V. Poénaru

Appendice : Spines des variétés de dimension 2

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 90-92
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__90_0>

APPENDICE : SPINES DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 2

par V. POÉNARU

Soit N une variété de dimension 2 compacte, connexe, à bord non vide. Si N est triangulée et si $L_1 \subset L_2 \subset N$ sont deux sous-complexes, on dit qu'on passe de L_1 à L_2 par une dilatation de dimension n s'il existe un n-simplexe τ de N et une face τ' de τ tels que

$$L_2 - L_1 = \operatorname{int} \tau \cup \operatorname{int} \tau'$$

(int. désigne la cellule ouverte). Le passage inverse est un collapsing. Si l'on passe de L' à L" par une suite de dilatations, alors on peut le faire de façon ordonnée, en sorte que la suite des dimensions respectives soit non décroissante.

Un glissement est une suite composée de collapsings et de dilatations :

$$(*) \qquad L'' = C_n D_n C_{n-1} D_{n-1} \dots C_1 D_1(L')$$

où $\dim L'' = \dim L' = 1$, $\dim C_i = \dim D_i = 2$, et support C_i = support D_i. Plus généralement, si L' et $L'' \subset N$ sont deux complexes de dimension 1, on va parler d'un glissement $L' \Longrightarrow L''$ s'il existe une triangulation de N dans laquelle (*) est réalisée.

Un sous-polyèdre $L \subset N$ est un spine si, pour une certaine triangulation, N collapse sur L.

Théorème. Soient Σ_1, Σ_2 deux 1-complexes de N n'ayant pas de bouts libres. Si Σ_1 et Σ_2 sont deux spines de N, on peut passer de Σ_1 à Σ_2 par une suite de glissements et d'isotopies.

Démonstration. Elle se décompose dans les lemmes suivants.

Lemme 1. Des isotopies et des glissements transforment un spine en un spine.

Lemme 2. Soient Σ un spine de N et L un arc simple de N ne rencontrant Σ qu'en ses extrémités. Il existe une application continue $\varphi : D^2 \to N$ et une décomposition de ∂D^2 en deux segments : $\partial D^2 = A \cup B$, $\partial A = \partial B$, $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B = \emptyset$, telles que :

1) $\varphi|A$ soit un homéomorphisme sur L ;

2) $\varphi|\mathring{D}^2 - B$ soit un plongement lisse dans $N - \Sigma$;

3) $\varphi(B) \subset \Sigma$.

Les démonstrations de ces deux lemmes sont laissées en exercice.

Lemme 3. Pour une triangulation de N , on considère deux suites de sous-complexes

$$X^0 \subset X^1 \subset \ldots \subset X^n$$
$$Y^0 \subset Y^1 \subset \ldots \subset Y^n$$

ayant les propriétés suivantes :

1) X^0 et Y^0 sont des spines de N ;

2) les passages $X^{i-1} \subset X^i$, $Y^{i-1} \subset Y^i$ sont des dilatations de dimension 2 ;

3) X^n est le même sous-complexe de N que Y^n .

Alors il existe une suite de sous-complexes $Z^0 \subset Z^1 \subset \ldots \subset Z^{n-1}$ telle que :

4) Z^0 s'obtienne à partir de Y^0 par glissement (en particulier Z^0 est un spine) ;

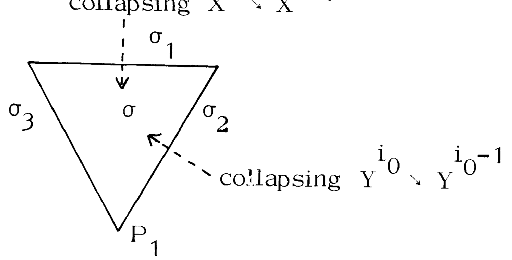
5) $Z^{n-1} = X^{n-1}$;

6) les passages $Z^{i-1} \subset Z^i$ soient des dilatations de dimension 2 .

Démonstration. Soient σ le 2-simplexe de N qui correspond à la dilatation $X^{n-1} \subset X^n$ et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ses trois faces. Disons que P_i est le sommet opposé à σ_i . Disons aussi que σ_1 est la face libre du collapsing $X^n \searrow X^{n-1}$ et que σ_j est la face libre du collapsing $Y^{i_0} \searrow Y^{i_0 - 1}$:

$$Y^{i_0} - Y^{i_0 - 1} = \operatorname{int} \sigma \cup \operatorname{int} \sigma_j \ .$$

Si $j = 1$, le lemme est immédiat ; on suppose donc $j = 2$.



Puisque σ_1 est une face libre dans $Y^n = X^n$, cette arête n'est dans le bord d'aucun 2-simplexe de Y^{i_0-1} . Donc $\sigma_1 \subset Y^0$. De même d'après 2), le 0-squelette de $X^n = Y^n$ est contenu dans X^0 et dans Y^0 . Il en résulte que

$$\partial\sigma \cap Y^0 = \begin{cases} \sigma_1 \cup \sigma_3 \\ \text{ou} \\ \sigma_1 \cup P_1 \end{cases}$$

Soit $Z^0 = (Y^0 - \operatorname{int} \sigma_1) \cup \sigma_2$. Si $\partial\sigma \cap Y^0 = \sigma_1 \cup \sigma_3$, c'est évident qu'on peut passer de Y^0 à Z^0 par glissement. Si $\partial\sigma \cap Y^0 = \sigma_1 \cup P_1$, on peut appliquer le lemme 2 avec $\Sigma = Y^0$ et $L = \sigma_3$. Ceci nous permet encore de conclure, dans ce cas, que le passage $Y^0 \Longrightarrow Z^0$ est un glissement. Ainsi le point 4) est vérifié. La construction de $Z^1 \subset \dots \subset Z^{n-1}$ pour assurer 5) et 6) est laissée au lecteur. □

Lemme 4. Soient L_1, L_2 deux complexes de dimension 1 de N , sans bouts libres. Soient L'_1, L'_2 qui s'obtiennent respectivement par dilatation de dimension 1 à partir de L_1 et L_2 . Si l'on peut passer de L'_1 à L'_2 par glissements et isotopies, la même chose est vraie pour L_1 et L_2 .

Ceci est un exercice facile. A partir de ces quatre lemmes, on déduit sans peine le théorème.