Astérisque

A. Fathi
F. Laudenbach

Les feuilletages mesurés

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 71-89
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__71_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXPOSÉ 5

LES FEUILLETAGES MESURÉS

par A. FATHI et F. LAUDENBACH

§ I. - Définition. Le théorème de récurrence de Poincaré
La formule d'Euler-Poincaré

§ II. - Feuilletages mesurés et courbes simples

§ III. - Les courbes comme feuilletages mesurés

Appendice (V. Poénaru). - Spines des variétés de dimension 2

§ I. - DÉFINITION. LE THÉORÈME DE RÉCURRENCE DE POINCARÉ LA FORMULE D'EULER-POINCARÉ

I. 1. Définition. Soient M une surface (†) et $\mathfrak{F}$ un feuilletage de M avec singularités isolées. On appelle mesure transverse invariante une mesure μ définie sur chaque arc transversal au feuilletage et vérifiant la propriété d'invariance suivante :

Soient $\alpha, \beta : [0,1] \to M$ deux arcs transversaux à $\mathfrak{F}$, isotopes à travers des arcs transversaux dont les extrémités restent dans la même feuille ; alors, $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$.

Si l'arc passe par une singularité, la transversalité s'entend en tout point de l'arc appartenant à une feuille régulière.

N.B. Dans la suite, on se limite au cas où la mesure est régulière par rapport à la mesure de Lebesgue : chaque point régulier admet une carte lisse (x,y) où le feuilletage est défini par dy et la mesure sur chaque arc transverse est induite par dy.

(†) La théorie peut se faire pour des surfaces non orientables. Pour simplifier, on supposera M orientable.

I. 2. Singularités permises à l'intérieur.

Pour chaque entier $k \geq 1$, on considère la singularité de la forme quadratique holomorphe $z^k dz^2$. On considère

$$\operatorname{Im} \sqrt{z^k dz^2} = r^{k/2} \left(r \cos\left(\frac{2+k}{2}\theta\right) d\theta + \sin\left(\frac{2+k}{2}\theta\right) dr \right)$$

qui est une forme de degré 1 bien définie au signe près. Elle définit donc un feuilletage mesuré dont l'origine est une singularité isolée admettant pour séparatrices les demi-droites $r \geq 0$, $\frac{2+k}{2}\theta = 0 \bmod \pi$.

On choisit pour modèle de la singularité un domaine compact contenant l'origine, limité par des arcs transversaux au feuilletage (faces) et des arcs contenus dans les feuilles (côtés).

Remarque. Soit ω une forme différentielle fermée de degré 1 sur M, $(\partial M = \emptyset)$, dont les singularités sont de Morse (propriété générique). Supposons qu'en plus ω n'a pas de centre (point critique d'indice 0 ou 2), alors ω définit un feuilletage mesuré. Il est facile de voir qu'un feuilletage mesuré est défini par une forme fermée si et seulement s'il est transversalement orientable dans le complémentaire des singularités.

I. 3. Singularités permises au bord.

Les points réguliers du bord sont ceux où le bord est transversal au feuilletage ou bien ceux au voisinage duquel le bord coïncide avec une feuille.

Les points singuliers admettent pour carte la trace des modèles ci-dessus sur le demi-plan supérieur si k est pair, ou sur le demi-plan de partie réelle négative si k est impair.

Finalement, dans tout ce travail, étant donné un feuilletage mesuré $(\mathcal{F}, \mu)$ sur la variété M, chaque point de M admet pour voisinage un domaine de carte feuilletée isomorphe à l'un des modèles de la figure 1.

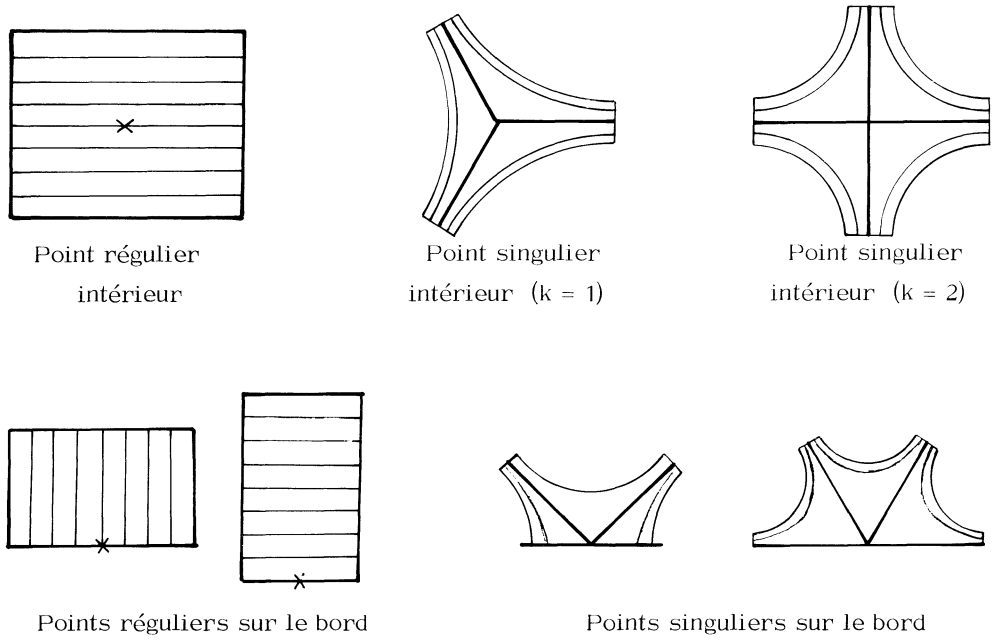


Figure 1

N.B. Dans la carte d'un point singulier, on conviendra que les séparatrices appartiennent à des plaques différentes. Ainsi, dans M, toutes les feuilles sont-elles difféomorphes à des intervalles de $\mathbb{R}$ ou à S^1.

I.4. Bon atlas.

Si M est compacte, il existe une constante ε_0 et deux recouvrements finis $\{U_j\}_{j\in J}$, $\{V_j\}_{j\in J}$ par des domaines de cartes vérifiant :

1° $M = \bigcup_{j\in J} (\text{int } U_j)$;

2° Pour tout $j \in J$, $U_j \subset V_j$ et les faces de U_j sont contenues dans les faces de V_j (figure 2).

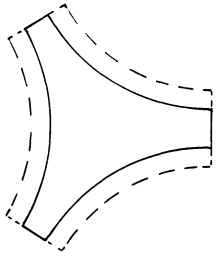


Figure 2

3° Tout point des côtés de U_j est à une distance supérieure à ε_0 des côtés de V_j (toutes les distances sont comptées le long des transversales au sens de la mesure invariante) ;

4° Chaque point singulier n'appartient qu'à une carte U_j ;

5° L'intersection de deux cartes U_{j1} et U_{j2} (resp. V_{j1} et V_{j2}) est un rectangle :

Pour satisfaire cette condition, on choisit un champ de droites transversales au feuilletage sur le complémentaire des singularités et on impose aux cartes d'être assez petites et à leurs faces d'être tangentes à ce champ.

I.5. Théorème (récurrence de Poincaré). Soit M une surface compacte équipée d'un feuilletage mesuré $(\mathfrak{F},\mu)$. Soit α un arc ($\cong [0,1]$) de ∂M, transversal à $\mathfrak{F}$ en tout point de $\operatorname{int}\alpha$, et x une de ses extrémités. Alors la feuille L_x issue de x va, soit à un point singulier, soit au bord.

Démonstration. On va utiliser l'atlas I.4. Supposons que L_x n'aboutisse pas à une singularité et tronquons α pour que l'on ait $\mu(\alpha) = \varepsilon < \varepsilon_0$, et que, pour tout $y \in \alpha$, la feuille L_y ne s'arrête pas à une singularité. J'affirme que, si L_x ne recoupe pas le bord, on a une immersion injective $\Phi : \alpha \times \mathbb{R}_+ \to M$, où $\Phi(\{y\} \times \mathbb{R}_+) = L_y$ pour tout $y \in \alpha$.

En effet, si P est une plaque de L_x dans U_i, elle est dans le bord d'une bande de V_i, d'épaisseur ε ne contenant aucune singularité d'après l'hypothèse faite sur α ; si deux plaques de L_x se recouvrent, les bandes en question se recollent par les propriétés de l'atlas. D'où une immersion Φ. L'injectivité tient à ce que $\Phi^{-1}(\alpha) = \alpha \times \{0\}$ et que par tout point de l'image de Φ ne passe qu'une feuille.

Soit z un point de récurrence de la feuille L_x ; si $z \in U_i$, il existe une infinité de bandes de largeur ε, composantes de $\operatorname{Im}\Phi \cap V_i$. Or deux bandes distinctes sont disjointes. Impossible. $\square$

Corollaire. Si une feuille L n'est pas fermée dans $M - \operatorname{sing}\mathfrak{F}$, et si α est un arc transversal à $\mathfrak{F}$ coupant L, alors $\alpha \cap L$ est infini.

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il est impossible que $\alpha \cap L$ soit une extrémité de α. Pour cela, on coupe M le long de $\operatorname{int}\alpha$ et on obtient M' équipé du

feuilletage induit $\mathfrak{F}'$. Si C est la courbe de $\partial M'$ provenant de α , le long de C $\mathfrak{F}'$ présente la configuration de la figure 3 avec deux singularités s_1 et s_2 correspondant aux extrémités de α ; à L correspondent deux feuilles L_g et L_d de $\mathfrak{F}'$ issues de s_1 .

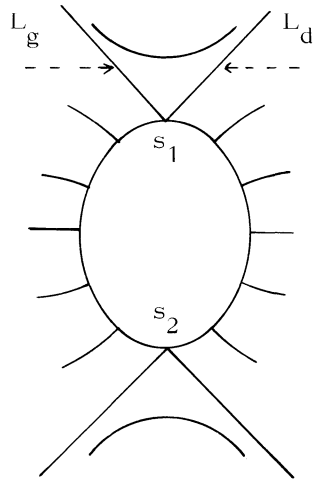


Figure 3

D'après le théorème, L_g (resp. L_d) aboutit à une singularité de $\mathfrak{F}'$ ou au bord de M' . Si ce bord est C , de l'hypothèse faite sur α , on déduit que $L_d = L_g$, donc que L est fermée (contradiction). Sinon, considérant M' contenu dans M , L_g et L_d aboutissent à des singularités de $\mathfrak{F}$ ou au bord de M ; donc L est fermée (contradiction). $\square$

I. 6. La formule d'Euler-Poincaré.

Soit M une surface compacte équipée d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ ayant les singularités admises en I.2 et I.3. On rappelle que chaque composante du bord est

(A) ou bien transversale à $\mathfrak{F}$,

(B) ou bien un cycle de feuilles (réunion finie de feuilles et de points singuliers).

A chaque singularité s , on associe un entier P_s :

P_s = nombre de séparatrices, si $s \in \operatorname{int} M$ ou si $s \in \partial M$ (cas (B)) ,

P_s = nombre de séparatrices + 1 , si $s \in \partial M$ (cas (A)) .

Formule : $2\chi(M) = \sum_{\operatorname{sing} \mathfrak{F}} (2 - P_s)$.

Démonstration. On commence par se ramener au cas où ∂M ne contient pas de singularité selon la procédure de la figure 4. En poussant ainsi chaque singularité du bord

vers l'intérieur, on conserve l'entier P_s selon les conventions fixées plus haut. Désignons par Σ' l'ensemble des points singuliers à nombre impair de séparatrices,

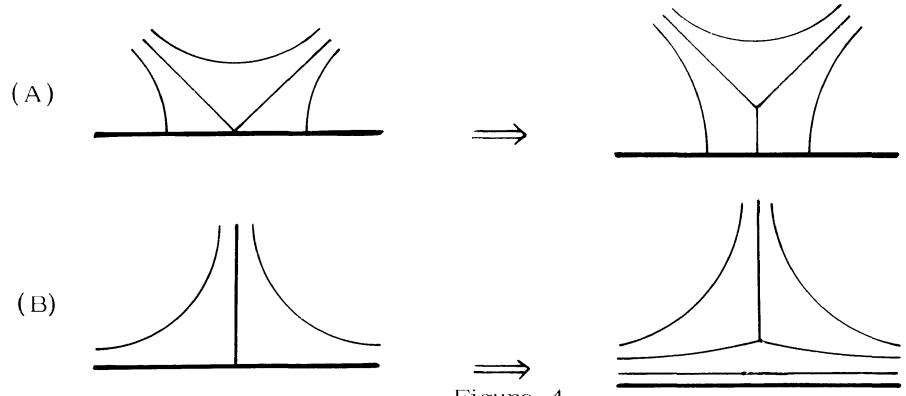


Figure 4

Σ'' l'ensemble de ceux dont le nombre de séparatrices est pair et $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$. On a un homomorphisme d'orientation du fibré tangent à $\mathfrak{F}$

$$\pi_1(M - \Sigma) \to \mathbb{Z}/2 \quad .$$

Il définit un revêtement à 2 feuillets qui se prolonge au-dessus de Σ'' et se ramifie au-dessus de Σ'. On a donc un revêtement ramifié $p : \widetilde{M} \to M$, où $\widetilde{M}$ est équipé d'un feuilletage singulier orientable $\widetilde{\mathfrak{F}}$, que l'on peut penser comme engendré par un champ de vecteurs $\widetilde{X}$; si s est une singularité de $\widetilde{\mathfrak{F}}$, alors P_s est un entier pair et l'indice de $\widetilde{X}$ en s est $-\frac{P_s}{2} + 1$. Puisqu'il n'y a pas de singularité au bord, on a :

$$\chi(\widetilde{M}) = \sum_{\text{sing } \widetilde{X}} \text{indice} = \sum_{\text{sing } \widetilde{\mathfrak{F}}} \left(-\frac{P_s}{2} + 1\right)$$

or $\quad \chi(\widetilde{M}) = 2\chi(M) - \text{card } \Sigma' \quad$ et $\quad \sum_{\text{sing } \widetilde{\mathfrak{F}}} 1 = 2 \text{ card } \Sigma'' + \text{card } \Sigma' \quad .$

Enfin, si $p(s) \in \Sigma''$, $P_s = P_{p(s)}$, mais s possède un "jumeau" ; si $p(s) \in \Sigma'$, $P_s = 2\, P_{p(s)}$. En regroupant ces égalités, on a la formule cherchée. □

N.B. Dans les applications numériques, ne pas oublier que $P_s \geq 3$.

I. 7. Courbe quasi-transversale.

On dira qu'une courbe γ est quasi-transversale à $\mathfrak{F}$ si chaque composante connexe de γ - sing $\mathfrak{F}$ est ou bien une feuille ou bien transversale à $\mathfrak{F}$. De plus, au voisinage d'une singularité, un arc transversal n'est pas dans un secteur adjacent à un arc contenu dans une feuille (figure 5) et deux arcs transversaux sont dans deux secteurs distincts.

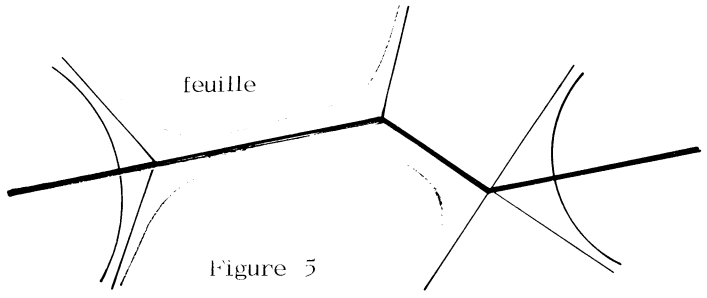


Figure 5

Proposition. Il n'existe pas de disque D à bord anguleux, avec $\partial D = \alpha \cup \beta$, où α est un arc contenu dans une feuille et β un arc quasi-transversal.

Démonstration. Supposons qu'un tel disque existe. Soit $N \cong D^2$, le double de D le long de β ; N est muni d'un feuilletage avec singularités permises. Mais $\chi(N) > 0$, ce qui contredit la formule d'Euler-Poincaré. $\sqsubset$

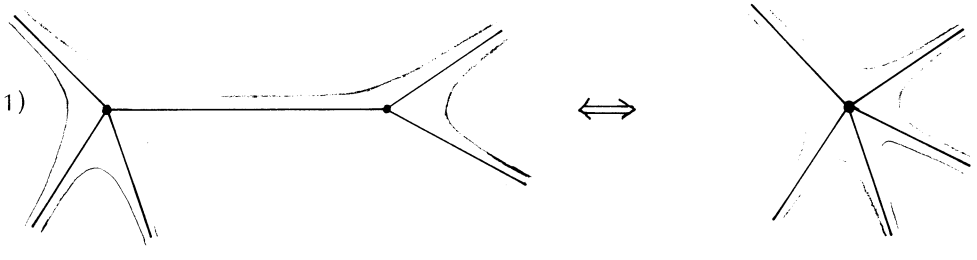
Remarque. De la même façon, on voit qu'une courbe fermée immergée quasi-transversale à $\mathfrak{F}$ n'est pas homotope à zéro.

§ II. - FEUILLETAGES MESURÉS ET COURBES SIMPLES

II. 1. Notations. $\mathfrak{m}\mathfrak{F}(M)$ ou $\mathfrak{m}\mathfrak{F}$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, désigne l'ensemble des feuilletages mesurés avec singularités permises, définis sur une surface compacte donnée M , quotienté par les deux relations d'équivalence suivante :

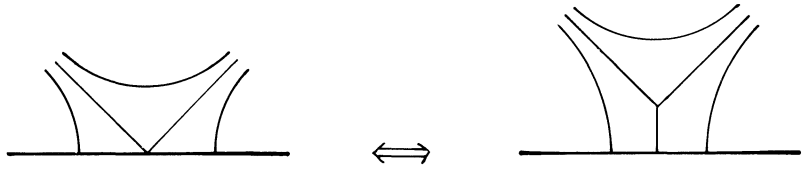
- isotopie,
- opérations de Whitehead :

(1)



(Il faut préciser que si les deux singularités sont sur le bord, on ne contracte que si la feuille connectante est sur le bord.)

(2)



Rappelons que $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie (= d'isotopie) de courbes fermées simples, C^∞- par morceaux, non homotopes à zéro et non isotopes à une courbe du bord.

II. 2. $I_* : \mathfrak{M}\mathfrak{F} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$.

Soit $(\mathfrak{F},\mu)$ un feuilletage mesuré et γ une courbe fermée. On pose $\mu(\gamma) = \mathrm{Sup}\,(\Sigma\,\mu(\alpha_i))$ où $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ sont des arcs de γ , mutuellement disjoints et transversaux à $\mathfrak{F}$ et où le sup est pris sur toutes les sommes de ce type. Autrement dit, $\mu(\gamma)$ est la variation totale de la coordonnée y le long de γ dans un atlas qui définit le feuilletage mesuré. Cette quantité est aussi notée par Thurston $\int_\gamma \mathfrak{F}$.
Soit σ un élément de $\mathcal{S}$; on pose :

$$I(\mathfrak{F},\mu;\sigma) = \inf_{\gamma\in\sigma} \mu(\gamma) .$$

C'est évidemment un invariant d'isotopie ; d'autre part, si $(\mathfrak{F},\mu)$ et $(\mathfrak{F}',\mu')$ se déduisent l'un de l'autre par une opération de Whitehead, alors, pour chaque courbe $\gamma \in \sigma$ et chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma' \in \sigma$ telle que $|\mu(\gamma) - \mu'(\gamma')| < \varepsilon$ (figure 6).

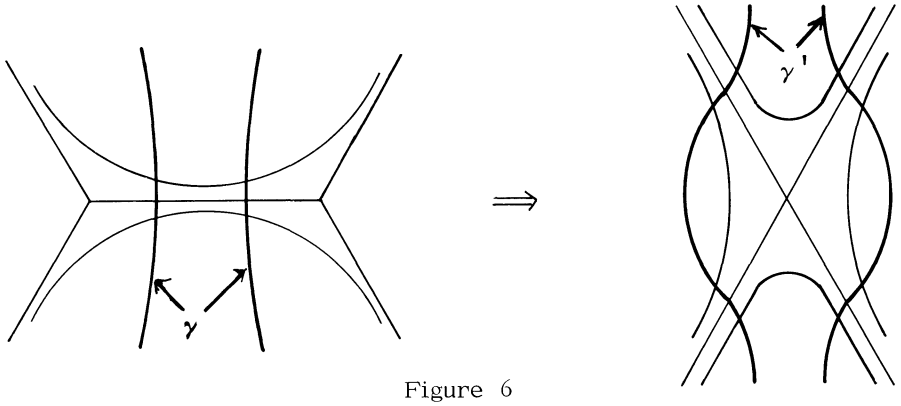


Figure 6

Cela suffit pour assurer que la formule ci-dessus définit une application :

$$I_* : \mathbb{T}\mathfrak{F} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$$

$$\langle I_*(\mathfrak{F},\mu), \sigma\rangle = I(\mathfrak{F},\mu ; \sigma) \quad .$$

II. 3. Proposition. Si γ est quasi-transversale à $\mathfrak{F}$, alors

$$\mu(\gamma) = I(\mathfrak{F},\mu ; \sigma)$$

où σ est la classe d'homotopie de γ .

Démonstration. Soit $\gamma' \in \sigma$; si γ et γ' sont disjoints, γ et γ' limitent un anneau A . D'après le théorème de récurrence de Poincaré, presque toute feuille rentrant dans A en un point de γ recoupe le bord ; pour des raisons d'indice (proposition I.7), elle ne peut recouper γ ; donc $\mu(\gamma) \leq \mu(\gamma')$.

Si γ et γ' ont des points communs, on procède comme suit : on commence par mettre γ' en position générale par rapport à γ au sens où $\gamma' - \gamma$ ne contient qu'un nombre fini d'intervalles ouverts ; ceci se fait par une approximation qui perturbe la mesure arbitrairement peu. Puisque γ et γ' sont homotopes, il existe un arc α' dans γ' et un arc α dans γ , tels que $\operatorname{int}\alpha \cap \operatorname{int}\alpha' = \emptyset$, et qui bordent un disque D (proposition 10 de l'exposé 3). Presque toute feuille rentrant dans D en un point de α recoupe le bord. Donc $\mu(\alpha) \leq \mu(\alpha')$. Si $\gamma'' = \alpha' \cup \beta'$, on peut former $\gamma'' = \alpha'' \cup \beta''$ avec $\alpha'' = \alpha$ et $\beta'' = \beta'$. On a $\mu(\gamma'') \leq \mu(\gamma')$ et $\pi_0(\gamma'' - \gamma) < \pi_0(\gamma' - \gamma)$. Donc, par récurrence sur $\pi_0(\gamma' - \gamma)$, on prouve que $\mu(\gamma') \geq \mu(\gamma)$. □

Pour trouver les classes de $\mathcal{S}$ qui contiennent des courbes quasi-transversales, on a besoin du lemme suivant concernant l'application d'holonomie.

II. 4. Soient γ un arc (arc = arc compact) dans une feuille et α , β deux arcs disjoints transversaux partant chacun d'une extrémité de γ , tous deux du même côté. Notons L_t la feuille passant par $\alpha(t)$; $\alpha(0)$ et $\beta(0)$ sont les extrémités de γ dans L_0 . On choisit les paramétrages de sorte que :

$$\mu([\alpha(0), \alpha(t)]) = \mu([\beta(0), \beta(t)]) = t \quad .$$

Il existe un germe d'application d'holonomie

$$h_\gamma : (\alpha, \alpha(0)) \longrightarrow (\beta, \beta(0))$$

caractérisé par la propriété suivante : h_γ est continue et si $h_\gamma(\alpha(t))$ est défini, on

a $h_\gamma(\alpha(t)) \in L_t$; l'invariance de la mesure μ signifie que h_γ est une isométrie, c'est-à-dire que $h_\gamma(\alpha(t)) = \beta(t)$; on note $\{\gamma_t\}$ la famille continue d'arcs, telle que $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_t \subset L_t$ et γ_t joint $\alpha(t)$ à $\beta(t)$.

<u>Lemme de stabilité</u>. Si h_γ est définie sur l'intervalle ouvert $[\alpha(0), \alpha(t_0)[$, alors les points $\alpha(t_0)$ et $\beta(t_0)$ sont joignables par un arc γ_{t_0} qui est contenu dans la réunion d'un nombre fini de feuilles et de points singuliers et qui est la limite des arcs γ_t, $t \in [0, t_0[$.

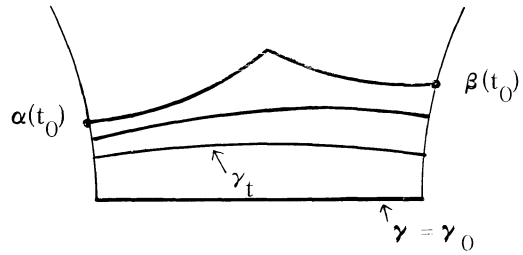


Figure 7

De plus, il existe une immersion $H : [0,1] \times [0,t_0] \to M$ qui est C^∞ à l'intérieur et telle que l'on ait $H([0,1] \times \{t\}) = \gamma_t$ pour tout $t \in [0,t_0]$.

L'obstruction à prolonger h_γ au-delà de $\alpha(t_0)$ est due aux situations suivantes :
- $\alpha(t_0)$ (resp. $\beta(t_0)$) est une extrémité de α (resp. β) ;
- $\gamma(t_0)$ contient une singularité.

<u>Preuve</u>. On utilise le bon atlas de I.4 et les notations U_j, V_j, ε_0. On peut évidemment se ramener au cas où $t_0 < \varepsilon_0$, où l'arc $[\alpha(0), \alpha(t_0)]$ est contenu dans une carte V_{j_0} et où l'arc $[\beta(0), \beta(t_0)]$ est contenu dans une carte V_{j_1}. Recouvrons alors γ_0 par des cartes $U_0 = U_{j_0}$, $U_1, \ldots, U_n = U_{j_1}$; la numérotation est choisie en sorte qu'il y ait pour chaque i une plaque P_i^0 de U_i, contenue dans $U_i \cap \gamma_0$, vérifiant $P_i^0 \cap P_j^0 = \emptyset$ sauf si $|j - i| = 1$; bien sûr, la numérotation peut repasser plusieurs fois par la même carte.

Considérons la réunion $X_0 = \cup \{P_0^t \mid t \in [0,t_0]\}$ des plaques de V_0 qui coupent $[\alpha(0), \alpha(t_0)]$; la singularité éventuelle de V_0 ne peut se trouver que sur la plaque $P_0^{t_0}$ sinon l'application d'holonomie ne serait pas définie sur $[\alpha(0), \alpha(t_0)[$. Si on passe dans la carte V_1, on trouve une intersection $X_0 \cap V_1$ qui est un rectangle d'épaisseur t_0, d'après les propriétés du bon atlas. On fabrique la réunion X_1 des plaques de V_1 qui rencontrent $X_0 \cap V_1$ et on continue ainsi de suite. □

Remarques. 1) Ce lemme nécessite la mesure invariante ; voici un contre-exemple dans le cas où il y a une holonomie non triviale.

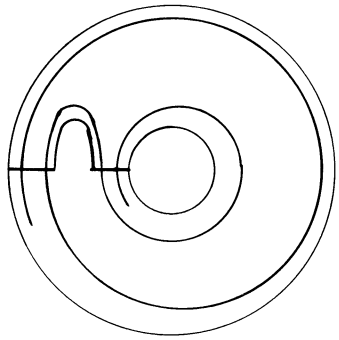


Figure 8

2) Le même lemme est vrai si γ_0 passe par des singularités dont les séparatrices sont du côté opposé à α et β .

II. 5. Corollaire. On suppose que M n'est pas le tore T^2 . Soit γ un cycle de feuilles ; ou bien γ passe par des singularités et il existe des séparatrices de part et d'autre de γ ; ou bien γ appartient à un "anneau maximal" A dont les feuilles intérieures sont des cycles ; une composante de ∂A qui n'est pas dans ∂M est un cycle singulier.

II. 6. Proposition. Soient γ une courbe fermée simple (connexe) sur la surface M et $(\mathfrak{F},\mu)$ un feuilletage mesuré. Si γ sépare M en deux composantes, $M = M_1 \underset{\gamma}{\cup} M_2$, on notera Σ_i $(i = 1,2)$ un "spine" de M_i (i.e. : 1-complexe sur lequel M_i "collapse").

1° Si $I(\mathfrak{F},\mu\ ;\ [\gamma]) \neq 0$, il existe $(\mathfrak{F}',\mu')$ équivalent à $(\mathfrak{F},\mu)$, tel que γ soit transversale à $\mathfrak{F}'$ en évitant les singularités.

2° Si $I(\mathfrak{F},\mu\ ;\ [\gamma]) = 0$, il existe $(\mathfrak{F}',\mu')$ équivalent à $(\mathfrak{F},\mu)$ vérifiant l'une ou l'autre des deux conditions suivantes (non exclusives) :

(i) γ est un cycle de feuilles de $\mathfrak{F}'$;

(ii) γ sépare et, pour $i = 1$ ou 2 , Σ_i est un ensemble invariant de $\mathfrak{F}'$.

Cette situation ne peut arriver que si l'ensemble des liaisons entre les feuilles possède des cycles.

Remarques. 1) Si on s'interdit de modifier $\mathfrak{F}$, on obtient seulement le résultat

beaucoup plus faible que γ est homotope à une immersion quasi-transversale à $\mathfrak{F}$; d'ailleurs, cette immersion est une limite de plongements.

2) La figure 9 illustre la situation du 2° (ii) de la proposition. Le feuilletage de la surface de genre 2 est obtenu par "élargissement" de la courbe C (voir § III).

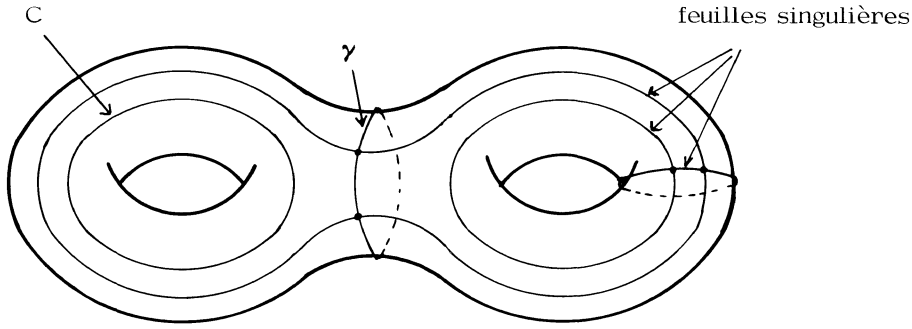


Figure 9

Nous démontrerons simultanément le critère suivant, utile pour plus tard :

<u>Critère de minimalité</u> : Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1° $\mu(\gamma) > I(\mathfrak{F}, \mu ; [\gamma])$;

2° Il existe deux points x_0 et x_1 de γ appartenant à la même feuille L de sorte que :

- $x_0 \cup x_1 = \partial c$, où c est un arc de L ,
  $= \partial c'$, où c' est un arc de γ ,
- $c \cup c' = \partial D$, où D est un 2-disque.

<u>Démonstration</u>. On peut supposer $\gamma = \alpha_1 * \beta_1 * \ldots * \alpha_k * \beta_k * \ldots * \alpha_n * \beta_n$ où les arcs α_i sont transversaux à $\mathfrak{F}$ et où les arcs β_j , éventuellement réduits à un point, sont dans une réunion finie de feuilles et de points singuliers ; la numérotation est cyclique. Si l'on n'a pas au départ une telle décomposition, ou bien on l'obtient dans chaque carte par isotopie isométrique, ou bien il existe une carte dans laquelle la conclusion 2° du critère est visible et une rectification abaissant la longueur conduit à une décomposition finie.

Ceci étant, on a, pour β_k les configurations de la figure 10. Par définition, (1) est la configuration où le lemme II.4 est applicable ; dans (2) et (3), β_k contient au moins une singularité et II.4 n'est pas applicable ; dans (4), β_k ne contient pas

de singularité.

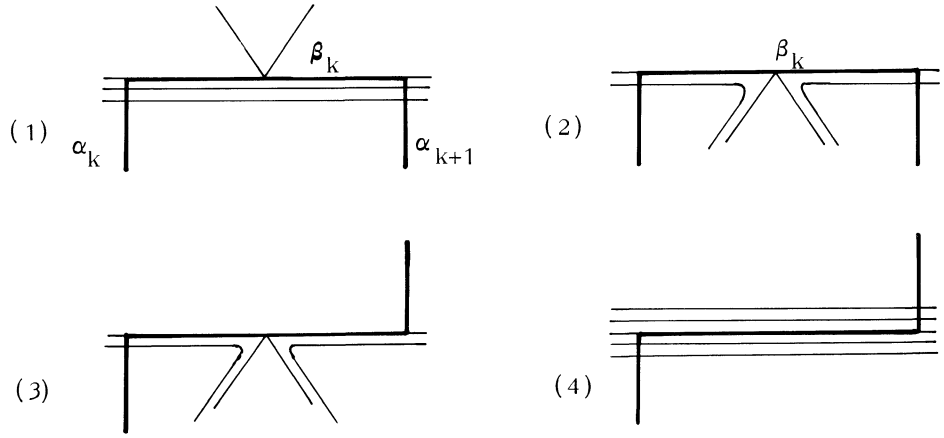


Figure 10

Dans (1), la conclusion 2° du critère est visible. D'autre part, j'affirme que, si pour tout k, β_k n'est pas dans la configuration (1), alors γ est isotope à une courbe quasi-transversale de même longueur ; c'est-à-dire que $\mu(\gamma)$ est minimal d'après II.3 et l'affirmation achève de prouver le critère de minimalité. Pour prouver l'affirmation, on remplace chaque configuration (4) par une transversale ; les configurations (2) et (3) se modifient comme sur la figure 11 . □

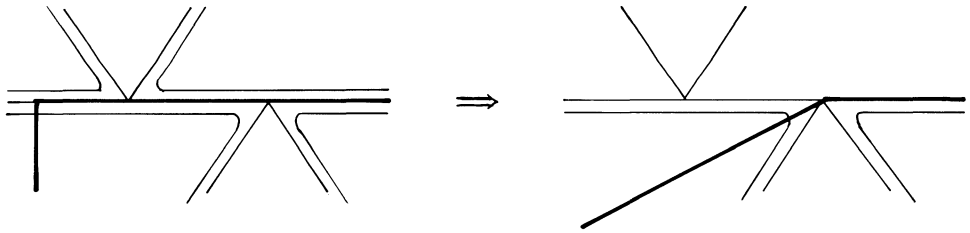


Figure 11

Poursuivons maintenant la démonstration de la proposition. Comme dans la preuve ci-dessus, les β_k du type (4) sont remplacés par des transversales et ceux des types (2) et (3) peuvent être supposés avoir pour extrémités des singularités.

A ce point, ou bien γ est un cycle de feuilles (conclusion 2° (i) de la proposition), ou bien on peut concentrer en un point chaque feuille contenue dans γ . En éclatant alors les singularités obtenues (figure 12), on se ramène à la situation où tous les arcs β_k sont du type (1) . A partir de là, la récurrence se fait sur le

nombre d'arcs de γ contenus dans une feuille. S'il n'y en a pas, γ est transversal au feuilletage (conclusion 1°).

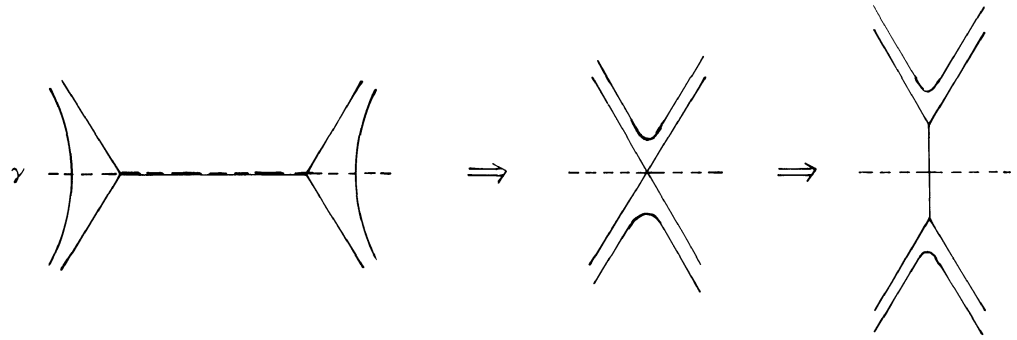


Figure 12

Sinon, considérons β_1. Le lemme II.4 fournit une immersion h d'un rectangle R. Le feuilletage induit $\hat{\mathfrak{F}} = h^{-1}(\mathfrak{F})$ a toutes ses singularités sur un même arc λ du bord. Notons $\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_m$ les arcs de $\hat{\gamma} = h^{-1}(\gamma)$, qui sont dans les feuilles de $\hat{\mathfrak{F}}$ (arcs horizontaux). Disons que $\hat{\beta}_1$ est l'arc le plus proche des singularités (au sens de la mesure transversale) ; alors la composante de $\hat{\gamma}$, qui contient $\hat{\beta}_1$, limite un sous-rectangle R' qui est minimal ; on voit que $h|\mathrm{int}\, R'$ est un plongement disjoint de γ.

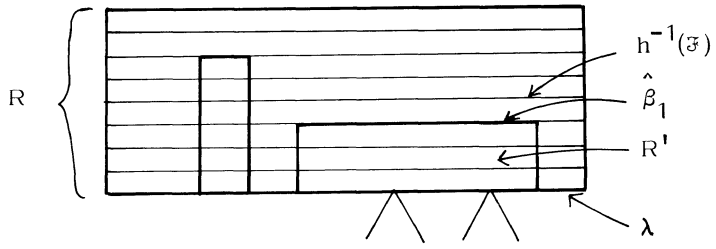


Figure 13

Si R' ne contient pas de singularité de $\hat{\mathfrak{F}}$, un voisinage de h(R') est le support d'une isotopie de γ qui chasse $\hat{\beta}_1$; même si $h(\hat{\beta}_1) = \beta_1$, l'éxécution de cette isotopie conduit à une situation où, dans le nouveau rectangle R associé à β_1, le nouvel arc $\hat{\gamma}$ possède moins d'arcs horizontaux.

Si R' contient une singularité, alors, pour des raisons de mesure

transversale, il est facile de voir que $h(\hat{\beta}_1)$ est un arc β_k distinct de β_1 (sinon l'épaisseur de R' serait la même que celle de R).

Après le raisonnement ci-dessus, quitte à changer circulairement la numérotation des arcs β , on peut supposer que :

1° $h|R - \lambda$ est un plongement,

2° $h(\text{int } R) \cap \gamma$ est vide,

3° $h(\lambda) \cap \beta_k$ est vide, pour tout k .

Ecartons d'abord les cas simples suivants (A) et (B) , où il y a visiblement des opérations, isotopies et opérations de Whitehead, qui diminuent le nombre d'arcs de γ contenus dans une feuille.

(A) λ ne contient pas de singularité (figure 14).

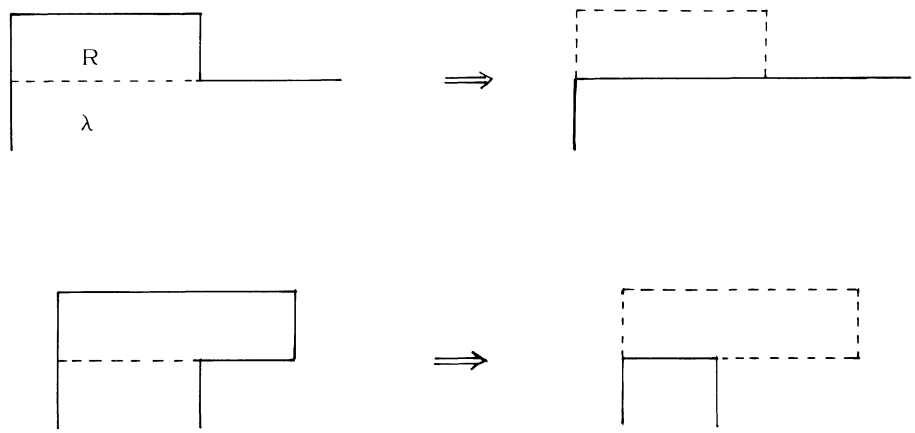


Figure 14

(B) λ contient des singularités et R est plongé. L'isotopie à travers R remplace β_1 par un arc du type (2) . On lui applique la procédure du début.

Ces cas mis à part, $h(\lambda)$ possède des points doubles. Vu comme chemin singulier, λ s'écrit comme composé :

$$\lambda = \mu_0 * \lambda_1 * \ldots * \lambda_q * \mu_1$$

où μ_0 (resp. μ_1) est un arc de feuille joignant un point de α_1 (resp. α_2) à une singularité et où λ_i $(1 \leq i \leq q)$ est un arc d'une feuille joignant deux singularités ;

certains de ces arcs peuvent être réduits à un point et plusieurs peuvent appartenir à la même feuille. Mais, λ a dans R une approximation qui est un arc plongé ne rencontrant α_1 et α_2 qu'à ses extrémités ; de ce fait, chaque feuille porte au plus deux arcs de λ. Plus précisément, ni μ_0, ni μ_1 ne peut appartenir à la même feuille qu'un λ_j ; si $\mu_0 \cap \mu_1$ n'est pas réduit à une de leurs extrémités, c'est que $\alpha_1 = \alpha_2$ (i.e. $\gamma = \alpha_1 * \beta_1$) et que l'on a la configuration de la figure 15 .

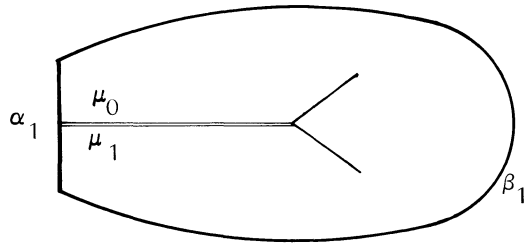
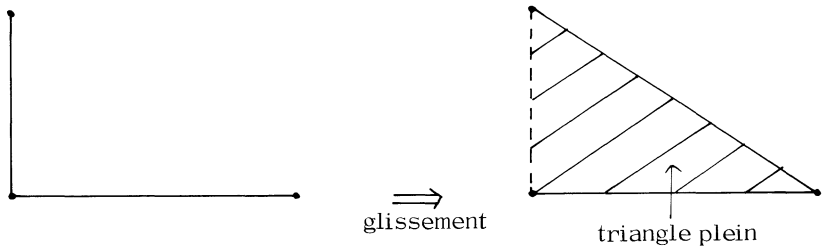


Figure 15

Nous dirons que λ_j est <u>simple</u> si, pour tout $j' \neq j$, λ_j ne couvre pas la même feuille que $\lambda_{j'}$. Nous dirons que μ_0 et μ_1 sont simples si l'on n'a pas la configuration de la figure 15 (ils le sont obligatoirement tous les deux).

Notons Λ le complexe de dimension 1, $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{q} \lambda_i$; c'est un ensemble invariant du feuilletage $\mathfrak{F}$. Si M est fermée, tout glissement de Whitehead de Λ se relève en modifications de Whitehead de $\mathfrak{F}$ (la terminologie pour les feuilletages a été choisie à cause de cette remarque).



<u>Lemme</u> (M est supposée fermée). Si l'un des arcs λ_j, μ_0 ou μ_1 est simple, il existe un feuilletage $\mathfrak{F}'$ équivalent à $\mathfrak{F}$, égal à $\mathfrak{F}$ dans le complémentaire d'un voisinage de Λ, et pour lequel l'arc limite λ' du domaine de déformation R' de β_1 possède moins de simplexes doubles (arêtes ou sommets).

Preuve. On fait glisser l'arc simple sur son prédecesseur ou sur son successeur. La figure 16 représente l'opération lorsque μ_0 est simple.

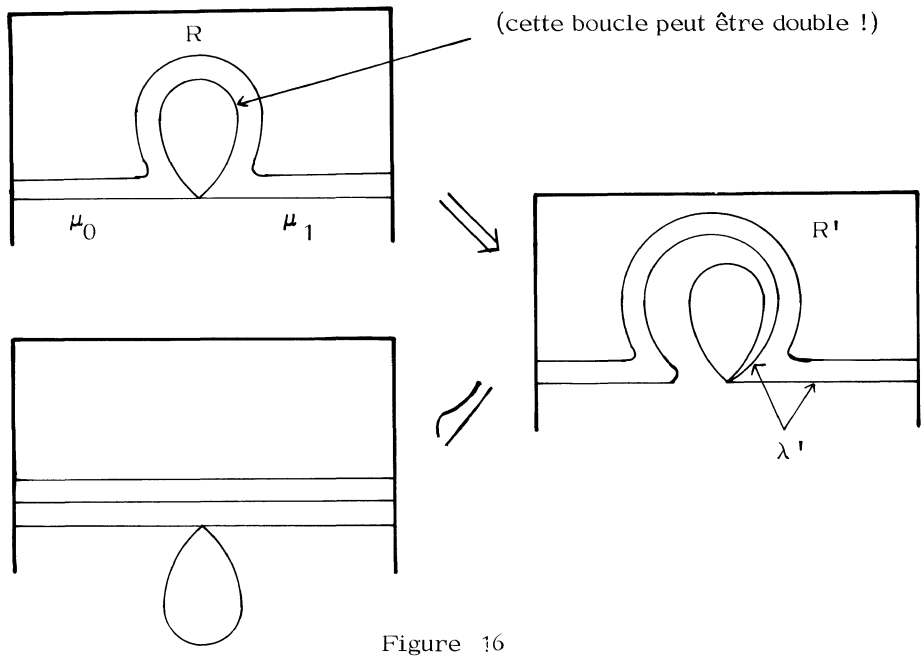


Figure 16

Si le lemme est applicable, on se ramène par itération au cas (B) ; sinon, on se trouve dans la situation suivante.

(C) Tous les arcs λ_i , μ_0 et μ_1 sont doubles.

Alors, l'adhérence de R , sur la surface, est un voisinage régulier du complexe Λ et γ est son bord ; on a alors la conclusion 2° (ii) de la proposition.

La démonstration de la proposition se trouve achevée par récurrence sur le nombre de segments de la décomposition de γ , tout au moins lorsque M est fermée. Le cas à bord se rédige de façon analogue en faisant attention aux glissements de Whitehead permis. □

Remarque. La proposition précédente n'admet pas de généralisation raisonnable au cas d'un système de k courbes plongées $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$; sauf si $I(\mathfrak{F}, \mu ; [\gamma_1]) \neq 0, \ldots,$ $I(\mathfrak{F}, \mu ; [\gamma_{k-1}]) \neq 0$, $I(\mathfrak{F}, \mu ; [\gamma_k])$ pouvant être nul.

§ III. - LES COURBES COMME FEUILLETAGES MESURES

III. 1. Opération d'élargissement.

Soit M_0 une sous-variété de dimension 2 de M, telle que $M - M_0$ n'ait aucune composante contractile. Soit Σ un "spine" de $\overline{M - M_0}$; par hypothèse, aucune de ses composantes n'est contractile ; donc, quitte à effondrer les 1-simplexes qui ont un sommet libre, de chaque singularité de Σ partent trois branches.

On peut construire une application surjective $j : M_0 \to M$ telle que :

- j soit une immersion (différentiable par morceaux),
- $j|\text{int } M_0$ soit un difféomorphisme sur $M - \Sigma$,
- $j(\partial M_0 - \partial M) = \Sigma$,
- j soit l'identité hors d'un petit voisinage en collier de $\partial M_0 - \partial M$.

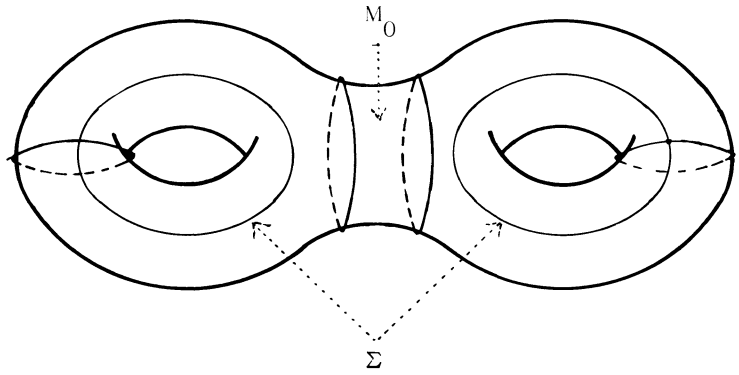


Figure 17

Soit $\mathcal{F}_0$ un feuilletage mesuré sur M_0 tel que chaque composante de $\partial M_0 - \partial M$ soit un ensemble invariant. On peut alors définir $\mathcal{F} = j_* \mathcal{F}_0$ qui est un feuilletage mesuré sur M vérifiant :

- Σ est un ensemble invariant de $\mathcal{F}$,
- $j|\text{int } M_0$ conjugue comme feuilletages mesurés $\mathcal{F}_0|\text{int } M_0$ et $\mathcal{F}|M - \Sigma$.

On dit que $\mathcal{F}$ est obtenu à partir de $\mathcal{F}_0$ par élargissement de M_0.

Remarquons que si Σ' est un autre spine pour $\overline{M - M_0}$, alors Σ' se déduit de Σ par opérations de Whitehead et isotopies (voir appendice). On en conclut que la classe de $\mathcal{F}$ ne dépend que de celle de $\mathcal{F}_0$. On a donc défini une application

$$\mathfrak{M}\mathcal{F}(M_0, \partial M_0 - \partial M) \longrightarrow \mathfrak{M}\mathcal{F}(M)$$

dont la source est le sous-ensemble de $\pi\mathcal{F}(M_0)$ formé des feuilletages admettant chaque composante de $\partial M_0 - \partial M$ comme ensemble invariant.

III. 2. <u>Lemme</u>. Soient μ_0 et μ les mesures transverses de $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}$. Soit γ une courbe simple de M. Alors $I(\mathcal{F},\mu\,;\,[\gamma]) = \inf \mu_0(\gamma' \cap M_0)$, où γ' est isotope à γ.

<u>Démonstration</u>. Elle se déduit de la remarque suivante : pour toute courbe C, il existe une courbe C', isotope à C, telle que $C' \cap M_0 = j^{-1}(C)$. $\square$

III. 3. <u>L'inclusion</u> $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \hookrightarrow \pi\mathcal{F}$.

On la définit ainsi. Soit $C \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons un voisinage tubulaire M_0 de C que l'on feuillette par cercles parallèles à C ; on l'équipe d'une mesure transverse μ_0 telle que l'épaisseur de l'anneau M_0 soit λ ; ce feuilletage mesuré de M_0 est unique à isotopie près. On note $\mathcal{F}_{\lambda,C}$ un feuilletage obtenu à partir de ce dernier par élargissement et μ sa mesure transverse.

<u>Proposition</u>. Soit γ une courbe simple de M. Alors on a :

$$I(\mathcal{F}_{\lambda,C},\mu\,;\,[\gamma]) = \lambda\, i(C,\gamma) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. Soit α une composante de $\gamma \cap M_0$. Si α va d'un bord à l'autre de M_0, alors $\mu_0(\alpha) \geq \lambda$. Par isotopie, on déforme α jusqu'à être transversal au feuilletage ; alors $\alpha \cap C = 1$ point et $\mu_0(\alpha) = \lambda$. Si α ne touche qu'une composante du bord, alors γ est isotope à γ' dont l'intersection avec M_0 a une composante de moins. En appliquant le lemme précédent, on trouve l'inégalité :

$$I(\mathcal{F}_{\lambda,C},\mu\,;\,[\gamma]) \geq \lambda\, i(C,\gamma) \quad .$$

L'égalité s'obtient en considérant le cas où γ a une intersection minimale avec C, car alors, on a :

$$\mu_0(\gamma) = \lambda\, i(C,\gamma) \quad . \qquad \square$$

La proposition précédente indique la commutativité du diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} & \pi\mathcal{F} \arrow[d, "I_*"] \\ \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S} \arrow[ur] \arrow[r, "i_*"'] & \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \end{tikzcd}$$

Comme i_* est injective (proposition 16, exposé 3), $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S} \to \pi\mathcal{F}$ est aussi une injection.