Astérisque

V. POÉNARU

Présentation d'ensemble des théorèmes de Thurston sur les surfaces

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 5-20

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__5_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXPOSÉ 1

PRÉSENTATION D'ENSEMBLE DES THÉORÈMES DE THURSTON SUR LES SURFACES

par V. POÉNARU

§ I. - Introduction

§ II. - L'espace des courbes

§ III. - Feuilletages mesurés.

§ IV. - Espace de Teichmüller

§ V. - Difféomorphismes pseudo-Anosov

§ VI. - Le cas du tore T^2

§ I. - INTRODUCTION

La théorie de Thurston ([1], voir aussi [2], [3]) s'occupe des trois questions suivantes :

I. Décrire "toutes" les courbes fermées sans point double (non nécessairement connexes) sur une surface, à isotopie près.

II. Décrire "tous" les difféomorphismes d'une surface, à isotopie près.

III. Mettre un bord naturel (pour l'action des difféomorphismes) à l'espace de Teichmüller.

Pour une surface fermée, il existe toujours une métrique riemannienne à courbure constante [4] . Le tableau ci-dessous résume la situation en mettant en parallèle des propriétés géométriques et des propriétés topologiques.

Surface	K (courbure)	χ (caractéristique d'Euler)	Remarques
$S^2, \mathbb{R}P^2$	$K = +1$ géométrie elliptique	$\chi > 0$	π_1 fini $\pi_2 \neq 0$
T^2, K^2 (Klein)	$K = 0$ géométrie euclidienne	$\chi = 0$	ce sont des $K(\pi, 1)$ et le revêtement universel est $\mathbb{R}^2$
genre > 1	$K = -1$ géométrie hyperbolique	$\chi < 0$	

Bien que les théorèmes de Thurston s'énoncent pour toutes les surfaces compactes, nous nous limiterons dans la suite aux surfaces orientables (fermées ou à bord non vide).

§ II. - L'ESPACE $\mathcal{S}$

Soit M une surface orientable compacte connexe. On note $\mathcal{S}(M) = \mathcal{S}$ l'ensemble des classes d'isotopie de courbes simples, fermées, connexes de M qui ne sont ni homotopes à zéro, ni homotopes à une composante du bord.

Remarques. 1) Les éléments de $\mathcal{S}$ ne sont pas orientés.

2) Comme deux courbes simples fermées homotopes sont aussi isotopes [5], on peut remplacer, dans cette définition, "classe d'isotopie" par "classe d'homotopie".

On considère l'application symétrique :

$$i : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$$

définie de la façon suivante : $i(\alpha,\beta)$ est le nombre minimum de points d'intersection d'un représentant de α avec un représentant de β. Il s'agit d'intersection géométrique et non algébrique.

Exemple. Sur le tore T^2, on choisit deux "générateurs" orientés x et y ; ainsi

tout élément de $\mathcal{S}$ peut être représenté par $\gamma(a,b) = ax + by$, où $a, b \in \mathbb{Z}$ et $(a,b) = 1$; dans $\mathcal{S}$, on a $\gamma(a,b) = \gamma(-a,-b)$. La formule suivante est facile à vérifier :

$$i(\gamma(a,b), \gamma(c,d)) = \left|\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| .$$

<u>Lemme</u>. 1° Si $\alpha \in \mathcal{S}$, il existe $\beta \in \mathcal{S}$ tel que $i(\alpha,\beta) \neq 0$.
2° Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathcal{S}$, il existe $\beta \in \mathcal{S}$ tel que $i(\alpha_1,\beta) = 0 \neq i(\alpha_2,\beta)$.

La preuve est donnée dans l'exposé 3 .

<u>L'espace fonctionnel</u> . On va considérer l'ensemble $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ des applications quelconques de $\mathcal{S}$ dans les réels positifs ou nuls. On le munit de la <u>topologie faible</u>. La multiplication naturelle par les réels positifs définit des rayons dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$; l'espace projectif, ensemble des rayons, noté $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}})$, est muni de la topologie quotient. On a des applications naturelles :

$$\mathcal{S} \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} - 0 \xrightarrow{\pi} P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}) ,$$

où i_* est défini par $i_*(\alpha)(\beta) = i(\alpha,\beta)$. Le 1° du lemme dit que $i_*(\mathcal{S})$ ne contient pas 0 et le 2° assure l'injectivité de πi_* .

On considère le <u>complété</u> de $\mathcal{S}$, noté $\overline{\mathcal{S}}$, qui est l'adhérence de $\pi i_*(\mathcal{S})$ dans $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}})$. Les éléments de $\overline{\mathcal{S}}$ sont représentés par des suites $\{(t_n,\alpha_n)\}$, $t_n > 0$, $\alpha_n \in \mathcal{S}$, telles que, pour tout $\beta \in \mathcal{S}$, la suite numérique $t_n\, i(\alpha_n,\beta)$ converge.

Ainsi, en tant que partie de $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}})$, l'ensemble $\mathcal{S}$ est muni d'une topologie non-triviale. En termes heuristiques, on donne un sens à la notion "deux courbes γ et γ' sont proches l'une de l'autre". Cette "proximité" n'a rien à voir avec les classes d'homotopie respective, mais avec le fait qu'à un multiple près, dans chaque région de la surface, γ et γ' sont formées à peu près du même nombre d'arcs, allant à peu près dans les mêmes directions. Tout ceci sera précisé dans l'exposé 4 .

Pour les besoins de la cause, on introduit aussi l'espace $\mathcal{S}'$ formé des classes d'isotopie de courbes simples fermées de M , non nécessairement connexes, dont chaque composante "appartient" à $\mathcal{S}$; mais, deux composantes distinctes de la même courbe ont le droit d'être isotopes entre elles, ce qui permet de considérer une multiplication scalaire : pour n entier > 0 et $\gamma \in \mathcal{S}'$, $n\gamma$ est représenté par n courbes parallèles. Comme avant, on définit $i : \mathcal{S}' \times \mathcal{S} \to \mathbb{Z}_+$ et on a un diagramme :

$$\mathcal{S}' \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} - 0 \quad \pi \quad P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}) \ .$$

Evidemment i_* respecte la multiplication par les scalaires ; donc πi_* n'injecte pas $\mathcal{S}'$. Mais on prouve facilement que $\pi i_*(\mathcal{S}')$ admet $\overline{\mathcal{S}}$ comme adhérence (voir exp. 4). Dans la suite, on notera aussi $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ le cône sur $i_*(\mathcal{S})$ dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$.

<u>Théorème</u> 1. Si M est une surface fermée orientable de genre $g > 1$, alors $\overline{\mathcal{S}}$ est homéomorphe à S^{6g-7} (ceci sera prouvé dans l'exposé 4) .

Notons $M^2_{g,b} = \#_g (S^1 \times S^1) - (\bigcup_b D^2)$; si $\chi(M^2_{g,b}) < 0$, alors $\overline{\mathcal{S}(M^2_{g,b})}$ est homéomorphe à $S^{6g+2b-7}$ (voir l'exposé 11) . Enfin, $\overline{\mathcal{S}(T^2)} \cong S^1$, $\overline{\mathcal{S}(D^2)} = \overline{\mathcal{S}(S^2)} = \overline{\mathcal{S}(S^1 \times [0,1])} = \emptyset$.

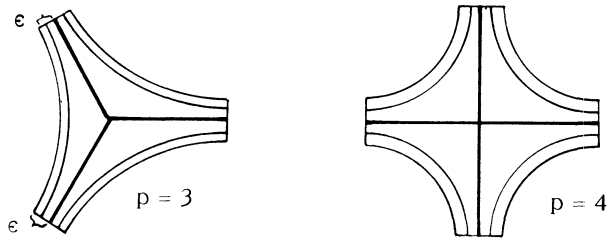
§ III. - <u>FEUILLETAGES MESURÉS</u>

Pour simplifier M sera fermée. Un feuilletage mesuré sur M est un feuilletage $\mathcal{F}$ avec des singularités (du type qu'a une différentielle quadratique holomorphe $z^{p-2}dz^2$, $p = 3, \ldots$) , muni d'une <u>mesure transverse</u> invariante par l'holonomie. Au voisinage d'un point non singulier, on a une carte locale $\varphi : U \to \mathbb{R}^2_{x,y}$ telle que φ^{-1} ($y = \text{const.}$) soient les feuilles de $\mathcal{F} | U$. Si $U_i \cap U_j$ est non vide, on a des fonctions de transition φ_{ij} de la forme $\varphi_{ij}(x,y) = (h_{ij}(x,y), c_{ij} \pm y)$, où c_{ij} est constant. Dans les cartes, la mesure transverse est $|dy|$.

<u>Remarque</u>. Les feuilletages qui admettent des fonctions de transition de la forme $(f(x,y), c+y)$ sont ceux qui sont définis par une 1-forme fermée ω ; en dehors des singularités, y est une primitive locale de ω .

Les singularités de $\mathcal{F}$ sont des p-selles, $p \geq 3$, comme dans la figure 1 .

Figure 1



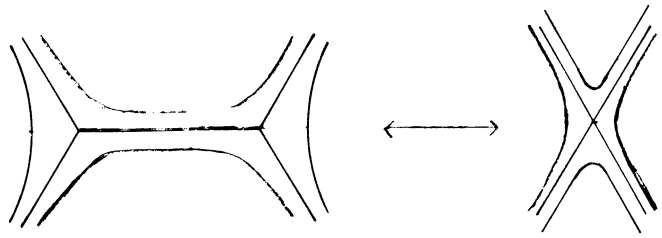
Si γ est une courbe simple fermée de M , on note $\int_\gamma \mathcal{F}$ la <u>variation totale</u>

de la coordonnée y de $p \in \gamma$ quand p parcourt γ . Pour $\alpha \in \mathcal{S}$, on définit

$$I(\mathcal{F},\alpha) = \inf_{\gamma \in \alpha} \int_\gamma \mathcal{F} \ .$$

On dira que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont <u>équivalents au sens de Whitehead</u> si l'on peut passer de l'un à l'autre par des isotopies et des déformations élémentaires du type suggéré par la figure 2 .

Figure 2



[Observer que ces déformations permettent le transport de la mesure transverse].
On note $\mathfrak{m}\mathcal{F}$ l'ensemble des classes d'équivalence. On définit

$$I_* : \mathfrak{m}\mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$$

par $$I_*(\mathcal{F})(\alpha) = I(\mathcal{F},\alpha) \ .$$

On dit que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont m-<u>équivalents</u> (ou équivalents au sens de <u>Schwartz</u>) si $I_*(\mathcal{F}_1) = I_*(\mathcal{F}_2)$. L'équivalence à la Schwartz est une conséquence immédiate de l'équivalence à la Whitehead.

<u>Théorème</u> 2. L'application I_* injecte $\mathfrak{m}\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$; $I_*(\mathfrak{m}\mathcal{F}) \cup 0 = \overline{\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}}$ et , si $g > 1$, cet ensemble est homéomorphe à $\mathbb{R}^{6g-6}$.

En particulier, l'équivalence à la Schwartz est la même chose que l'équivalence à la Whitehead.

La démonstration du théorème occupe les exposés 5 et 6 . D'autre part, puisque $I_*(\mathfrak{m}\mathcal{F})$ évite 0 , le théorème dit que, dans $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}})$, on a $\overline{\mathcal{S}} = \pi I_*(\mathfrak{m}\mathcal{F})$. Ceci donne une représentation géométrique agréable des fonctionnelles qui sont dans $\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}}$.

§ IV. - <u>ESPACE DE TEICHMÜLLER</u>

On va considérer une surface M , avec $\chi(M) < 0$. Considérons l'espace $\mathcal{H}$ des métriques sur M de courbure constante $K = -1$, telles que chaque composante

du bord soit une géodésique. Soit $\mathrm{Diff}^0(M)$ le groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité, muni de la topologie C^∞ ; comme on le verra plus tard, il agit <u>librement</u> continûment sur $\mathcal{H}$. L'espace des orbites de cette action, équipé de la topologie quotient sera pour nous l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(M) = \mathcal{T}$. Si M est orientée, il y a d'autres définitions utilisant les structures complexes de M , l'équivalence des définitions repose sur le théorème d'uniformisation [6] .

<u>Remarques</u>. Considérons un exemplaire fixe de M ainsi qu'un autre exemplaire $X = X_\rho$ muni d'une métrique hyperbolique ρ . Si $\varphi : M \to X$ est un difféomorphisme, le couple (X,φ) est appelé une "surface de Teichmüller".

Deux surfaces de Teichmüller (X,φ) , (X',φ') sont dites équivalentes s'il existe une isométrie $X \xrightarrow{f} X'$ telle que φ et $f \circ \varphi'$ soient isotopes.

Il est facile d'identifier les points de $\mathcal{T}$ avec les classes d'équivalence des surfaces de Teichmüller.

On remarquera aussi que deux difféomorphismes de M sont homotopes si et seulement si ils sont isotopes [5] .

Si M est fermée, de genre > 1 , un théorème classique de la théorie de Teichmüller affirme :

$$\mathcal{T} M \cong \mathbb{R}^{6g-6} .$$

Ce résultat, dû à Fricke et Klein, sera redémontré dans l'exposé 7.

On a aussi :

$$\mathcal{T}(M^2_{g,b}) \cong \mathbb{R}^{6g-6+2b} .$$

Pour tout $\theta \in \mathcal{T}$ et $\alpha \in \mathcal{S}$, on définit :

$$\ell(\theta,\alpha) = \inf_{\gamma \in \alpha} (\theta(\gamma)) ,$$

où $\theta(\gamma)$ désigne la longueur de γ calculée avec la métrique prescrite à isotopie près sur M . La métrique étant fixée, le inf est d'ailleurs atteint par une unique géodésique. De la formule précédente, on déduit une application :

$$\ell_* : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} ;$$

on voit facilement que son image évite $I_*(\pi\mathcal{T}) \cup 0$. Le groupe $\pi_0(\mathrm{Diff}\, M)$ agit sur l'espace de Teichmüller ainsi que sur $\mathcal{S}$, donc sur $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$; l'application ℓ_* est clairement équivariante.

Dans l'exposé 7 , on prouvera le théorème suivant.

Théorème 3. L'application ℓ_* est un homéomorphisme sur son image.

On peut ainsi mettre une topologie naturelle sur $\mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{S}}$; grâce à ce qui précède, on considère l'espace topologique $\ell_*(\mathcal{T}) \cup I_*(\mathfrak{m}\mathcal{F})$, on identifie à un point chaque rayon de $I_*(\mathfrak{m}\mathcal{F})$ et on prend la topologie quotient.

Dans l'exposé 8 (pour le cas sans bord) , on prouvera le théorème suivant.

Théorème 4. 1) L'espace topologique $\mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{S}}$ est homéomorphe à D^{6g-6} , si M est fermée de genre > 1 ; il est homéomorphe à $D^{6g-6+2b}$ si M , de caractéristique d'Euler < 0 , possède b composantes de bord.

2) L'application canonique $\mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{S}}$ dans $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}})$ est un plongement.

L'espace $\mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{S}}$ qu'on notera $\overline{\mathcal{T}}$ est la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller. Il résulte tout de suite de la définition que pour chaque difféomorphisme φ de M , l'action naturelle de φ sur $\overline{\mathcal{T}}$ est continue.

Si φ est un difféomorphisme de M , $[\varphi]$ désignera l'homéomorphisme induit sur $\overline{\mathcal{T}}$; d'après Brouwer, $[\varphi]$ a un point fixe.

(i) Si $[\varphi]$ a un point fixe dans $\mathcal{T}$, φ est isotope à une isométrie φ' d'une métrique hyperbolique ; en particulier, φ' est périodique.

(ii) Si $[\varphi]$ laisse fixe un point de $\overline{\mathcal{S}}$, il existe un feuilletage $\mathcal{F}$ tel que $\varphi(\mathcal{F})$ soit Whitehead-équivalent à $\lambda\mathcal{F}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, où $\lambda\mathcal{F}$ possède le même feuilletage sous-jacent que $\mathcal{F}$, avec pour métrique transverse le produit de celle de $\mathcal{F}$ par λ .

Cette petite analyse peut être précisée comme suit.

§ V. - DIFFÉOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV

Je commence par un exemple très élémentaire. Soit $\varphi \in \mathrm{Diff}_+(T^2)$. A isotopie près, φ est dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Il y a trois choses possibles en ce qui concerne les valeurs propres λ_1 et λ_2 de φ .

a) ou bien, λ_1 et λ_2 sont complexes ($\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$) . Dans ce cas, φ est d'ordre fini.

b) ou bien $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (resp. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$) . A un changement de coordonnées près, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est "un twist de Dehn" [resp. $\varphi = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$] ; dans les deux cas, φ laisse une courbe simple invariante.

c) ou bien λ_1 et λ_2 sont irrationnelles distinctes. Alors φ est un difféomorphisme d'Anosov [7] , [8] .

Cette analyse est généralisée par Thurston au cas des surfaces compactes quelconques.

<u>Théorème</u> 5. Tout difféomorphisme φ de M est isotope à φ' qui satisfait à l'une des trois conditions suivantes :

(i) φ' fixe un élément de $\mathfrak{T}$ et est d'ordre fini ;

(ii) φ' est "réductible" dans le sens qu'il préserve une courbe simple (représentant un élément de $\mathcal{S}'$) ; dans ce cas, on poursuit l'analyse de φ' en coupant M le long de cette courbe ;

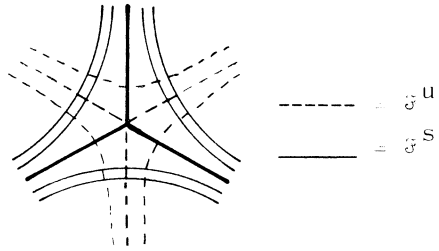
(iii) Il existe $\lambda > 1$ et deux feuilletages mesurés transverses $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ tels que :

$$\varphi'(\mathcal{F}^s) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}^s , \quad \varphi'(\mathcal{F}^u) = \lambda\,\mathcal{F}^u \quad ;$$

ces égalités indiquent l'égalité des feuilletages sous-jacents.

A part des choses évidentes, dire que $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont transverses, c'est dire que leurs singularités sont les mêmes et qu'au voisinage des singularités la configuration est analogue à celle de la figure 3. Un difféomorphisme satisfaisant à (iii) est appelé <u>pseudo-Anosov</u>.

Figure 3



Le théorème 5 est prouvé dans l'exposé 9. Pour que ce théorème nous permette une induction efficace, on aura besoin d'étendre la théorie au cas à bord. Ceci est réalisé dans l'exposé 11 .

Dans l'exposé 12, on montrera que, pour un pseudo-Anosov φ, $\mathcal{F}^u$ et $\mathcal{F}^s$ représentent les seuls points fixes de $[\varphi]$ dans $\overline{\mathcal{T}}$ et que deux pseudo-Anosov homotopes sont conjugués par un difféomorphisme isotope à l'identité.
La clé de ces théorèmes est la propriété suivante de "mixing" que possède un pseudo-Anosov φ : pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{i(\varphi^n\alpha,\beta)}{\lambda^n} = I(\mathcal{F}^s,\alpha)\, I(\mathcal{F}^u,\beta) .$$

Propriété spectrale des difféomorphismes pseudo-Anosov.

Pour $\theta \in \mathcal{T}$ et $\alpha \in \mathcal{S}$, on a défini au § IV, le nombre positif $\ell(\theta,\alpha)$. Les difféomorphismes ont des valeurs propres dans le sens suivant.

Théorème 6 . Soit $\varphi \in \mathrm{Diff}\, M^2$. Il existe une famille finie d'entiers algébriques $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \geq 1$, tels que, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$, il existe λ_j vérifiant : pour tout $\theta \in \mathcal{T}$, $\lim_{n=\infty} \ell(\theta,\varphi^n\alpha)^{1/n} = \lambda_j$. De plus, φ est pseudo-Anosov si et seulement si $k = 1$ et $\lambda_1 > 1$; dans ce cas $\lambda_1 = \lambda$. (Voir exposés 9 et 11).

Entropie. Pour un espace métrique compact X et une transformation continue $f : X \to X$, on peut définir l'entropie topologique $h(f)$ (voir exposé 10). Si φ est un difféomorphisme pseudo-Anosov, on prouve que $h(\varphi) = \log \lambda$. De plus, φ possède une mesure invariante évidente et $h(\varphi)$ est son entropie métrique [9] .

Théorème 7. Un difféomorphisme pseudo-Anosov minimise l'entropie topologique dans sa classe d'isotopie.

La liste des résultats de Thurston est beaucoup plus longue, mais on arrête ici cette présentation d'ensemble pour entrer dans le vif du sujet.

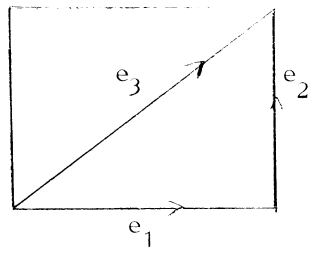
§ VI. - LE CAS DU TORE T^2

Ce cas est particulièrement simple et se traite à part.

Dans le tore T^2, je considère les trois éléments $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{S}(T^2)$ de la figure 4, provisoirement orientés.

Disons que x_1 et x_2 sont les générateurs canoniques e_1 et e_2 munis des orientations ci-dessous.

Figure 4
Le tore T^2



Si γ est une courbe simple orientée, $\gamma = mx_1 + nx_2$, on trouve :

$$i(e_1,\gamma) = |n| \ , \quad i(e_2,\gamma) = |m \ , \quad i(e_3,\gamma) = |n - m| \ .$$

Ces trois nombres déterminent γ dans $\mathcal{S}$, mais les deux premiers ne suffisent pas. Ils forment un "triangle dégénéré" dans le sens que l'un d'entre eux est égal à la somme des deux autres.

Je vais considérer maintenant le simplexe standard muni de coordonnées barycentriques X_1, X_2, X_3 ($X_i \geq 0$, $\Sigma X_i = 1$). Il se décompose dans les quatre régions indiquées sur la figure 5.

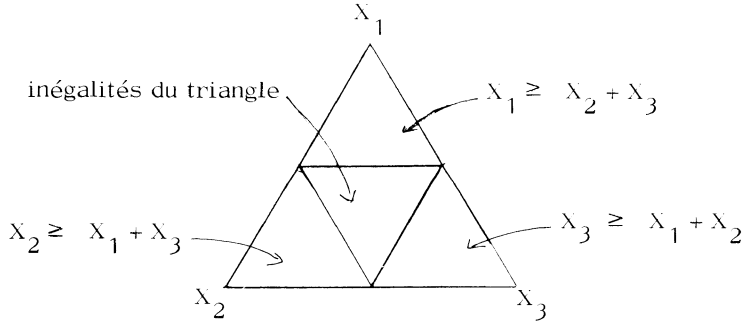


Figure 5

On va noter $(\leq \nabla)$ le domaine où les inégalités (larges) du triangle sont vérifiées ; le bord $\partial(\leq \nabla)$ correspond aux triangles dégénérés. Le simplexe standard étant regardé dans $\mathbb{R}^3_+$, par cône$(\partial(\leq \nabla))$, on entendra le cône en demi-droites de centre 0 s'appuyant sur $\partial(\leq \nabla)$.

A chaque $\gamma \in \mathcal{S}$, on associe les nombres $X_j = \dfrac{i(e_j,\gamma)}{\sum_j i(e_j,\gamma)}$, $j = 1,2,3$; un calcul simple montre que l'<u>on peut identifier par là $\mathcal{S}$ à l'ensemble des points rationnels de</u> $\partial(\leq \nabla)$.

<u>Lemme</u> A. Soit $\beta \in \mathcal{S}$. Il existe une fonction

$$\Phi_\beta \ : \ \text{cône}\,(\partial(\leq \nabla)) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ ,$$

continue, homogène de degré 1 (pour la multiplication par les scalaires positifs) telle que, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$, on ait :

$$i(\alpha,\beta) = \Phi_\beta\,(i(\alpha,e_1),\, i(\alpha,e_2),\, i(\alpha,e_3)) \ .$$

<u>Preuve</u>. On peut donner une construction explicite comme suit. Disons que β est représenté par $mx_1 + nx_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $(m,n) = 1$. (Cette représentation comporte la seule ambiguité que $-mx_1 - nx_2$ correspond aussi à β.) Sur la surface du cône $X_3 = X_1 + X_2$, on posera :

$$\Phi_\beta\,(X_1,X_2,X_3) = \left|\det\begin{pmatrix} X_2 & -X_1 \\ m & n \end{pmatrix}\right| \ .$$

Sur les deux autres faces, on posera :

$$\Phi_\beta\,(X_1,X_2,X_3) = \left|\det\begin{pmatrix} X_2 & X_1 \\ m & n \end{pmatrix}\right| \ .$$

A l'intersection des faces, ces formules se recollent et Φ_β a les propriétés voulues. □

<u>Remarque</u>. Φ_β est linéaire par morceaux, propriété qu'on retrouvera pour les autres "formules explicites" de la théorie.

Considérons maintenant une suite (λ_n,α_n) avec $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_n \in \mathcal{S}$ telle que, pour tout $\beta \in \mathcal{S}$, la suite $\lambda_n\, i(\alpha_n,\beta)$ converge. Notons $\lim(\lambda_n,\alpha_n)$ la fonctionnelle

$$\lim(\lambda_n,\alpha_n)\,(\beta) = \lim \lambda_n\, i(\alpha_n,\beta) \ .$$

Puisque Φ_β est homogène, on a :

$$\lim(\lambda_n,\alpha_n)(\beta) = \Phi_\beta\,(\lim(\lambda_n,\alpha_n)(e_1),\, \lim(\lambda_n,\alpha_n)(e_2),\, \lim(\lambda_n,\alpha_n)(e_3)) \ .$$

Ceci implique que la bijection de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$, regardée dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$, sur les rayons rationnels de cône $\partial(\leq \nabla)$ se prolonge en un homéomorphisme homogène :

$$\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}} \cong \text{cône}\ \partial(\leq \nabla) \cong \mathbb{R}^2 \ .$$

Ainsi, dans $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}})$, on obtient $\overline{\mathcal{S}} \cong S^1$.

Considérons maintenant un feuilletage mesuré $\mathcal{F}$ de T^2. On peut prouver que $\mathcal{F}$ n'a pas de singularités et qu'il est transversalement orientable (ceci résultera d'une formule simple du type Euler-Poincaré) ; comme feuilletage mesuré, il s'identifie alors à une 1-forme fermée non singulière. Celle-ci est isotope à une unique forme linéaire (= 1-forme à coefficients constants dans les coordonnées canoniques

de T^2) [10] . Si ω est linéaire, chaque courbe $\gamma = mx_1 + nx_2$ est ou bien transversale à ω, ou bien contenue dans une feuille : donc, $\int_\gamma \omega = I(\omega,\gamma)$: ω est déterminé au signe près par $I(\omega,e_1)$, $I(\omega,e_2)$, $I(\omega,e_3)$. Le lemme B est alors clair.

<u>Lemme</u> B. Soit $\mathfrak{F}$ un feuilletage mesuré de T^2 . Alors :

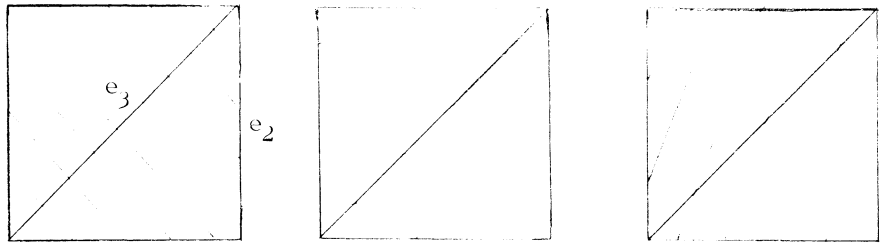
1° $I(\mathfrak{F},e_1)$, $I(\mathfrak{F},e_2)$, $I(\mathfrak{F},e_3)$ forment un triangle dégénéré.

2° Si $\beta \in \mathcal{S}$, on a :

$$I(\mathfrak{F},\beta) = \Phi_\beta\,(I(\mathfrak{F},e_1),\, I(\mathfrak{F},e_2),\, I(\mathfrak{F},e_3))$$

où Φ_β est la fonction du lemme A .

Le premier point se lit sur les figures suivantes :



$I(\mathfrak{F},e_3) = I(\mathfrak{F},e_1) + I(\mathfrak{F},e_2)$ $\qquad$ $I(\mathfrak{F},e_2) = I(\mathfrak{F},e_1) + I(\mathfrak{F},e_3)$ $\qquad$ $I(\mathfrak{F},e_1) = I(\mathfrak{F},e_2) + I(\mathfrak{F},e_3)$

Figure 6

Par conséquent dans $P(\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_+)$, on a : $\pi I_*(\mathfrak{F}\mathfrak{F}) = \overline{\mathcal{S}}$.

Au paragraphe IV, on a défini l'espace de Teichmüller dans le contexte $\chi < 0$. Pour T^2 , on peut donner une définition analogue en considérant les métriques <u>plates</u> ($K = 0$) telles que Aire $T^2 = 1$. [Cette condition de normalisation est inutile dans le cas hyperbolique, où la forme d'un objet détermine déjà son volume.]

<u>Remarque</u> 1. Au lieu de cette normalisation, on pourrait travailler avec des métriques plates à un scalaire > 0 près.

D'autre part, si T^2 est muni d'une structure complexe, son revêtement universel $\tilde{T}^2$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ et le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}$, $z \mapsto \alpha z + \beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, coïncide avec le groupe des transformations directes de $\mathbb{R}^2$ préservant la

métrique euclidienne à un scalaire près. A partir de là, on déduit facilement l'équivalence de notre définition de $\mathcal{T}$ avec la définition traditionnelle : "l'ensemble des structures complexes marquées sur T^2, à isotopie près".

Remarque 2. Une structure plate sur T^2 possède une structure affine sous-jacente. Si l'on fixe deux générateurs de $\pi_1(T^2)$, e_1, e_2, la structure affine sous-jacente à la métrique ρ est déterminée de la manière suivante : la donnée de toutes les géodésiques de la classe e_i, qui sont des courbes fermées parallèles, ainsi que des nombres $\mathrm{dist}\,(\Delta,\Delta')/\mathrm{dist}\,(\Delta',\Delta'') \in \mathbb{R}_+$ correspondant à trois géodésiques du système e_i. Il est facile de voir que toutes ces structures affines de T^2 sont isotopes entre elles. Ainsi, on pourra toujours représenter un élément de $\mathcal{T}$ par une métrique plate ρ dont la structure affine sous-jacente est la structure canonique (ce choix sera toujours fait dans la suite) ; autrement dit, les droites usuelles sont les géodésiques de ρ.

A $\rho \in \mathcal{T}$, on peut associer (X_1,X_2,X_3), $X_j = \dfrac{\rho(e_j)}{\sum_k \rho(e_k)}$, où $\rho(e_j)$ est la longueur de la géodésique e_j dans la métrique ρ.

Lemme C. L'application ci-dessus est un homéomorphisme $\mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{int}\,(\leq \nabla)$.

Preuve. Il est clair que (X_1,X_2,X_3) vérifient les inégalités du triangle. Soit Δ un triangle dans $\mathbb{R}^2$; chaque fois qu'on assigne à ses côtés trois longueurs vérifiant les inégalités du triangle, on détermine sur $\mathbb{R}^2$ une unique métrique plate compatible avec la structure affine ; elle est invariante par le groupe des translations, donc induit une métrique sur T^2. Ceci prouve la surjectivité ; pour l'injectivité, on remarque que deux métriques plates, de structures affines standard, ayant les mêmes longueurs des côtés de Δ sont identiques. La topologie est laissée au soin du lecteur. □

Autrement dit, la composée :

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\ell_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \xrightarrow{\text{proj.}} \mathbb{R}_+^{(e_1,e_2,e_3)}$$

est un homéomorphisme de $\mathcal{T}$ sur son image. Pour voir que ℓ_* est un homéomorphisme sur son image, il faut remarquer que la longueur d'un segment linéaire donné dépend continûment des longueurs assignées à e_1, e_2, e_3 (trigonométrie classique !).

On a :

$$\ell_*(\mathcal{T}) \cap I_*(\mathfrak{m}\mathcal{F}) = \emptyset .$$

En effet, si ω est une forme différentielle, il existe une suite γ_n de courbes simples fermées telles que $\int_{\gamma_n} \omega \to 0$; si α_n désigne la classe de γ_n dans $\mathcal{S}$, on a

$I_*(\omega)(\alpha_n) \to 0$, alors que pour une métrique donnée les longueurs des géodésiques fermées n'approchent pas de 0 .

Pour démontrer l'analogue du théorème 4 pour le tore T^2 , il ne reste qu'à prouver le lemme suivant.

<u>Lemme</u> D. Soient ρ_n une suite de métriques plates normalisées (de la structure affine canonique), λ_n une suite de réels positifs et ω une forme linéaire. On suppose que, pour $j = 1,2,3$,

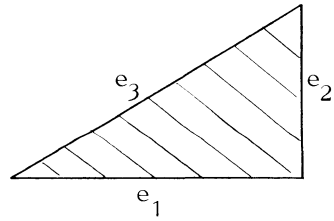
$$\lambda_n \rho_n(e_j) \longrightarrow \left|\int_{e_j} \omega\right| .$$

Alors, pour toute géodésique fermée α ,

$$\lambda_n \rho_n(\alpha) \longrightarrow \left|\int_{\alpha} \omega\right| .$$

<u>Preuve</u>. On note ρ'_n la métrique $\lambda_n \rho_n$. Traitons le cas où ω est sur la face $X_3 = X_1 + X_2$ du cône $\partial(\leq \nabla)$ (figure 7) et $\int_{e_i} \omega \neq 0$ pour $i = 1, 2$.

Figure 7



Orientons e_j , $j = 1,2,3$, de sorte que $\int_{e_j} \omega \geq 0$. Soit alors θ_n la mesure de l'angle (e_1,e_2) dans la métrique ρ'_n .

On a :

$$[\rho'_n(e_3)]^2 = [\rho'_n(e_1)]^2 + [\rho'_n(e_2)]^2 + 2\,\rho'_n(e_1)\,\rho'_n(e_2)\cos\theta_n .$$

L'hypothèse implique donc que $\cos\theta_n$ tend vers 1 . Si α est un segment linéaire, $\alpha = a_1e_1 + a_2e_2$, $a_1,a_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$[\rho'_n(\alpha)]^2 = a_1^2\,[\rho'_n(e_1)]^2 + a_2^2\,[\rho'_n(e_2)]^2 + 2\,a_1a_2\,\rho'_n(e_1)\,\rho'_n(e_2)\cos\theta_n .$$

Donc :

$$[\rho'_n(\alpha)]^2 \longrightarrow \left[a_1\int_{e_1}\omega + a_2\int_{e_2}\omega\right]^2 = \left[\int_{\alpha}\omega\right]^2 . \qquad \square$$

Pour T^2, l'analyse du théorème 5 est triviale. Quant au théorème 6 dans le cas du tore, il se réduit à la propriété spectrale bien connue des applications linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. THURSTON, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces I, (à paraître).

[2] W. THURSTON, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton lecture notes.

[3] V. POÉNARU, Travaux de Thurston sur les difféomorphismes des surfaces et l'espace de Teichmüller, Séminaire Bourbaki, exposé 529, nov. 1978.

[4] K.F. GAUSS, Disquisitiones generales circa superficies curvas (1827) [voir Astérisque 62 (1979)] .

[5] D. EPSTEIN, Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math. 115 (1966), p. 83-107.

[6] H. WEYL, Die Idee der Riemannscher Fläche (4e édition), Teubner, Leipzig, 1955.

une référence plus moderne est

G. SPRINGER, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1966.

[7] D.V. ANOSOV, Geodesic flows on compact riemannian manifolds of negative curvature, Proc. Steklov Math. Inst. 90 (1967), AMS, 1969.

[8] S. SMALE, Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), p. 747-817.

[9] Y.G. SINAI, Introduction to ergodic theory, Math. notes, Princeton University Press, 1976.

[10] S. STERNBERG, Celestial mechanics, part II, Benjamin, 1969.

Les textes suivants sont aussi reliés au sujet traité.

R. FRICKE - F. KLEIN, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, T. 2, Johnson reprint, 1965.

W.J. HARVEY (edited by), Discrete groups and automorphic functions, Acad. Press, 1977.

J. NIELSEN, Abbildungsklassen endlicher Ordnung, Acta Math. 75 (1943), p. 23-115.

W. FENCHEL - J. NIELSEN, livre à paraître.

L. BERS, An extremal problem for quasi-conformal mappings and a theorem by Thurston, Acta Math. 141 (1978), p. 73-98.

W. ABIKOFF, Topics in the real analytic theory of Teichmüller space (à paraître).

D. SULLIVAN, Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, Inv. Math. 26 (1976), p. 225-255.

D. RUELLE - D. SULLIVAN, Currents, flows and diffeomorphisms, Topology 14 (1975), p. 319-327.