

---

(5) Pour plus de détails sur l'application logarithme et les applications exponentielles des groupes de Lie ultramétriques, on pourra consulter "Lie algebras and Lie groups", de J-P. Serre, ainsi que le chapitre III (en particulier les §§ 4 et 7) de "Groupes et algèbres de Lie", de N. Bourbaki et la notice historique qui s'y réfère. Voir également J.I. Igusa, Proc. Nat. Ac. Sc., 42, 1956, pp. 540-541, pour le cas des groupes commutatifs, et [Be 5], pour les propriétés métriques des exponentielles sur les variétés abéliennes.

(6) " Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs", par J-P. Serre (noté [S] dans ce qui suit).

Afin de représenter $\exp_{G(k)}$ par des fonctions (strictement analytiques) de g variables, nous fixons une base $\mathcal{D} = \{D_1,\dots,D_g\}$ de $TG(k)$ formée d'éléments de $TG(F)$ (ceci est licite, car $TG(F)$ est une F-structure sur $TG(k)$ - voir [Bo], chapitre AG, § 11), et nous identifions k^g à $TG(k)$ par un isomorphisme h appliquant $\mathcal{O}^g$ dans $\mathcal{E}$ et tel que, pour $i=1,\dots,g$, $d(\exp_{G(k)} \circ h)(\partial/\partial z_i)$ et D_i soient F-linéairement dépendants. On dira alors que le système de fonctions

$$\mathfrak{s}_{\mathcal{D}} = \{f_i = (X_i / X_o) \circ \exp_{G(k)} \circ h \; ; \; i = 1,\dots,N\}$$

est une <u>représentation analytique normalisée de</u> $\exp_{G(k)}$. Il est formé d'éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$. De plus, le choix du plongement projectif ψ mentionné ci-dessus permet d'affirmer (voir [W], proposition 1.2.3) que l'algèbre $F[f_1,\dots,f_N]$ est stable par les opérateurs $\partial/\partial z_1,\dots,\partial/\partial z_g$.

<u>Exemple</u> : Soit A une courbe elliptique définie sur F, dont l'image par ψ soit la cubique d'équation $X_o^2 X_2 - 4 X_1^3 + g_2 X_1 X_2^2 + g_3 X_2^3 = 0$. Une représentation analytique normalisée de l'exponentielle $\mathfrak{p}$-adique sur A est donnée par le système

$$f_1(z) = (\wp/\wp')(pz), \; f_2(z) = (1/\wp')(pz)$$

où $\wp$ et $\wp' = (d/dz)\wp$ désignent les fonctions elliptiques de Weil-Lutz associées aux images de g_2 et g_3 dans k[7].

Considérons, plus généralement, un sous-groupe φ à n paramètres de $G(k)$. La commutativité de G, jointe aux remarques préliminaires, permet de se limiter à l'étude des homomorphismes

$$\varphi = \exp_{G(k)} \circ \mathfrak{L},$$

où $\mathfrak{L}$ est un élément de $\mathrm{End}_k(k^n, TG(k))$ appliquant $\mathcal{O}^n$ dans $\mathcal{E}$.

<u>Définition</u> 7 - Un sous-groupe à n paramètres de $G(k)$ sera dit <u>normalisé</u> si sa différentielle à l'origine est un élément de $\mathrm{End}_F(TF^n, TG(F))$

Les propriétés fonctionnelles des sous-groupes à plusieurs paramètres de $G(k)$ résultent des formules d'addition et de multiplication suivantes, qui généralisent, en le précisant, un résultat d'Altman sur les variétés abéliennes (voir [Al], théorème 3.5). On note I l'anneau des entiers du corps de nombres F.

LEMME 7 - <u>Il existe un nombre réel</u> C_n <u>ne dépendant que de</u> G, ψ <u>et</u> n, <u>et vérifiant la propriété suivante. Pour tout élément</u> $P = (P_1,\dots,P_n)$ <u>de</u> G^n, <u>et tout élément</u> $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ <u>de</u> $\mathbb{N}^n$, <u>il existe un voisinage de Zariski</u> $\mathcal{V}_{P,\nu}$ <u>de</u> P

(7) Voir A.Weil, C.R.A.S. Paris, 203,1936, pp. 22.24; E. Lutz, J. Crelle, 177, 1937, pp. 238-247 ; et [Be 4].

dans G^n, et un $(N+1)$-uple

$$F_{P,\nu} = (F_{o,P,\nu}, \ldots, F_{N,P,\nu})$$

de polynômes n-homogènes en $(N+1)n$ variables X_{sj} $(s = 0,\ldots,N ; j = 1,\ldots,n)$, à coefficients dans I, de degrés $\leq C_n \|\nu\|^2$ par rapport à chaque $(N+1)$-uple de variables $(X_{o,j},\ldots,X_{N,j})$, de hauteurs $\leq \exp(C_n(1 + \|\nu\|^2))$, tels que, pour tout élément $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ de $\mathcal{V}_{P,\nu}$, le point $\nu_1 Q_1 + \ldots + \nu_n Q_n$ admette pour système de coordonnées projectives :

$$\{X_i(\nu_1 Q_1 + \ldots + \nu_n Q_n) = F_{i,P,\nu}(X_s(Q_j) ; s = 0,\ldots,N ; j = 1,\ldots,n) ; i = 0,\ldots,N\}.$$

La démonstration du lemme 7 est donnée au § 4.1.b. On en déduit l'énoncé suivant, relatif à la donnée de n endomorphismes $\pi_1,\ldots,\pi_n$ de $\mathcal{O}^n$ quelconques.

COROLLAIRE - Soit $\varphi : \mathcal{O}^n \to G(k)$ un sous-groupe à n paramètres de $G(k)$. Alors le système $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_N\}$ d'éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$ représentant φ dans les coordonnées affines $\{X_i/X_o ; i = 1,\ldots,N\}$ est d'ordre arithmétique fonctionnel fini. Plus précisément, le nombre ρ (resp. le corps K) qui lui est associé par la définition 1 peut être choisi égal à 2 (resp. à F). Enfin, tout point de $\mathcal{O}^n$ est régulier pour $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_N\}$.

Démonstration - Soient ζ un point de $\mathcal{O}^n$, et $P = (P_1,\ldots,P_n)$ l'élément de $G^n(k)$ défini, pour $j = 1,\ldots,n$, par

$$P_j = \varphi \circ \pi_j(\zeta).$$

Soit par ailleurs $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$ un élément de $\mathbf{N}^n$, et posons, avec les notations du lemme 7 :

$$R_{i,\nu}(x_{sj}, s = 1,\ldots,N ; j = 1,\ldots,n) = F_{i,P,\nu}(\xi_{sj} ; s = 0,\ldots,N ; j = 1,\ldots,n),$$

$$S_\nu(x_{sj} ; s = 1,\ldots,N ; j = 1,\ldots,n) = F_{o,P,\nu}(\xi_{sj} ; s = 0,\ldots,N ; j = 1,\ldots,n),$$

où $\xi_{sj} = x_{sj}$ (resp. $\xi_{oj} = 1$) pour $s = 1,\ldots,N$ (resp. $s = 0$).

Puisque $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $G(k)$ contenu dans $G_o(k)$, les points $P_1,\ldots,P_n$ et $\nu_1 P_1 + \ldots + \nu_n P_n$ n'appartiennent pas au diviseur d'équation $X_o = 0$. En particulier, $S_\nu\left(\frac{X_s(P_j)}{X_o(P_j)} ; s = 1,\ldots,N ; j = 1,\ldots,n\right)$ est non nul, et l'on a, pour $i = 1,\ldots,N$:

$$\varphi_i(\tau_\nu(\zeta)) = \frac{X_i}{X_o} \circ \varphi(\nu_1 \pi_1(\zeta) + \ldots + \nu_n \pi_n(\zeta)) = \frac{R_{i,\nu}(\underset{\sim}{\varphi}_1(\zeta),\ldots,\underset{\sim}{\varphi}_N(\zeta))}{S_\nu(\underset{\sim}{\varphi}_1(\zeta),\ldots,\underset{\sim}{\varphi}_N(\zeta))}.$$

Soient enfin $\mathcal{V}_{P,\nu}(k)$ l'ouvert de $G^n(k)$ formé des points k-rationnels de l'ouvert de Zariski $\mathcal{V}_{P,\nu}$ et $\mathcal{V}$ l'image réciproque par l'application $\underset{\sim}{\varphi} = (\varphi \circ \pi_1, \ldots, \varphi \circ \pi_n)$ de la trace de $\mathcal{V}_{P,\nu}(k)$ sur l'ensemble $\underset{\sim}{\varphi}(\mathcal{O}^n)$. D'après la remarque précédente, le polynôme S_ν ne s'annule en aucun point de $\underset{\sim}{\varphi}(\mathcal{V})$, et l'on a, pour tout élément z de $\mathcal{V}$:

$$\varphi_i(\tau_\nu(z)) = (R_{i,\nu} / S_\nu)(\underset{\sim}{\varphi}_1(z), \ldots, \underset{\sim}{\varphi}_N(z)).$$

Comme $\mathcal{V}$ est un ouvert non vide de $\mathcal{O}^n$, on en déduit les équations fonctionnelles

$$T_\nu \varphi_i = \frac{R_{i,\nu}(\underset{\sim}{\varphi}_1, \ldots, \underset{\sim}{\varphi}_N)}{S_\nu(\underset{\sim}{\varphi}_1, \ldots, \underset{\sim}{\varphi}_N)} \quad (i = 1, \ldots, N).$$

D'après le lemme 7, la famille $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ est donc d'ordre arithmétique fonctionnel fini (relativement à $\pi_1, \ldots, \pi_n$), et la construction précédente montre que le point ζ est régulier pour $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$.

Remarque 4 - Le lemme 7 fournit une démonstration indirecte de la proposition 5 de [S]. Son corollaire entraîne en particulier que, pour tout sous-groupe Γ de $\mathcal{O}^n$ tel que $\varphi(\Gamma)$ soit inclus dans $G(F)$, les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ sont d'ordre arithmétique inférieur ou égal à 2 sur Γ.

b) Démonstration du lemme 7.

La démonstration du lemme 7 repose sur le corollaire 2 de la proposition 3 de [S], et sur la formule d'addition suivante, qui résulte de la définition des groupes algébriques, jointe à leur quasi-compacité.

(*) il existe un nombre réel c_o, ne dépendant que de G et de ψ, et vérifiant la propriété suivante. Pour tout élément (P_1, P_2) de $G \times G$, il existe un voisinage $\mathcal{U}_{P_1,P_2}$ de (P_1, P_2) dans $G \times G$, et un $(N+1)$-uple

$$\mathcal{F}_{P_1,P_2} = (\mathcal{F}_{o,P_1,P_2}, \ldots, \mathcal{F}_{N,P_1,P_2})$$

de polynômes bihomogènes en $2(N+1)$ variables, à coefficients dans I, de degré $\leq c_o$ par rapport à chaque $(N+1)$-uple de variables, de hauteur $\leq \exp(c_o)$, tel que, pour tout élément (Q_1, Q_2) de $\mathcal{U}_{P_1,P_2}$, le point $Q_1 + Q_2$ admette pour système de coordonnées projectives :

$$\{X_i(Q_1+Q_2) = \mathcal{F}_{i,P_1,P_2}(X_o(Q_1), \ldots, X_N(Q_1) ; X_o(Q_2), \ldots, X_N(Q_2)) ; i = 0, \ldots, N\}.$$

On rappelle d'autre part que la hauteur du produit de k éléments $F_1, \ldots, F_k$ de $I[X_o, \ldots, X_N]$ vérifie l'inégalité :

$$H(F_1 \ldots F_k) \leq \prod_{i=1}^{k} \left(H(F_i) \prod_{j=o}^{N} (1 + \deg_{X_j} F_i)\right).$$

Démontrons tout d'abord le lemme 7 lorsque $n=1$. Fixons un entier $\ell > \sup(\sqrt{c_o}, 2)$. Pour $a = 0,\ldots,\ell$, on note :

$$\varphi^{(a)} = (\varphi_o^{(a)},\ldots,\varphi_N^{(a)})$$

l'un des $(N+1)$-uples de polynômes homogènes à coefficients dans I, de degré a^2, qui expriment la loi de multiplication par a sur G, et dont l'existence est assurée par le corollaire 2 de la proposition 3 de [S]. On désigne par $c_1,\ldots,c_4$ des nombres réels > 0 ne dépendant que de c_o, N, ℓ, et $\varphi^{(o)},\ldots,\varphi^{(\ell)}$.

Considérons la suite de $(N+1)$-uples de polynômes homogènes

$$\varphi_{\ell^m} = (\varphi_{o,\ell^m},\ldots,\varphi_{N,\ell^m})$$

définis par récurrence sur m par les relations :

$$\varphi_{i,1} = X_i \; ; \; \varphi_{i,\ell^{m+1}} = \varphi_i^{(\ell)}(\varphi_{o,\ell^m},\ldots,\varphi_{N,\ell^m}) \quad (i = 0,\ldots,N).$$

Pour tout point Q de G, et tout entier $m > 0$, le point $\ell^m Q$ admet, d'après [S], pour système de coordonnées projectives :

$$X_i(\ell^m Q) = \varphi_{i,\ell^m}(X(Q)) \quad (i = 0,\ldots,N).$$

Par ailleurs, on vérifie par récurrence sur $m > 0$ que les polynômes φ_{i,ℓ^m} sont de degré $\leqq \ell^{2m}$, et de hauteur $\leqq \exp(2c_2\,\ell^{2m} - c_2\,\ell^m)$, où

$$c_2 = 3(\ell^2+1)(N+1)\log(1+\ell) + \max_{i=0,\ldots,N} \log H(\varphi_i^{(\ell)}).$$

Pour $a = 1,\ldots,\ell-1$, et $m \geqq 0$, posons alors :

$$\varphi_{a\ell^m} = \varphi_{\ell^m} \circ \varphi^{(a)}.$$

Les composantes de $\varphi_{a\ell^m}$ sont des polynômes homogènes de degré $\leqq c_3\,\ell^{2m}$, de hauteur $\leqq \exp(c_3 \ell^{2m} a\ell^m)$, et, pour tout point Q de G, le point $a\ell^m Q$ admet pour système de coordonnées projectives $\{\varphi_{a\ell^m}(X(Q))\}$, en vertu de la définition de $\varphi^{(a)}$.

Pour tout entier $t \geqq 0$, soit enfin $\mathcal{L}_t$ l'ensemble des entiers $\nu > 0$ tels que $[(\log \nu)/(\log \ell)] = t$. Tout élément ℓ_t de $\mathcal{L}_t$ s'écrit de façon unique sous la forme $a\ell^t + \ell_{t-1}$, où $a \in \{1,\ldots,\ell-1\}$ et $\ell_{t-1} \in \mathcal{L}_{t-1} \cup \{0\}$. Pour tout point P de G, on définit, par récurrence sur t, un voisinage $\mathcal{V}_{P,\ell_t}$ de P dans G

et un $(N+1)$-uple F_{P,ℓ_t} de polynômes homogènes de la façon suivante : si $\ell_{t-1}=0$, alors, $\mathcal{V}_{P,\ell_t} = G$ et $F_{P,\ell_t} = \varphi_{\ell_t}$; dans les autres cas, $\mathcal{V}_{P,\ell_t}$ est la trace sur $\mathcal{V}_{P,\ell_{t-1}}$ de l'image réciproque de l'ouvert $\mathcal{U}_{a\ell^t P,\ell_{t-1}P}$ par le morphisme de G dans $G \times G$ défini par

$$Q \to (a\ell^t Q\ ,\ \ell_{t-1}Q),$$

et

$$F_{P,\ell_t} = \mathcal{F}_{a\ell^t P,\ell_{t-1}P}\ (\varphi_{a\ell^t}\ ,\ F_{P,\ell_{t-1}}).$$

D'après la formule d'addition (*) et les étapes précédentes, le multiple $\ell_t Q$ d'un point Q de $\mathcal{V}_{P,\ell_t}$ admet pour système de coordonnées projectives

$$\{X_i\ (Q) = F_{i,P,\ell_t}\ (X(Q))\ ;\ i = 0,\ldots,\ N\}.$$

On vérifie alors, par récurrence sur t, que, pour $\ell_t \in \mathfrak{L}_t$, les polynômes F_{i,P,ℓ_t} sont de degré inférieur ou égal à

$$c_o c_3 \ell^{2t} + c_o c_3 \sum_{j=0}^{t-1} c_o^{j+1}\ \ell^{2(t-1-j)} = c_3 \sum_{j=0}^{t} c_o^{j+1}\ \ell^{2(t-j)}\ ,$$

et de hauteur

$$H(F_{i,P,\ell_t}) \leqq \exp\ (c_4 \sum_{j=0}^{t} c_o^{j+1}\ \ell^{2(t-j)}\ ),$$

où c_4 satisfait à l'inégalité :

$$c_4 \geqq \max\ (2c_3,\ 6\ (N+1)c_o\ \log\ (1 + c_o c_4\ \ell)).$$

Or ℓ^2 est $> c_o$. Le choix

$$C_1 = (c_4\ c_o\ \ell^2 / (\ell^2 - c_o)) + \max_{i=0,\ldots,N} \log H\ (\varphi_i^{(o)})$$

permet alors de conclure la preuve du lemme 7, dans le cas $n=1$.

Le cas général se traite par récurrence sur n. Pour tout élément $P = (P_1,\ldots,P_n)$ de G^n, et tout élément $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$ de $\mathbf{N}^n$, on note $\mathcal{V}_{P,\nu}$ la trace sur l'ouvert $\mathcal{V}_{(P_1,\ldots,P_{n-1})\ ,\ (\nu_1,\ldots,\nu_{n-1})} \times \mathcal{V}_{P_n,\nu_n}$ de l'image réciproque de l'ouvert $\mathcal{U}_{\nu_1 P_1+\ldots+\nu_{n-1} P_{n-1}\ ,\ \nu_n P_n}$ par le morphisme de G^n dans $G \times G$ défini par

$$(Q_1,\ldots,Q_n) \to (\nu_1 Q_1 + \ldots + \nu_{n-1}\ Q_{n-1}\ ,\ \nu_n\ Q_n)\ ,$$

et on pose

$$F_{P,\nu} = \mathcal{F}_{\nu_1 P_1+\ldots+\nu_{n-1} P_{n-1}\ ,\ \nu_n P_n}\ (F_{(P_1,\ldots,P_{n-1})}\ ,\ (\nu_1,\ldots,\nu_{n-1})\ ,\ F_{P_n,\nu_n})\ .$$

Alors, $\mathcal{V}_{P,\nu}$ est un voisinage de P dans G^n, et les pas précédents de la récurrence, joints à la formule d'addition (*), entraînent que, pour tout élément $(Q_1,\ldots,Q_n)$ de $\mathcal{V}_{P,\nu}$, le point $\nu_1 Q_1+\ldots+\nu_n Q_n$ admet pour système de coordonnées projectives :

$$\{X_i\ (\nu_1 Q_1+\ldots+\nu_n Q_n) = F_{i,P,\nu}\ (X(Q_1),\ldots,\ X(Q_n))\ ;\ i = 0,\ldots,N\}.$$

On vérifie enfin que les polynômes $F_{i,P,\nu}$ sont de degré par rapport à $X(Q_j)$ inférieur ou égal à

$$\sup(c_o\ C_{n-1}\ (\nu_1+\ldots+\nu_{n-1})^2\ ,\ c_o\ C_1 \nu_n^2\ ) \leqslant c_o\ (C_1 + C_{n-1})\ \|\nu\|^2\ ,$$

et de hauteur inférieure ou égale à

$$(1+c_o)^{2(N+1)}\ e^{c_o}\ (1+(C_1 + C_{n-1})\ \|\nu\|^2)^{n\,c_o(N+1)}\ \exp(c_o\ (1+(C_1+C_{n-1})\ \|\nu\|^2\ ))\ .$$

Il existe donc un nombre réel C_n répondant aux conditions du lemme 7.

§ 4.2 - Sous-groupes à plusieurs paramètres normalisés.

On rapprochera l'énoncé obtenu dans cette situation du théorème 5.2.1 de [W]. On rappelle que la dimension algébrique d'un sous-groupe à n paramètres désigne la dimension de la clôture de Zariski de son image.

THÉORÈME FONDAMENTAL I : Soient G un groupe algébrique commutatif connexe, défini sur un corps de nombres, φ un sous-groupe à n paramètres normalisé de $G(k)$, et Γ un sous-groupe de $\mathcal{O}^n$ contenant n éléments k-linéairement indépendants, dont les images par φ appartiennent à $G(\bar{\mathbb{Q}})$. On fait de plus l'hypothèse suivante :

(H) il existe un élément u de $\mathcal{O}^n$, et n endomorphismes $\pi_1,\ldots,\pi_n$ de $\mathcal{O}^n$, définis sur $\bar{\mathbb{Q}}$, tels que, pour tout n-uple $(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ d'entiers > 0, l'endomorphisme $\nu_1\pi_1+\ldots+\nu_n\pi_n$ soit injectif, et tels que les points $\pi_1(u),\ldots,\pi_n(u)$ engendrent Γ.

Alors, la dimension algébrique de φ est $\leqslant n$.

Démonstration : (On reprend les notations du corollaire du lemme 7). D'après le choix du plongement projectif ψ, et puisque φ est normalisé, tout élément de Lie (F^n) opère sur l'algèbre $\bar{\mathbb{Q}}[\varphi_1,\ldots,\varphi_N]$. Les endomorphismes $d\pi_1,\ldots,d\pi_n$ étant définis sur $\bar{\mathbb{Q}}$, la même propriété est satisfaite par l'algèbre $\bar{\mathbb{Q}}[\varphi_i \circ \pi_j\ ;\ i=1,\ldots,N\ ;\ j=1,\ldots,n]$. Dans ces conditions, le corollaire du lemme 7 montre que les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites par le système $\{\varphi_1,\ldots\varphi_N\}$

et le point u. Puisque chacune des fonctions $\varphi_i \circ \pi_j$ $(i = 1,\ldots,N ; j = 1,\ldots,n)$ y prend une valeur algébrique, le degré de transcendance de l'algèbre $\bar{\mathbb{Q}}[\varphi_1,\ldots,\varphi_N]$ est $\leq n$.

Il est probable que, dans l'énoncé du théorème I, l'hypothèse (H) soit superflue. Dans le cas $n = 1$, elle est automatiquement vérifiée, et ce théorème permet de retrouver les résultats de K. Mahler sur les propriétés arithmétiques de la fonction exponentielle p-adique ordinaire (analogues des théorèmes de Hermite-Lindemann[8] et de Gel'fond-Schneider [9] ; il contient donc les analogues p-adiques des théorèmes 2.2.1, 2.2.2 et 2.3.1 de [W]). Plus généralement il fournit une version p-adique à tous les énoncés du chapitre 3 de [W] ne faisant pas intervenir de périodes.

Considérons maintenant le cas où G est une variété abélienne A définie sur un corps de nombres. Soient ε_β une représentation analytique normalisée de $\exp_{A(k)}$, et u un point nul de $\mathcal{O}^g$ où les composantes de ε_β prennent simultanément des valeurs algébriques. D'après [Be 3], proposition 2, l'une au moins des coordonnées de u est transcendante. Le théorème I permet de préciser cet énoncé sous certaines hypothèses sur l'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}_0 A$ de A.

Définition 8 - Soit A une variété abélienne simple de dimension g, définie sur un corps de nombres F. On dira que A est de type R.M.(multiplications réelles) s'il existe un plongement dans $\mathrm{End}_0 A$ d'un corps totalement réel K de degré g sur $\mathbb{Q}$ (une variété abélienne de type C.M. est donc de type R.M.). Quitte à étendre F, on peut alors construire une base $\{D_1,\ldots,D_g\}$ de $TA(F)$ formée de vecteurs propres pour l'action de K sur $TA(k)$. Une représentation analytique ε_β de l'application $\exp_{A(k)}$ sera dite fortement normalisée si elle correspond aux choix d'une telle base.

THÉORÈME 4 : Soient A une variété abélienne simple définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$, de dimension g et de type R.M., ε_β une représentation analytique fortement normalisée de $\exp_{A(k)}$, et u un point non nul de $\mathcal{O}^g$ où les composantes de ε_β prennent simultanément des valeurs algébriques. Alors, chacune des coordonnées de u est transcendante.

La démonstration du théorème 4 reprend celle du théorème 6.1.1 de[W], où était déjà signalé le caractère surabondant de l'hypothèse C.M. Il suffit ici de noter que si $\tau_1,\ldots,\tau_g$ désignent une base de l'anneau des entiers du corps K, et $\sigma_1,\ldots,\sigma_g$ ses différents plongements dans k, la matrice $[(\sigma_i(\tau_j)) ; 1 \leq i, j \leq g]$ a un rang égal à g, puisque le carré de son déterminant est le discriminant du corps K. D'autre part, K étant un corps, tout endomorphisme non nul de k^n provenant de l'action de K sur $TA(k)$ est injectif.

(8) Voir K. Mahler, J. Crelle, 169, 1932 pp. 61-66.

(9) Voir K. Mahler, Compositio math., 2, 1935, pp. 259-275.

Remarque 5 - Bien entendu, l'analogue complexe du théorème 4 est également satisfait [10]. Il permet en particulier d'étudier les périodes de certaines formes modulaires de poids 2.

§ 4.3 - Sous-groupes non normalisés.

Nous rassemblons sous un seul énoncé les versions p-adiques des théorèmes 2.3.1, 2.5.1, 4.1.2, 4.2.1, 8.1.1 et 8.2.1 de [W].

THÉORÈME FONDAMENTAL II : Soient G un groupe algébrique commutatif connexe, défini sur $\bar{\mathbf{Q}}$, φ un sous-groupe à n paramètres de $G(k)$, de dimension algébrique d, et Γ un sous-groupe de $\mathcal{O}^n$ de rang fini ℓ sur $\mathbf{Z}$, tel que $\varphi(\Gamma) \subset G(\bar{\mathbf{Q}})$. Alors

i) le coefficient de densité de Γ vérifie

$$\varkappa(\Gamma, k^n)\,(d-n) \leqq 2d\,;$$

de plus, $2d$ peut être remplacé par d quand G est un groupe linéaire, et $\varkappa(\Gamma, k^n)$ par ℓ quand $n = 1$;

ii) on suppose maintenant que Γ est formé d'éléments de $\bar{\mathbf{Q}}^n$, et que, pour tout élément non nul u de k^n, le sous-groupe à un paramètre $z \to \varphi(zu)$ n'est pas rationnel. On a, dès que $\Gamma \subset \mathbf{Z}_p^n$:

$$\ell \leqq 2n\,;$$

de plus, $2n$ peut être remplacé par n quand G est un groupe linéaire, et l'hypothèse $\Gamma \subset \mathbf{Z}_p^n$ peut être supprimée quand $n = 1$.

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème 2, la proposition 2 et le lemme 3, joints aux techniques élaborées dans [W]. Elle n'offre pas de changement notoire par rapport au cas complexe, et nous l'omettrons.

La première partie du théorème II contient les résultats de Serre sur les caractères de $\mathcal{O}^n$ (voir [Se 3]) et un énoncé de Flicker sur les variétés abéliennes ([F], chapitre 3, § 5). La deuxième partie fournit une nouvelle démonstration de l'analogue p-adique du théorème de Gel'fond-Schneider [11]. Par ailleurs, elle admet, pour le sous-groupe $(z_1,\ldots,z_n) \to \alpha_1^{z_1}\ldots\alpha_n^{z_n}$ du groupe multiplicatif, le corollaire suivant (voir [W], § 8.3), où Log désigne la fonction logarithme p-adique.

PROPOSITION 5 - Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des unités de $\mathcal{O}$ algébriques sur $\mathbf{Q}$, et multiplicativement indépendantes. Alors, les nombres $\operatorname{Log}\alpha_1,\ldots,\operatorname{Log}\alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{Q}_p$.

(10) Voir D. Bertrand, C.R.A.S. Paris, 288, 1979, pp. 531-534.
(11) Voir Veldkamp, J. London Math. Soc., 15, 1940, pp. 183-192.

Nous verrons au paragraphe 4.5 comment la méthode de Baker permet d'améliorer certains des énoncés de ce paragraphe.

§ 4.4 - Variétés abéliennes dégénérantes

(On ne suppose plus ici k localement compact). Nous étudions maintenant les homomorphismes analytiques (au sens de la définition 5 du § 3.2) d'une puissance du groupe multiplicatif dans un groupe algébrique. La situation la mieux connue concerne les variétés abéliennes dégénérantes. Plus précisément, soit Γ un sous-groupe discret libre et de rang maximal de $(k^*)^g$, qui vérifie les conditions de Riemann. Alors, l'espace holomorphe $(k^*)^g/\Gamma$ est isomorphe à une variété abélienne [12] $A_\Gamma(k)$. Dans un sytème de coordonnées associé à un plongement projectif ψ de A_Γ, tout homomorphisme analytique de $(k^*)^g$ dans $A_\Gamma(k)$ s'exprime par une famille $\{\theta_0,\ldots,\theta_N\}$ de fonctions thêta. Ces fonctions sont analytiques sur $(k^*)^g$, et leurs équations fonctionnnelles montrent qu'elles sont d'ordre inférieur ou égal $\{0,2\}$.

L'énoncé suivant est dû (sous une formulation différente) à Flicker (voir [F], chapitre 5). Il généralise le théorème 2 de [Be 1], qui concernait les courbes elliptiques de Tate.

THÉORÈME FONDAMENTAL III - *Soient A_Γ une variété abélienne dégénérante de dimension g, définie sur un corps de nombres, χ un homomorphisme analytique de $(k^*)^g$ sur $A_\Gamma(k)$ dont la dérivée à l'origine est injective, et $\{D_1,\ldots,D_g\}$ une base de Lie $(k^*)^g$ définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Alors, l'une au moins des dérivations $d\chi(D_i)$ $(i = 1,\ldots,g)$ de Lie $A_\Gamma(k)$ n'est pas définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration - Considérons un plongement projectif ψ de A_Γ, défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$, et tel que $\psi \circ \chi(1,\ldots,1) = (1,0,\ldots,0)$, et soit $\{\theta_0,\ldots,\theta_N\}$ la représentation analytique de χ associée à ψ. On peut, sans restreindre la généralité, supposer que la base $\{D_1,\ldots,D_g\}$ est formée de vecteurs $\{z_1\,\partial/\partial z_1, \ldots, z_g\,\partial/\partial z_g\}$. Dans ces conditions, les fonctions $f_0(z) = z_1$, $f_1(z) = (\theta_1/\theta_0)(z),\ldots,f_N(z) = (\theta_N/\theta_0)(z)$ prennent simultanément des valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}$ au point $(1,\ldots,1)$. En vertu du théo-

(12) L'étude analytique de ces variétés, initiée par Tate dans le cas des courbes elliptiques (voir P. Roquette : Analytic Theory of elliptic functions over local fields, Hamburger Math. Einzelschr. 1, 1970) et par Morikawa (Nagoya Math. J., 20, 1962, pp. 1-27 et 231-250) dans le cas général, a été en particulier poursuivie par Mc Cabe (Ph. D. Thesis, Harvard, 1968), Raynaud (Actes C.I.M., Nice, 1970, 1, pp. 473-477), Mumford (Compo. Math. 24, 1972, pp. 239-271) et Gerritzen (Math. Ann., 196, 1972, 323-346). Les techniques de géométrie analytique rigide développées par ces derniers auteurs sont résumées dans un exposé de M. Van der Put paru au Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, Paris, 1975/76, fasc 2, n° J 7. Pour une approche plus élémentaire, voir H. Tapia-Recillas, Nagoya Math. J., 69, 1978, pp. 65-96.

rème 3, les dérivations $D_1,\ldots,D_g$ ne peuvent pas laisser stable l'algèbre $\bar{\mathbf{Q}}[f_o,\ldots,f_N]$, dont le degré de transcendance sur $\mathbf{Q}$ est égal à $g+1$, ni donc l'algèbre $\bar{\mathbf{Q}}[f_1,\ldots,f_N]$.

Le théorème III exprime que les dérivées logarithmiques des quotients $\theta_1/\theta_o,\ldots,\theta_N/\theta_o$, relativement aux opérateurs $D_1,\ldots,D_g$, ne peuvent toutes prendre des valeurs algébriques en l'origine de $(k^*)^g$. Cet énoncé concerne donc en fait les valeurs de formes modulaires [13]. On obtient ainsi, dans le cas des courbes elliptiques (voir [Be 1], théorème 2 ; et [W], § 3.2).

COROLLAIRE - Soient E_4 et E_6 les séries d'Eisenstein normalisées de poids 4 et 6, et q un élément de k tel que $0<|q|<1$. Alors, l'un au moins des nombres $E_4(q)$, $E_6(q)$ est transcendant.

Il serait très intéressant de démontrer, sous les hypothèses du théorème III, la transcendance de chacune des dérivations $d_\chi(D_i)$, et d'en expliciter d'autres corollaires, par exemple pour les formes modulaires de Hilbert.

Remarque 6 - Soit E_2 la série d'Eisenstein normalisée de "poids" 2. En considérant la dérivée logarithmique d'une fonction thêta associée à la courbe elliptique $A_{<q>}$, on déduit de la proposition 3 que l'un au moins des nombres $(E_4^3/E_6^2)(q)$, $(E_2 E_4/E_6)(q)$ est transcendant (voir [Be 6], lemme 2). Plus généralement [14], on montre que, pour tout élément q de k tel que $0<|q|<1$, le corps $\mathbf{Q}(E_2(q), E_4(q), E_6(q))$ a un degré de transcendance ≥ 2 sur $\mathbf{Q}$.

Les résultats précédents ne permettent pas d'étudier les valeurs de l'invariant modulaire $J(q)$ lorsque q est algébrique (voir [Man], § 5 ; et [Be 6], conjectures 1 et 2). La proposition 6 fournit une autre approche de cette question (cf.[W], corollaire 4.2.6).

PROPOSITION 6 - Soient χ un homomorphisme analytique non constant de k^* sur une courbe elliptique de Tate d'invariant $J(q)$ algébrique, et u un élément de k^* algébrique sur $\mathbf{Q}$, qui n'est pas racine de l'unité. Alors, q et $\chi(u)$ ne peuvent être tous deux définis sur $\bar{\mathbf{Q}}$.

La proposition 6 découle de la proposition 4, appliquée au groupe Γ engendré par q et u.

§ 4.5 - Problèmes d'indépendance linéaire

Les démonstrations des résultats établis jusqu'à présent n'ont fait intervenir que des variantes des méthodes de Gel'fond et de Schneider (voir [Wa 2], chapitres

(13) Voir par exemple A. Weil, Comm. P.A. Maths., 39, 1976, pp. 813-819, et G. Shimura, Duke Math. J., 44, 1977, pp. 365-387.
(14) Voir D. Bertrand, Astérisque, 61, 1979, pp.29-34.

2 et 3). Nous passons maintenant en revue les résultats que fournit la méthode de Baker. Ce sont essentiellement les énoncés du § 4.3 qu'elle permet d'améliorer. Ainsi, on aura bien entendu reconnu, dans la conclusion de la proposition 5, un cas particulier d'un résultat de Brumer ([Bru], théorème 1), qui obtenait en 1967 une version p-adique du théorème de Baker (voir [W], théorème 1.1.9) dans le cas homogène. Plus généralement, on a [15] :

THÉORÈME 5 - *Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des unités de $\mathcal{O}$ algébriques sur $\mathbb{Q}$, et multiplicativement indépendantes. Alors, les nombres* Log $\alpha_1,\ldots,$ Log α_n *et* 1 *sont linéairement indépendants sur* $\bar{\mathbb{Q}}$.

En vertu du théorème 5, l'hypothèse $\Gamma \subset \mathbb{Z}_p^n$ de la 2ème partie du théorème II peut être supprimée lorsque G est un groupe linéaire, la conclusion demeurant : $\ell \leq n$ (voir [W], théorème 2.5.1). On obtient également les analogues p-adiques des théorèmes 2.4.1 et 2.4.2 de [W].

Une version p-adique des résultats de Masser, Coates et Lang sur les variétés abéliennes de type CM (voir [W], théorème 6.2.3 et [M2]) a été obtenue dans [B-F] [16]. Contrairement à celle du théorème 4, sa démonstration repose sur le lemme 5 du § 2.3 et met en jeu des hypothèses métriques qui ne sont satisfaites que sous certaines conditions sur p. On note $\{e_1,\ldots e_g\}$ la base canonique de k^g et p le nombre premier que divise p.

THÉORÈME 6 - *Soient A une variété abélienne simple de dimension g, définie sur un corps de nombres F, et telle que* $\mathrm{End}_0 A$ *soit isomorphe à une extension quadratique totalement imaginaire L d'un corps totalement réel K de degré g . On note e_β une représentation analytique fortement normalisée de l'application* $\exp_{A(k)}$, *et $u_1,\ldots,u_\ell$ des éléments de $\mathcal{O}^g$, linéairement indépendants sur* $\mathrm{End}_0 A$, *où les composantes de e_β prennent simultanément des valeurs algébriques. On suppose que p se décompose totalement dans K, et que les idéaux de K divisant p ont le même type de décomposition dans L. Alors $e_1,\ldots,e_g, u_1,\ldots,u_\ell$ sont linéairement indépendants sur* $(\mathrm{End}_0 A)_{\bar{\mathbb{Q}}}$.

La condition imposée à p est indésirable, bien qu'on puisse la rapprocher de l'hypothèse faite sur les places à l'infini de L.. Une conjecture générale concernant ce problème est proposée dans [Be 5].

COROLLAIRE - *On reprend les hypothèses 6, et on note φ un sous-groupe à un paramètre de* $A(k)$. *S'il existe deux nombres algébriques $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants dont les images par φ appartiennent à* $A(\bar{\mathbb{Q}})$, *alors A est une courbe elliptique.*

(15) Pour un aperçu historique de la théorie des formes linéaires de logarithmes p-adiques, voir A. van der Poorten, chapitre 2 de [Ba-M], § 1.

(16) Le cas des courbes elliptiques avait été traité dans [Be 4].

La démonstration de ce corollaire est identique à celle du théorème 6.3.1 de [W]. On peut néanmoins éviter le passage aux périodes complexes en remarquant qu'avec les notations de [W], le corps $Q(\gamma)$ est une extension quadratique de Q incluse dans L. De plus, les restrictions à $Q(\gamma)$ des plongements de L dans $\bar{Q}$ qui définissent le "type C.M." de la variété abélienne A se confondent. Ceci contredit[17] la simplicité de A .

V - APPLICATIONS

Nous rassemblons au paragraphe 5.1 les applications à l'étude des corps de nombres des énoncés de transcendance établis ci-dessus. Les résultats obtenus sont de nature qualitative. En revanche, les applications décrites au paragraphe 5.2 font appel à des versions quantitatives des résultats de [W] et de leurs analogues p-adiques.

§ 5.1 - Arithmétique des corps de nombres

Le théorème II i) du paragraphe 4.3 (voir [Se 3]) a été utilisé par Serre, dans ses travaux sur les représentations p-adiques, pour démontrer le résultat suivant ([Se 4], chapitre 3, § 3.1) :

Soient K un corps de nombres, et ρ une représentation abélienne p-adique, rationnelle et semi-simple de $\mathrm{Gal}(K^{alg}/K)$. On suppose que K est un compositum d'extensions quadratiques. Alors, ρ est localement algébrique.

Une version plus forte du théorème II permettrait d'étendre cet énoncé à tous les corps des nombres (voir [Se 4], chapitre 3, p.27). On pourra rapprocher ce problème de la question posée à la remarque 2 du § 2.4 (voir également [W], § 8.2.c.).

Le lien entre le problème de Leopoldt sur le régulateur p-adique des corps de nombres totalement réels et le 7ème problème de Hilbert a été noté par Ax[18] . Les résultats de transcendance, dûs à Mahler, que contient le théorème 1 du § 4.2, lui ont permis de traiter le cas des extensions abéliennes de Q d'exposant ≤ 4 ou égal à 6. Le théorème 5 du § 4.5 (voir [Br]) entraîne ([Br], théorème 2) :

Soient K une extension abélienne de Q, et p un nombre premier. Le régulateur p-adique de K n'est pas nul.

Les questions de transcendance posées par le cas général sont décrites aux §§ 2.5 et 8.2 de [W]. D'autres approches du problème sont d'ailleurs possibles[19].

---

(17) Voir par exemple D. Mumford, "Abelian varieties", p. 214.
(18) J. Ax, Illinois J. of Math., 9, 1969, pp. 584-589.
(19) Voir J-P. Serre, C.R.A.S. Paris, 1978, 287, pp. 183-188 (théorème 3.14)

Signalons enfin une récente application du théorème 5 à l'étude des fonctions L p-adiques de Kubota et Leopoldt $L_p(s,\psi)$ associées aux caractères de Dirichlet à valeurs dans C_p. Elle est due à Ferrero et Greenberg [20] :

Soit ψ un caractère de Dirichlet primitif impair. La fonction $L_p(s,\psi)$ ne peut admettre le point $s = 0$ pour zéro d'ordre 2.

§ 5.2 Géométrie diophantienne

Soient C une courbe algébrique de genre ≥ 1, définie sur un corps de nombres K, et φ une fonction K-rationnelle sur C. On se propose d'étudier la variation du plus grand facteur premier $\pi_\varphi(P)$ du dénominateur de $\varphi(P)$ en fonction de la hauteur $H_\varphi(P)$ de $\varphi(P)$. D'après le théorème de Siegel-Mahler-Lang, dont la démonstration n'est pas effective, $\pi_\varphi(P)$ croît avec $H_\varphi(P)$.

Pour plusieurs classes de courbes, les énoncés quantitatifs de la théorie des formes linéaires de logarithmes (qui précisent le théorème 1.1.9 de [W] et le théorème 5 du § 4.5) fournissent une réponse entièrement effective au problème. Nous renvoyons au chapitre 3 de [Ba-M], où sont passés en revue les différents résultats acquis par cette méthode. Mentionnons toutefois l'énoncé suivant, dû à Coates [21] et qui permet en principe de déterminer, à isomorphisme près, toutes les courbes elliptiques de conducteur donné [22] :

Si x et y sont des entiers premiers entre eux de module $\leq X$, le plus grand facteur premier de $y^2 - x^3$ est minoré par $10^{-3}(\log\log X)^{1/4}$.

La théorie des formes linéaires d'intégrales abéliennes (qui répond au théorème 6.2.3 de [W] et au théorème 6 du § 4.5) permet également d'étudier certains types d'équations diophantiennes (voir [Ma 2], III, et [B-F]). Mais elle fait appel au théorème de Mordell-Weil sur la jacobienne de la courbe C, et n'est donc en général pas effective. Les résultats qualitatifs qu'elle fournit sont néanmoins beaucoup plus précis que les précédents. On pourra ainsi comparer l'estimation effective obtenue par Kotov[23] pour une courbe elliptique quelconque E :

---

(20) B. Ferrero - R. Greenberg, Invent. Math., 50, 1978, pp. 91-102

(21) J. Coates, Acta Arithm., 26, 1970, pp.425-435.

(22) Le cas du conducteur 11 a été traité par Agrawal, Coates, Hunt et van der Poorten (à paraître).

(23) S.V. Kotov, Dokl. A.N.B.S.S.R., 1977, 21, pp. 101-104.

$$\pi_{\varphi}(P) >> (\log \log H_{\varphi}(P).\ \log \log \log H_{\varphi}(P))^{1/2}$$

au théorème 3 de [Be 4], qui fournit, quand E admet des multiplications complexes, et pour un nombre réel $\gamma = \gamma(E,K) > 0$, l'estimation ineffective :

$$\pi_{\varphi}(P) >> (\log H_{\varphi}(P))^{\gamma}.$$

De plus, et c'est là son principal intérêt, cette seconde méthode permettrait, sous certaines conjectures, de traiter toutes les courbes de genre ≥ 1 (voir [L 5], et [Be 5], corollaire 2).