Astérisque

A. Fathi
V. Poénaru

Théorèmes d'unicité des difféomorphismes pseudo-Anosov

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 225-242
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__225_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXPOSÉ 12

THÉORÈMES D'UNICITÉ DES DIFFÉOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV

par A. FATHI et V. POENARU

§ I. - Énoncé des résultats

§ II. - Rappels

§ III. - Démonstration du théorème I (unique ergodicité)

§ IV. - Démonstration du théorème II et de ses corollaires

§ V. - Démonstration du théorème III (unicité des pseudo-Anosov)

§ I. - ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

Dans la suite, M est une surface compacte orientable sans bord de genre $g > 1$. On se donne un difféomorphisme pseudo-Anosov $\varphi : M \to M$; il existe donc deux feuilletages mesurés transverses $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ et $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$ et un nombre $\lambda > 1$, tels que $\varphi(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \frac{1}{\lambda}\mu^s)$ et $\varphi(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u)$ (i.e. φ contracte les distances entre les feuilles de $\mathcal{F}^u$ avec un facteur $\frac{1}{\lambda}$).

Théorème I (unique ergodicité). Les feuilletages stables et instables d'un difféomorphisme pseudo-Anosov sont uniquement ergodiques.

Rappelons ce que signifie l'unique ergodicité. D'abord, une "mesure" μ invariante par $\mathcal{F}^s$ est la donnée sur chaque transversale T de (la partie régulière de) $\mathcal{F}^s$ d'une

mesure borélienne μ_T finie sur chaque compact, telle que ces mesures soient invariantes par les germes d'holonomie de $\mathcal{F}^s$. Le feuilletage $\mathcal{F}^s$ est uniquement ergodique s'il existe une seule mesure invariante par $\mathcal{F}^s$ à multiplication par un scalaire près, i.e. :

1° Il existe une mesure μ invariante par $\mathcal{F}^s$.

2° Si ν est une autre mesure invariante par $\mathcal{F}^s$, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nu_T = \lambda \mu_T$ pour toute transversale T.

Le théorème I est un cas particulier d'un résultat de Bowen et Marcus [1].

Rappelons qu'un difféomorphisme pseudo-Anosov a une mesure positive invariante naturelle, déterminée à une constante > 0 près; elle est donnée localement par le produit de μ^s et μ^u. Quitte à changer μ^s (ou μ^u) en la multipliant par une constante, on peut supposer que $\mu^s \otimes \mu^u$ est une mesure de probabilité i.e. $\mu^s \otimes \mu^u(M) = 1$.

<u>Théorème</u> II. Soit φ un difféomorphisme pseudo-Anosov, supposons que $\mu^s \otimes \mu^u(M) = 1$. Si $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i(\varphi^n\alpha,\beta)}{\lambda^n} = I(\mathcal{F}^s,\mu^s\,;\,\alpha)\, I(\mathcal{F}^u,\mu^u\,;\,\beta) .$$

<u>Corollaire</u> II.1. Si $\alpha \in \mathcal{S}$ et si $[\alpha]$, $[\mathcal{F}^s,\mu^s]$ et $[\mathcal{F}^u,\mu^u]$ sont les images de α, $(\mathcal{F}^s,\mu^s)$ et $(\mathcal{F}^u,\mu^u)$ dans $P\mathcal{F}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} [\varphi^n\alpha] = [\mathcal{F}^u,\mu^u]$$

$$\lim_{n\to\infty} [\varphi^{-n}\alpha] = [\mathcal{F}^s,\mu^s] .$$

En fait, le résultat de Thurston est plus fort : si $[\mathcal{F},\mu] \in P\mathcal{F}$ et si $[\mathcal{F},\mu] \neq [\mathcal{F}^s,\mu^s]$, alors $\lim_{n\to\infty} \varphi^n[\mathcal{F},\mu] = [\mathcal{F}^u,\mu^u]$. Il est possible que la démonstration du théorème II, que nous donnons, permette aussi de démontrer ce résultat en faisant des estimations uniformes de convergence sur les compacts de $P\mathcal{F} - \{[\mathcal{F}^s,\mu^s]\}$.

<u>Corollaire</u> II.2. Les seuls points fixes de l'action de φ sur le compactifié de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}M$ sont $[\mathcal{F}^u,\mu^u]$ et $[\mathcal{F}^s,\mu^s]$.

<u>Théorème</u> III (<u>unicité des pseudo-Anosov</u>). Deux difféomorphismes pseudo-Anosov homotopes sont conjugués par un difféomorphisme isotope à l'identité.

§ II. - RAPPELS

A) Le théorème de Perron-Frobenius ([2] chap. 13 , ou [3] appendice).

Théorème de Perron-Frobenius. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times n$ à coefficients ≥ 0 . On note $a_{ij}^{(k)}$ les coefficients de A^k la puissance k-ième de A . S'il existe $\ell \geq 1$ tel que tous les coefficients $a_{ij}^{(\ell)}$ de A^ℓ soient strictement positifs, on a les propriétés suivantes :

1) La matrice A admet une valeur propre $\lambda > 0$ qui est strictement supérieure à la valeur absolue de toute autre valeur propre.

2) Il existe un $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec tous les $x_i > 0$ et qui est un vecteur propre de valeur propre λ pour A :

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad , \qquad i = 1, \ldots, n .$$

3) Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est de dimension 1 .

4) Si $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de valeur propre λ pour ${}^tA$:

$$\lambda y_j = \sum_{i=1}^{n} y_i a_{ij} \quad , \qquad j = 1, \ldots, n \quad ,$$

alors, tous les y_j sont > 0 . Si y est normalisé par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1 ,$$

on a :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{A^k}{\lambda^k} = \langle \ , y \rangle x$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{\lambda^k} = x_i y_j \quad .$$

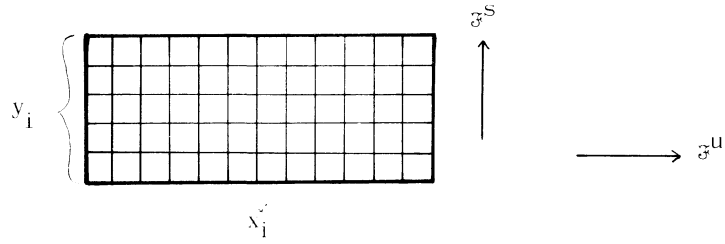
B) Partition de Markov (voir exposés 9 et 10)

On va considérer $\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$ une partition de Markov pour φ . On pose :

$$x_i = \mu^s (\mathcal{F}^u\text{-fibre de } R_i)$$

$$y_i = \mu^u (\mathcal{F}^s\text{-fibre de } R_i) \quad .$$

Figure 1



On a fait l'hypothèse que $\mu^s \otimes \mu^u(M) = 1$; ceci est équivalent à $\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 1$. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice d'incidence de $\mathcal{R}$ pour φ , donc a_{ij} = (nombre de fois que φ (int R_i) traverse int R_j) . On a :

$$(*) \qquad \lambda x_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j ,$$

$$(**) \qquad \lambda y_i = \sum_{j=1}^{N} y_j a_{ji} .$$

On a vu dans l'exposé 10 (fin du § IV) que λ est en fait la plus grande valeur propre de A . De plus, toujours dans l'exposé 10 (§ VI lemma 1) , on a montré qu'il existe un entier $\ell > 0$ tel que la matrice A^{ℓ} ait tous ses coefficients > 0 . On peut appliquer alors le théorème de Perron-Frobenius, ce qui nous donne :

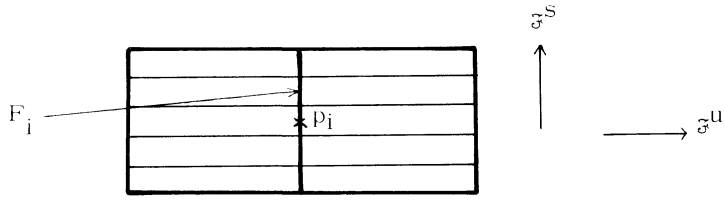
<u>Lemme</u> 1. Avec les notations introduites au-dessus :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{\lambda^k} = x_i y_j .$$

§ III. - <u>DÉMONSTRATION DU THÉORÈME</u> I (<u>UNIQUE ERGODICITÉ</u>)

Soit ν une mesure invariante pour $\mathcal{F}^u$. Puisque $\mathcal{F}^u$ n'a pas de feuille fermée dans $M - \text{sing}\, \mathcal{F}^u$, la mesure ν n'a pas d'atomes. Pour chaque R_i , choisissons une $\mathcal{F}^s$-fibre de R_i qui passe par un point $p_i \in R_i$; notons F_i cette fibre (figure 2) .

Figure 2



<u>Lemme</u> 2. Soit ν une mesure invariante pour $\mathfrak{F}^u$. Il existe une constante C telle que $\nu(F_i) = C\,\mu^u(F_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

<u>Démonstration</u>. On peut supposer $\nu \geq 0$. Donnons-nous $k > 0$ et fixons i. On a :

$$F_i = \left[\bigcup_{j=1}^{N} [\varphi^k(\mathrm{Int}\, R_j) \cap F_i] \right] \cup \{\text{un nombre fini de points}\}.$$

Ceci nous donne, puisque ν n'a pas d'atomes et puisque les $\mathrm{Int}\, R_j$ sont deux à deux disjoints :

$$\nu(F_i) = \sum_{j=1}^{N} \nu[\varphi^k(\mathrm{Int}\, R_j) \cap F_i].$$

Par ailleurs, d'après les propriétés des partitions markoviennes, $\varphi^k(\mathrm{Int}\, R_j) \cap F_i$ est réunion disjointe d'un certain nombre d'intervalles qui se déduisent tous par holonomie de $\varphi^k(F_j)$ privé de ses extrémités ; de plus, le nombre de ces intervalles est égal au nombre de fois que $\varphi^k(\mathrm{Int}\, R_j)$ traverse $\mathrm{Int}\, R_i$, c'est-à-dire $a_{ji}^{(k)}$, d'où :

$$(*) \qquad \nu(F_i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ji}^{(k)}\, \nu[\varphi^k(F_j)].$$

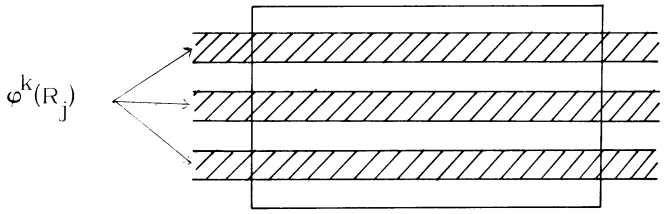


Figure 3

On obtient en particulier que $\nu(F_i) \geq a_{ji}^{(k)}\, \nu[\varphi^k(F_j)]$. Comme $\dfrac{a_{ji}^{(k)}}{\lambda^k}$ tend vers la limite finie non nulle $x_j\, y_i$ quand k tend vers l'infini, il en résulte que $\lambda^k \nu[\varphi^k(F_j)]$ reste borné quand k tend vers l'infini, et en particulier :

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{a_{ji}^{(k)}}{\lambda^k} - x_j\, y_i\right) \lambda^k\, \nu[\varphi^k(F_j)] = 0.$$

En combinant ceci avec l'égalité $(*)$, on obtient :

$$\nu(F_i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N} x_j\, y_i\, \lambda^k\, \nu[\varphi^k(F_j)] = y_i \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda^k\, x_j\, \nu[\varphi^k(F_j)] \right).$$

Ceci termine la démonstration du lemme puisque $y_i = \mu^u(F_i)$ et que $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \lambda^k\, x_j\, \nu[\varphi^k(F_j)]$ est une constante indépendante de i. $\square$

Démonstration du théorème I.

Pour chaque $m \geq 0$, on considère la partition de Markov $\{\Gamma^k_{m,i,j}\}$ donnée par la fermeture des composantes connexes de $\varphi^m(\overset{\circ}{R}_i) \cap \overset{\circ}{R}_j$. Le lemme 2 montre que pour m fixé, il existe une constante C_m telle que :

$$\forall\, k,i,j\,, \qquad \nu(F_j \cap \Gamma^k_{m,i,j}) = C_m\, \mu^u(F_j \cap \Gamma^k_{m,i,j}) \ .$$

Si on fixe j dans les dernières égalités et si on somme sur k et i, on obtient : $\nu(F_j) = C_m\, \mu^u(F_j)$; donc C_m est indépendant de m. On a ainsi montré l'existence d'une constante C telle que :

$$(**) \qquad \forall\, m,k,i,j\,, \qquad \nu(F_j \cap \Gamma^k_{m,i,j}) = C\, \mu^u(F_j \cap \Gamma^k_{m,i,j}) \ .$$

Pour m fixé, les $F_j \cap \Gamma^k_{m,i,j}$ donnent un recouvrement de F_j par des intervalles qui ne se touchent qu'en leurs extrémités, de plus chaque $F_j \cap \Gamma^k_{m+1,i,j}$ est inclus dans un $F_j \cap \Gamma^{k'}_{m,i',j}$ et le diamètre des $F_j \cap \Gamma^k_{m,i,j}$ tend vers zéro quand m tend vers l'infini. A partir de ces propriétés et du fait que ν et μ^u sont sans masse atomique, les égalités $(**)$ impliquent :

$$\nu\,|F_j = C\, \mu^u|F_j\,, \qquad j = 1,\dots,N\ .$$

Il en résulte que $\nu = C\,\mu^u$, puisque toute feuille coupe les F_j. □

§ IV. - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II ET DE SES COROLLAIRES

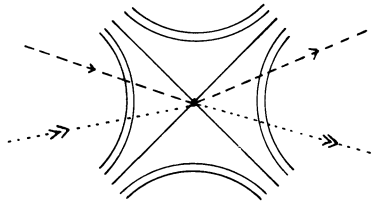
Nous commençons par quelques généralités. Nous considérons une surface orientable sans bord N (compacte ou non) et $\mathfrak{F}$ un feuilletage mesuré sur N. Nous appellerons courbe (fermée) immergée quasi-tranverse à $\mathfrak{F}$, une immersion $S^1 \overset{j}{\hookrightarrow} N$ qui a les propriétés suivantes :

i) Elle est limite de plongements ;

ii) Elle n'a qu'un nombre fini de points doubles et de plus ces points doubles sont inclus dans $\operatorname{sing}\mathfrak{F}$;

iii) Elle est quasi-transverse à $\mathfrak{F}$ (cf. exposé 5, § I).

Figure 4



Proposition 3. Soit α un chemin quasi-transverse à $\mathfrak{F}$ dont l'origine est égale à l'extrémité et qui n'a pas d'autre point double et supposons qu'il parte et qu'il arrive transversalement à $\mathfrak{F}$. Alors la courbe fermée définie par α n'est pas homotope à zéro.

Démonstration. Appelons x_0 l'origine (= l'extrémité) de α. Considérons le cas où x_0 est un point régulier de $\mathfrak{F}$. La situation de α au voisinage est l'une des deux indiquées sur la figure 5.

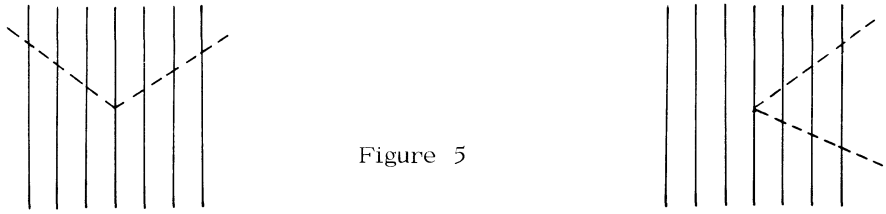
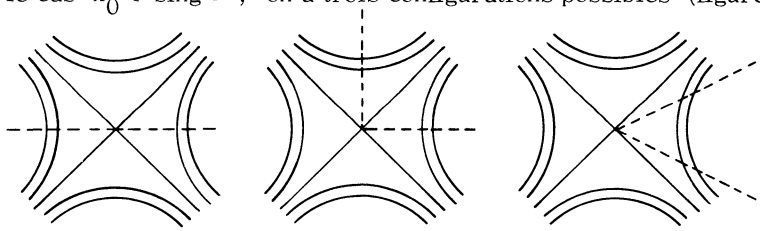


Figure 5

Dans le premier cas, on a une courbe quasi-tranverse qui d'après exposé 5, §I.7, ne peut être homotope à zéro. Dans le second cas, on fabrique une courbe homotope à α avec un morceau de α et un petit morceau de feuille ; cette courbe ne peut pas être homotope à zéro toujours d'après exposé 5, § I.7.

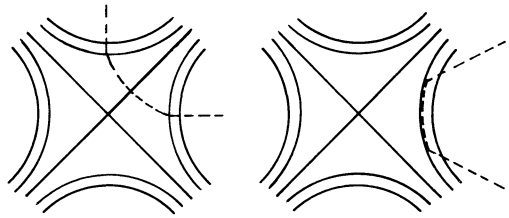
Considérons le cas $x_0 \in \operatorname{sing} \mathfrak{F}$, on a trois configurations possibles (figure 6)

Figure 6



Le premier cas nous fournit une courbe plongée quasi-transverse. Dans le second et le troisième cas, on fait les modifications de la figure 7.

Figure 7



On obtient, toujours d'après exposé 5, § I.7, que α n'est pas homotope à zéro. □

Corollaire 4. Supposons de plus que N est simplement connexe. Alors toute immersion $\mathbb{R} \to N$ quasi-transverse à $\mathfrak{F}$ est sans point double.

Démonstration. Si cette immersion a des points doubles, on peut trouver un chemin quasi-transverse à $\mathfrak{F}$ comme dans les hypothèses du lemme précédent et qui est homotope à zéro puisque N est simplement connexe. $\square$

Proposition 5. Supposons que $N \cong S^1 \times \mathbb{R}$, et soit α une courbe immergée quasi-transverse à $\mathfrak{F}$ et homotope à l'âme du cylindre $S^1 \times \{0\}$. Alors, α est une courbe simple.

Démonstration. Soit $\mathbb{R}^2 = \tilde{N} \xrightarrow{p} N \cong S^1 \times \mathbb{R}$ le revêtement universel de N. Considérons α comme une application $\mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} N$ qui est $\mathbb{Z}$-périodique. Soit $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \tilde{N}$ un relevé de α. Puisque α est homotope à l'âme du cylindre, on peut voir que $p^{-1}(\alpha(0)) = \{\tilde{\alpha}(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, et en déduire que $p^{-1}(\alpha) = \tilde{\alpha}(\mathbb{R})$. Par le corollaire 4, $\tilde{\alpha}(\mathbb{R}) = p^{-1}(\alpha)$ n'a pas de point double, d'où il résulte que α n'a pas de point double, puisque $p^{-1}(\alpha) \xrightarrow{p} \alpha$ est un revêtement. $\square$

Dans la suite de ce paragraphe, nous considérons un difféomorphisme pseudo-Anosov; nous notons $(\mathfrak{F}^s, \mu^s)$ et $(\mathfrak{F}^u, \mu^u)$ ses feuilletages invariants et $\lambda > 1$ son coefficient de dilatation.

Lemme 6. Soit γ une courbe plongée dans M non homotope à zéro. On peut trouver une courbe immergée γ' (resp. γ'') quasi-transverse à $\mathfrak{F}^s$ (resp. $\mathfrak{F}^u$), homotope à γ.

Démonstration. Rappelons que $\mathfrak{F}^s$ n'a pas de liaison entre les singularités. Par l'exposé 5, § II.6, on peut trouver un feuilletage $\mathfrak{F}^s_1$ équivalent à $\mathfrak{F}^s$ et une courbe plongée γ_1 transverse à $\mathfrak{F}^s_1$ et isotope à γ. Quand on revient à $\mathfrak{F}^s$, en écrasant les liaisons entre les singularités, on transforme la courbe γ_1 en la courbe γ' cherchée. $\square$

On munit M de la métrique plate en dehors des singularités $ds^2 = (d\mu^s)^2 + (d\mu^u)^2$. Les considérations d'angle faites plus bas se rapportent à cette métrique et bien sûr n'ont de sens qu'en dehors de $\operatorname{sing} \mathfrak{F}^s = \operatorname{sing} \mathfrak{F}^u$. Remarquons que pour cette métrique les feuilletages $\mathfrak{F}^s$ et $\mathfrak{F}^u$ sont orthogonaux en tout point (régulier).

Lemme 7. Soit α une courbe immergée quasi-transverse à $\mathfrak{F}^s$ (resp. $\mathfrak{F}^u$). L'angle de $\varphi^n \alpha$ avec $\mathfrak{F}^u$ (resp. de $\varphi^{-n}\alpha$ avec $\mathfrak{F}^s$) tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

La démonstration de ce lemme est laissée au lecteur.

Proposition 8. Considérons dans $\widetilde{M}$ le revêtement universel de M, les deux feuilletages $(\widetilde{\mathcal{F}}^s, \widetilde{\mu}^s)$, $(\widetilde{\mathcal{F}}^u, \widetilde{\mu}^u)$ et la métrique plate $ds^2 = (d\widetilde{\mu}^s)^2 + (d\widetilde{\mu}^u)^2$. Soit γ un arc simple quasi-transverse à $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ dont l'angle avec $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ est $< \frac{\pi}{4}$, et δ un arc simple quasi-transverse à $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ dont l'angle avec $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ est $< \frac{\pi}{4}$. Alors $\gamma \cup \delta$ ne peut être une courbe fermée simple.

Démonstration. Supposons que $\gamma \cup \delta$ soit une courbe fermée simple ; comme $\widetilde{M} \cong \mathbb{R}^2$, elle borde un disque Δ. Si δ passe par une singularité s_0, alors une isotopie locale fait coïncider δ avec des arcs de séparatrices de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ au voisinage de s_0 ; on peut faire l'opération en conservant les conditions d'angles et en laissant $\gamma \cup \delta$ plongé. Maintenant, grâce à la condition d'angle sur δ, le champ de droites tangent à $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ le long de δ peut être tourné sans ambiguïté jusqu'à devenir tangent à δ ; la condition d'angle sur γ permet de prolonger ce champ en un champ quasi-transversal à γ, et coïncidant avec $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ au voisinage des singularités et hors d'un voisinage de δ. Le nouveau feuilletage obtenu n'a que des singularités du type permis, ce qui nous donne une contradiction avec la formule d'Euler-Poincaré. □

Corollaire 9. Soient α et β deux courbes immergées quasi-transverses respectivement à $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ et telles que l'angle de α avec $\mathcal{F}^u$ (resp. β avec $\mathcal{F}^s$) soit $< \frac{\pi}{4}$. Deux relevés $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ dans $\widetilde{M}$ se coupent en au plus un point.

Démonstration. Par le corollaire 4, les immersions $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ sont des plongements. Si $\mathrm{card}(\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta}) \geq 2$, on peut trouver un disque Δ avec $\partial\Delta = \gamma \cup \delta$ où $\gamma \subset \widetilde{\beta}$ et $\delta \subset \widetilde{\alpha}$, ce qui est absurde d'après la proposition précédente. □

Soient α et β deux courbes simples dans M non homotopes à zéro. Notons α' (resp. β') une immersion quasi-transverse à $\mathcal{F}^s$ (resp. $\mathcal{F}^u$) et homotope à α (resp. β). Nous notons $P(\alpha')$ (resp. $P(\beta')$) le nombre de passages de α' (resp. β') par des singularités. Notons $\mathrm{int}(\alpha', \beta')$ le nombre de points d'intersection de α' et β' comptés avec multiplicités de la manière suivante : soit $\{p_1, \ldots, p_k\} = \alpha' \cap \beta'$ (avec $p_i \neq p_j$, $i \neq j$) ; affectons à p_i la multiplicité m_i = (nombre de passages de β' par p_i) $\times$ (nombre de passages de α' par p_i) ; par définition, $\mathrm{int}(\alpha', \beta') = \sum_{i=1}^{k} m_i$.

Proposition 10. On a, pour tout $n \geq 0$ et tout $k \geq 0$ assez grands :

$$| i(\varphi^n(\alpha),\varphi^{-k}(\beta)) - \mathrm{int}\,(\varphi^n(\alpha'),\varphi^{-k}(\beta'))| \leq P(\alpha')\,P(\beta') \quad .$$

<u>Démonstration</u>. Remarquons que $P(\varphi^n(\alpha')) = P(\alpha')$ et $P(\varphi^{-k}(\beta')) = P(\beta')$. Par le lemme 7, l'angle de $\varphi^n(\alpha')$ avec $\mathcal{F}^u$ (resp. $\varphi^{-k}(\beta')$ avec $\mathcal{F}^s$) est $< \frac{\pi}{4}$ pour n (resp. k) suffisamment grand. Il suffit alors de montrer que $|i(\alpha,\beta) - \mathrm{int}\,(\alpha',\beta')| \leq$ $\leq P(\alpha')\,P(\beta')$, si l'angle de α' avec $\mathcal{F}^u$ (resp. β' avec $\mathcal{F}^s$) est $< \frac{\pi}{4}$.

Appelons alors $\bar{M} \xrightarrow{\bar{p}} M$, le revêtement de M tel que $\bar{p}_*(\pi_1(\bar{M}))$ soit le groupe cyclique engendré par α' . Comme M est orientable, on a $\bar{M} \cong S^1 \times \mathbb{R}$. Soit $\bar{\alpha}'$ un relevé fermé de α' dans $\bar{M}$; puisque $\bar{\alpha}'$ est quasi-transverse à $\bar{\mathcal{F}}^s = \bar{p}^{-1}(\mathcal{F}^s)$ et qu'il est homotope à l'âme du cylindre, $\bar{\alpha}'$ est en fait une courbe <u>simple</u> d'après la proposition 5. Nous considérons β' comme une application $\mathbb{Z}$-périodique $\mathbb{R} \xrightarrow{\beta'} M$; un relevé de β' dans $\bar{M}$ est par définition un relèvement $\bar{\beta}' : \mathbb{R} \to \bar{M}$ de l'application $\beta' : \mathbb{R} \to M$. Nous allons montrer qu'un relevé $\bar{\beta}'$ de β' coupe $\bar{\alpha}'$ en au plus un point (un point $\in \bar{\alpha}' \cap \bar{\beta}'$ est compté avec multiplicité si $\bar{\beta}'$ passe plusieurs fois par ce point, et un seul point signifie: card $(\bar{\alpha}' \cap \bar{\beta}') = 1$ et $\bar{\beta}'$ ne passe qu'une seule fois par $\bar{\alpha}' \cap \bar{\beta}'$). Pour voir cela, supposons que $\bar{\beta}'(a) \in \bar{\alpha}'$ et $\bar{\beta}'(b) \in \bar{\alpha}'$ avec $a \neq b$. Comme $\pi_1(\bar{M})$ est engendré par $\bar{\alpha}'$, il est facile de trouver un chemin $\bar{\gamma} : [a,b] \to \bar{M}$ tel que $\bar{\gamma}([a,b]) \subset \bar{\alpha}'$, $\bar{\gamma}(a) = \bar{\beta}'(a)$, $\bar{\gamma}(b) = \bar{\beta}'(b)$ et tel que $\bar{\beta}' | [a,b]$ soit homotope à $\bar{\gamma} | [a,b]$ à extrémités fixées. Si on remonte au revêtement universel $\tilde{M}$, on trouve un relevé $\tilde{\alpha}'$ de α' et un relevé $\tilde{\beta}'$ de β' dans $\tilde{M}$ tels que card $(\tilde{\alpha}' \cap \tilde{\beta}') \geq 2$; or ceci est impossible d'après le corollaire 9. Il est facile de voir alors que $\mathrm{int}(\alpha',\beta')$ est égal au nombre de relevés de β' dans $\bar{M}$ qui coupent $\bar{\alpha}'$. Les relevés $\bar{\beta}'$ qui coupent $\bar{\alpha}'$ se répartissent en deux catégories, la première catégorie consiste en les relevés qui sont situés d'un seul côté de $\bar{\alpha}'$, la seconde catégorie consiste en les relevés qui joignent les 2 infinis du cylindre $\bar{M}$ (figure 8) .

Première catégorie

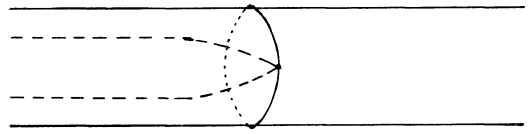
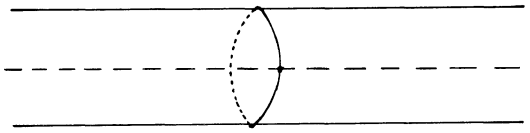


Figure 5

Deuxième catégorie



Vu que α' et β' sont transverses en dehors des singularités de $\mathcal{F}^s$ (ou $\mathcal{F}^u$), il est facile de voir que le point de contact pour la première catégorie est une singularité. On en conclut que le nombre de relevés de β' qui coupent $\bar{\alpha}'$ et qui sont dans la première catégorie est $\leq P(\alpha')P(\beta')$. Le lecteur montrera aisément que le nombre de relevés de β' qui coupent $\bar{\alpha}'$ et qui sont dans la seconde catégorie est en fait très exactement $i(\alpha,\beta)$. □

Considérons maintenant une partition markovienne $\mathcal{R} = \{R_1,\ldots,R_N\}$ pour φ (voir § II.B). On peut toujours par petite perturbation de α' (resp. β'), supposer que α' est transverse à $\bigcup_{i=1}^{N} \partial_{\mathcal{F}^u} R_i$ (resp. $\bigcup_{i=1}^{N} \partial_{\mathcal{F}^s} R_i$). Comme $\varphi^{-1}(\bigcup_{i=1}^{N} \partial_{\mathcal{F}^u} R_i) \subset$ $\subset \bigcup_{i=1}^{N} \partial_{\mathcal{F}^u} R_i$, la courbe $\varphi^{\ell}(\alpha')$ est aussi transverse à $\bigcup_{i=1}^{N} \partial_{\mathcal{F}^u} R_i$ pour $\ell \geq 0$; de même $\varphi^{-\ell}(\beta')$ est transverse à $\bigcup_{i=1}^{N} \partial_{\mathcal{F}^s} R_i$.

Pour $\ell \geq 0$, notons $\bar{\alpha}_i^{\ell}$ le nombre de composantes connexes de la préimage de R_i par un paramétrage de $\varphi^{\ell}(\alpha')$. Pour chacune de ces composantes, l'image sera appelée un <u>passage</u> de $\varphi^{\ell}(\alpha')$ dans R_i. On dit qu'un passage est <u>bon</u> s'il ne rencontre pas $\partial_{\mathcal{F}^u} R_i$; sinon on dit qu'il est mauvais. On note α_i^{ℓ} le nombre de bons passages de $\varphi^{\ell}(\alpha')$ dans R_i.

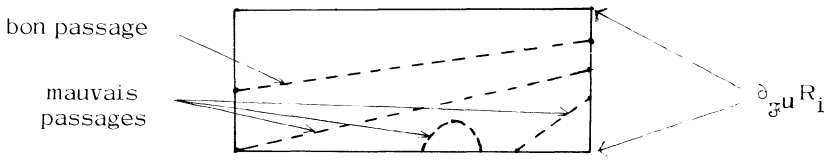


Figure 9

Remarquons que $\bar{\alpha}_i^{\ell} - \alpha_i^{\ell}$ est majoré par le nombre de fois (avec multiplicité) où $\varphi^{\ell}(\alpha')$ coupe $\partial_{\mathcal{F}^u} R_i$. Comme $\varphi^{-\ell}(\bigcup_{i=1}^{N} \partial_{\mathcal{F}^u} R_i) \subset \bigcup_i \partial_{\mathcal{F}^u} R_i$, si C_1 désigne le nombre de fois où α' coupe $\bigcup_{i=1}^{N} \partial_{\mathcal{F}^u} R_i$, on trouve : $\alpha_i^{\ell} \leq \bar{\alpha}_i^{\ell} \leq \alpha_i^{\ell} + C_1$. De la même manière, on définit $\bar{\beta}_i^{\ell}$ et β_i^{ℓ} en remplaçant $\varphi^{\ell}(\alpha')$ par $\varphi^{-\ell}(\beta')$ et $\mathcal{F}^u$ par $\mathcal{F}^s$. On trouve aussi une constante C_2 telle que : $\beta_i^{\ell} \leq \bar{\beta}_i^{\ell} \leq \beta_i^{\ell} + C_2$, $\forall\, i = 1,\ldots,N$, $\forall\, \ell \geq 0$. On pose pour la suite $C = \max(C_1,C_2)$.

Puisque $\varphi^{-n}(\bigcup_{i=1}^{N} \partial_{\mathcal{F}^u} R_i) \subset \bigcup_{i=1}^{N} \partial_{\mathcal{F}^u} R_i$ et $\varphi^{n}(\bigcup_{i=1}^{N} \partial_{\mathcal{F}^s} R_i) \subset \bigcup_{i=1}^{N} \partial_{\mathcal{F}^s} R_i$ pour $n \geq 0$, il est facile de voir que si P est un bon passage de $\varphi^{\ell}(\alpha')$ dans R_i, alors $\varphi^{n}(P) \cap R_j$ est composé de $a_{ij}^{(n)}$ bons passages de $\varphi^{\ell+n}(\alpha')$, où $A = (a_{ij})$ est la matrice d'incidence associée à la partition markovienne et $A^n = (a_{ij}^{(n)})$. D'un autre côté, si P' est un passage quelconque de $\varphi^{\ell}(\alpha')$ dans R_i, alors $\varphi^{n}(P') \cap R_j$ est composé d'au plus $a_{ij}^{(n)}$ passages de $\varphi^{\ell+n}(\alpha')$ dans R_j (ici on utilise que α' est quasi-transverse à $\mathcal{F}^s$). On a donc les inégalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{\ell} a_{ij}^{(n)} \leq \alpha_j^{\ell+n} \leq \bar{\alpha}_j^{\ell+n} \leq \sum_{i=1}^{N} \bar{\alpha}_i^{\ell} a_{ij}^{(n)} \leq \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i^{\ell} + C)\, a_{ij}^{(n)} .$$

Rappelons que $x_i = \mu^s(\mathcal{F}^u\text{-fibre de } R_i)$ et $y_i = \mu^u(\mathcal{F}^s\text{-fibre de } R_i)$.

<u>Lemme</u> 11. a) $\lim_{\ell \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i \alpha_i^{\ell}}{\lambda^{\ell}} = I(\mathcal{F}^s, \mu^s ; \alpha)$

b) $\lim_{\ell \to \infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{y_j \beta_j^{\ell}}{\lambda^{\ell}} = I(\mathcal{F}^u, \mu^u ; \beta)$.

<u>Démonstration</u>. $I(\mathcal{F}^s, \mu^s ; \varphi^{\ell}(\alpha)) = \lambda^{\ell} I(\mathcal{F}^s, \mu^s ; \alpha)$ n'est autre que la μ^s-longueur de $\varphi^{\ell}(\alpha')$ puisque $\varphi^{\ell}(\alpha')$ est quasi-transverse à $\mathcal{F}^s$ et homotope à $\varphi^{\ell}(\alpha)$. D'un autre côté :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i^{\ell} \leq \mu^s[\varphi^{\ell}(\alpha')] \leq \sum_{i=1}^{N} x_i \bar{\alpha}_i^{\ell} \leq (\sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i^{\ell}) + C \sum_{i=1}^{N} x_i ;$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i^{\ell} \leq \lambda^{\ell} I(\mathcal{F}^s, \mu^s ; \alpha) \leq (\sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i^{\ell}) + C \sum_{i=1}^{N} x_i .$$

Le a) résulte aisément de cette inégalité. Le b) s'obtient en échangeant les rôles. □

Remarquons que l'on a : $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{n+\ell} \beta_j^{\ell} \leq \operatorname{int}(\varphi^{n+\ell}(\alpha'), \varphi^{-\ell}(\beta'))$. Par le lemme 7 et le corollaire 9, pour ℓ assez grand et $n \geq 0$, on a :

$$\operatorname{int}(\varphi^{n+\ell}(\alpha'), \varphi^{-\ell}(\beta')) \leq \sum_{j=1}^{N} \bar{\alpha}_j^{n+\ell} \bar{\beta}_j^{\ell} ,$$

d'où par les inégalités écrites ci-dessus :

$$\sum_{i,j} \alpha_i^{\ell} a_{ij}^{(n)} \beta_j^{\ell} \leq \operatorname{int}(\varphi^{n+\ell}(\alpha'), \varphi^{-\ell}(\beta')) \leq \sum_{i,j} (\alpha_i^{\ell} + C)\, a_{ij}^{(n)} (\beta_j^{\ell} + C) .$$

Par la proposition 10, on a, pour ℓ assez grand et $n \geq 0$:

$$|\operatorname{int}(\varphi^{n+\ell}(\alpha'), \varphi^{-\ell}(\beta')) - i(\varphi^{n+\ell}(\alpha), \varphi^{-\ell}(\beta))| \leq P(\alpha')\, P(\beta') \ .$$

On a aussi bien sûr : $i(\varphi^{n+\ell}(\alpha), \varphi^{-\ell}(\beta)) = i(\varphi^{n+2\ell}(\alpha), \beta)$.

En combinant ce qui précède, on obtient pour ℓ grand :

$$\begin{aligned}(\sum_{i,j} \alpha_i^{\ell} a_{ij}^{(n)} \beta_j^{\ell}) - P(\alpha')\, P(\beta') &\leq i(\varphi^{n+2\ell}(\alpha), \beta) \\ &\leq \sum_{i,j} (\alpha_i^{\ell} + C)\, a_{ij}^{(n)} (\beta_j^{\ell} + C) + P(\alpha')\, P(\beta') \ .\end{aligned}$$

En divisant ces inégalités par $\lambda^{n+2\ell}$ et en appliquant le lemme 1 , on obtient quand on fait tendre n vers l'infini et pour ℓ fixé assez grand :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \frac{\alpha_i^{\ell} x_i y_j \beta_j^{\ell}}{\lambda^{2\ell}} &\leq \liminf_{k\to\infty} \frac{i(\varphi^k(\alpha), \beta)}{\lambda^k} \leq \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \frac{i(\varphi^k(\alpha), \beta)}{\lambda^k} \leq \sum_{i,j} \frac{(\alpha_i^{\ell} + C)\, x_i y_j\, (\beta_j^{\ell} + C)}{\lambda^{2\ell}} \ .\end{aligned}$$

Par le lemme 11 , si on fait tendre ℓ vers l'infini, on obtient :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{i(\varphi^k(\alpha), \beta)}{\lambda^k} = I(\mathcal{F}^s, \mu^s\ ;\ \alpha)\, I(\mathcal{F}^u, \mu^u\ ;\ \beta) \ .$$

Ceci termine la démonstration du théorème II. □

Le corollaire II. 1 est une conséquence immédiate du théorème II .

<u>Démonstration du corollaire</u> II.2.

Comme on l'a vu dans l'exposé 9 (théorème à la fin du § V), l'action de φ ne peut pas avoir de point fixe dans l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}M$, et de plus aucune puissance non triviale de φ ne peut conserver une classe d'isotopie de courbes simples. Supposons alors que l'on a un point fixe de l'action de φ dans $\overline{\mathcal{T}M}$, ce point fixe est un élément $[\mathcal{F}, \mu]$ dans $P\mathcal{M}\mathcal{F}(M)$. Autrement dit, il existe $\rho > 0$ tel que $\varphi(\mathcal{F}, \mu) \sim_{\mathcal{M}} (\mathcal{F}, \rho\mu)$. D'après ce qui a été dit plus haut, $\mathcal{F}$ est arationnel, car dans le cas contraire une puissance non triviale de φ préserverait une classe d'isotopie de courbes. De plus, ρ est différent de 1 , car dans le cas contraire φ serait isotope à un difféomorphisme périodique (voir exposé 9, § IV). Supposons $\rho > 1$; le cas $\rho < 1$

se traite de la même manière. On peut alors, d'après l'exposé 9, § V, isotoper φ par un difféomorphisme pseudo-Anosov φ' qui admet $(\mathcal{F},\mu)$ pour feuilletage instable. Le corollaire II.1 appliqué à φ et à φ' donne $\forall\ \alpha \in \mathcal{S}(M)$:

$$\lim_{n\to\infty} [\varphi^n \alpha] = [\mathcal{F}^u,\mu^u] \text{ dans } P\mathcal{M}\mathcal{F}(M)$$

$$\lim_{n\to\infty} [\varphi'^n \alpha] = [\mathcal{F},\mu] \text{ dans } P\mathcal{M}\mathcal{F}(M) .$$

Comme φ et φ' sont isotopes, on obtient $[\mathcal{F}^u,\mu^u] = [\mathcal{F},\mu]$. Le cas $\rho < 1$ donnerait $[\mathcal{F}^s,\mu^s] = [\mathcal{F},\mu]$. □

§ V. - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III (UNICITÉ DES PSEUDO-ANOSOV)

Nous commençons par démontrer deux lemmes.

Lemme 12. Soient M une surface orientable fermée de genre $g > 1$ et φ un difféomorphisme de M isotope à l'identité. Si φ est périodique, alors φ est l'identité.

Démonstration. On a vu (remarque à la fin du § IV de l'exposé 9) que le théorème d'uniformisation impliquait que φ est une isométrie pour une métrique hyperbolique. Puisque φ est isotope à l'identité, φ est en fait l'identité (exposé 3, § IV, théorème 18). □

Lemme 13. Soient $(\mathcal{F}^u,\mu^u)$ un feuilletage arationnel de M et φ un difféomorphisme de M, isotope à l'identité, qui préserve $(\mathcal{F}^u,\mu^u)$. Alors φ est isotope à l'identité à travers les difféomorphismes qui préservent $(\mathcal{F}^u,\mu^u)$.

Démonstration. Le lemme 7 de l'exposé 9 dit que φ est isotope à un difféomorphisme φ' périodique, à travers les difféomorphismes qui préservent $(\mathcal{F}^u,\mu^u)$. Le lemme précédent montre que φ' est l'identité. □

Soient φ_1 et φ_2 deux difféomorphismes pseudo-Anosov isotopes. Notons $(\mathcal{F}^u_1,\mu^u_1)$ (resp. $(\mathcal{F}^u_2,\mu^u_2)$) le feuilletage instable de φ_1 (resp. φ_2), et $(\mathcal{F}^s_1,\mu^s_1)$ (resp. $(\mathcal{F}^s_2,\mu^u_2)$) le feuilletage stable de φ_1 (resp. φ_2). D'après le corollaire II.2, on a $[\mathcal{F}^u_1,\mu^u_1] = [\mathcal{F}^u_2,\mu^u_2]$ dans $P(\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_+)$. Quitte à multiplier $(\mathcal{F}^u_1,\mu^u_1)$ par une constante

positive non nulle, on peut donc supposer que $(\mathcal{F}_1^u, \mu_1^u) = (\mathcal{F}_2^u, \mu_2^u)$ dans $\mathbb{M}\mathcal{F}$. Puisque ces feuilletages n'ont pas de liaison entre les singularités, il existe un difféomorphisme h isotope à l'identité tel que $(\mathcal{F}_1^u, \mu_1^u) = h(\mathcal{F}_2^u, \mu_2^u)$ où l'égalité veut dire ici même feuilletage dans M et même mesure transverse. Quitte à remplacer φ_2 par $h\varphi_2 h^{-1}$, on est ramené au cas où φ_1 et φ_2 ont le même feuilletage instable $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$. Remarquons aussi que la constante d'expansion λ (> 1) est la même pour φ_1 et φ_2 ; ceci résulte par exemple du fait que $\varphi_1(\mathcal{F}^u, \mu^u) = \varphi_2(\mathcal{F}^u, \mu^u)$ dans $\mathbb{M}\mathcal{F}$. Il en résulte que $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ préserve $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$. D'après le lemme 13, $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ <u>est isotope à l'identité à travers les difféomorphismes qui préservent</u> $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$; désignons par h_t une telle isotopie. En particulier, pour tout x dans M, $\varphi_2^{-1}\varphi_1(x)$ et x sont sur la même $\mathcal{F}^u$-feuille ; nous notons par $[x, \varphi_2^{-1}\varphi_1(x)]$ le segment de la $\mathcal{F}^u$-feuille de x qui joint x à $\varphi_2^{-1}\varphi_1(x)$.

<u>Lemme</u> 14. On a : $D = \sup\{\mu_2^s([x, \varphi_2^{-1}\varphi_1(x)]) \mid x \in M\} < +\infty$.

<u>Démonstration</u>. Soit $U_1, \ldots, U_k$ un recouvrement de M par des cartes pour le feuilletage $\mathcal{F}^u$. On désigne par A le sous-ensemble de $M \times M$ défini par $(x,y) \in A$ s'il existe une plaque de $\mathcal{F}^u$ contenue dans un des U_i et qui contient x et y (en particulier puisque la "plaque" d'un point singulier est réduite à ce point, si $(x,y) \in A$ et x (ou y) est un point singulier de $\mathcal{F}^u$, $x = y$). Si $(x,y) \in A$, nous désignons par $[x,y]$ le segment de la plaque qui contient x et y et qui va de x à y ; la fonction $(x,y) \to \mu_2^s([x,y])$ est continue sur A. Considérons alors l'isotopie h_t de $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ à l'identité, à travers des homéomorphismes qui préservent $\mathcal{F}^u$. On peut trouver un $\delta > 0$ tel que, si $|t - t'| < \delta$, alors $(h_t(x), h_{t'}(x)) \in A$; par la compacité de M et ce qui est dit plus haut, on a :

$$D_{t,t'} = \sup\{\mu_2^s([h_t(x), h_{t'}(x)]) \mid x \in M\} < \infty .$$

Considérons alors une suite $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$, telle que $t_{i+1} - t_i < \delta$. on a pour tout $x \in M$:

$$\mu_2^s([x, \varphi_2^{-1}\varphi_1(x)]) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mu_2^s([h_{t_i}(x), h_{t_{i+1}}(x)]) ;$$

d'où :
$$D \leq \sum_{i=0}^{n-1} D_{t_i, t_{i+1}} < +\infty . \qquad \square$$

<u>Lemme</u> 15. La suite d'homéomorphismes $(\varphi_2^{-n}\varphi_1^n)_{n \geq 0}$ converge uniformément.

Démonstration. Soit d la métrique obtenue à partir de l'élément $ds^2 = (d\mu_2^s)^2 + (d\mu^u)^2$. Remarquons que si x et y sont sur la même $\mathcal{F}^u$-feuille, et si $[x,y]$ désigne le segment de cette feuille qui va de x à y, on a $d(x,y) \leq \mu_2^s([x,y])$ (on n'a pas égalité en général, car, les feuilles ayant de la récurrence, deux points peuvent être proches dans M sans que le segment de feuille qui va de l'un à l'autre soit petit). La convergence uniforme de la suite résulte aisément de l'inégalité suivante que nous allons établir :

$$\sup_{x \in M} d(\varphi_2^{-(n+1)} \varphi_1^{(n+1)}(x), \varphi_2^{-n} \varphi_1^n(x)) \leq \lambda^{-n} D .$$

Considérons le segment de $\mathcal{F}^u$-feuille $[\varphi_2^{-1}\varphi_1(\varphi_1^n(x)), \varphi_1^n(x)]$; sa mesure est $\leq D$. L'image de ce segment par φ_2^{-n} n'est autre que le segment de $\mathcal{F}^u$-feuille $[\varphi_2^{-(n+1)} \varphi_1^{(n+1)}(x), \varphi_2^{-n} \varphi_1^n(x)]$. Vu l'effet de φ_2^{-n} sur μ_2^s, on a :

$$\mu_2^s([\varphi_2^{-(n+1)}\varphi_1^{(n+1)}(x), \varphi_2^{-n}\varphi_1^n(x)]) \leq \lambda^{-n} \mu_2^s([\varphi_2^{-1}\varphi_1(\varphi_1^n(x)), \varphi_1^n(x)]) \leq \lambda^{-n} D \quad ;$$

d'où :

$$d(\varphi_2^{-(n+1)} \varphi_1^{(n+1)}(x), \varphi_2^{-n} \varphi_1^n(x)) \leq \lambda^{-n} D . \qquad \square$$

Désignons par h la limite uniforme de $(\varphi_2^{-n} \varphi_1^n)_{n \geq 0}$. Remarquons que h est inversible puisque l'on montre de la même manière que la suite des inverses $(\varphi_1^{-n} \varphi_2^n)_{n \geq 0}$ converge uniformément. Remarquons aussi que h est isotope à l'identité puisque chaque $\varphi_1^{-n} \varphi_2^n$ est isotope à l'identité.

Considérons alors $h\varphi_1$; on a :

$$h\varphi_1 = (\lim_{n\to\infty} \text{unif}\ \varphi_2^{-n}\varphi_1^n)\varphi_1 = \lim_{n\to\infty} \text{unif}(\varphi_2^{-n}\varphi_1^{(n+1)}) = \lim_{n\to\infty} \text{unif}(\varphi_2(\varphi_2^{-(n+1)}\varphi_1^{(n+1)})) =$$

$$= \varphi_2 \lim_{n\to\infty} \text{unif}\ (\varphi_2^{-(n+1)} \varphi_1^{(n+1)}) = \varphi_2 h ,$$

ou encore $h\varphi_1 = \varphi_2 h$, ce qui montre que h est une conjugaison entre φ_1 et φ_2.

Il nous reste à voir que h est différentiable. Avant de faire cela, nous devons préciser la définition de pseudo-Anosov. Cette précision consiste à demander que les feuilletages $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ soient donnés dans une carte C^∞ au voisinage d'une singularité par les valeurs absolues des parties réelle et imaginaire de $\sqrt{z^{p-2}\, dz^2}$ $(p \geq 3)$.

Lemme 16. Une conjugaison entre deux difféomorphismes pseudo-Anosov est automatiquement C^∞ différentiable.

Démonstration (esquisse). Notons h cette conjugaison, φ_1 et φ_2 les deux difféo-

morphismes pseudo-Anosov ; donc $h\varphi_1 h^{-1} = \varphi_2$. La première chose que l'on remarque c'est que h envoie le feuilletage (in) stable de φ_1 sur le feuilletage (in)-stable de φ_2 (sans parler pour l'instant de mesure transverse). Ceci résulte par exemple du fait que $W^s_x(\varphi_i) = \{y \in M \mid \lim_{n\to+\infty} d(\varphi_i^n(x), \varphi_i^n(y)) = 0\}$ est la feuille de $\mathcal{F}^s_i$ qui passe par x si cette feuille n'aboutit pas à une singularité et, si la feuille de x aboutit à une singularité x_0 de $\mathcal{F}^s_i$ (ou si $x = x_0$) , $W^s_x(\varphi_i)$ est la réunion de x_0 et des feuilles de $\mathcal{F}^s_i$ qui aboutissent à x_0 . De plus, comme $\mathcal{F}^s_2$ (resp. $\mathcal{F}^u_2$) est uniquement ergodique (théorème I) , h envoie aussi μ^s_1 (resp. μ^u_1) sur μ^s_2 (resp. μ^u_2) , quitte à diviser les mesures par des constantes convenables. Considérons alors un point m régulier pour $\mathcal{F}^s_1$ et $\mathcal{F}^u_1$, son image $h(m)$ est un point régulier pour $\mathcal{F}^s_2$ et $\mathcal{F}^u_2$. On peut trouver une carte lisse $]-\varepsilon,\varepsilon[\times]-\varepsilon,\varepsilon[\xrightarrow{\varphi} M$, telle que $\varphi(0) = m$ et que le feuilletage $(\mathcal{F}^s_1, \mu^s_1)$ (resp. $(\mathcal{F}^u_1, \mu^u_1)$) soit défini dans cette carte par la 1-forme dx (resp. dy) . De même, on trouve une telle carte autour de $h(m)$. Quand on lit h dans ces cartes, il apparaît comme un homéomorphisme de $]-\varepsilon,\varepsilon[\times]-\varepsilon,\varepsilon[$ sur un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^2$, qui envoie 0 sur 0 , les horizontales dans les horizontales, les verticales dans les verticales, et qui préservent l'écartement entre deux horizontales ou deux verticales. Il est facile de voir que h est la restriction à $]-\varepsilon,\varepsilon[\times]-\varepsilon,\varepsilon[$ d'une des quatre applications linéaires suivantes de $\mathbb{R}^2$: Identité, symétrie orthogonale par rapport au premier (resp. second) axe, symétrie par rapport à l'origine. Il en résulte que h est C^∞ en tout point régulier de $\mathcal{F}^s_1$ et $\mathcal{F}^u_2$. On peut faire un raisonnement analogue en un point singulier. Rappelons que l'on a précisé plus haut la définition de pseudo-Anosov. Cette précision implique que dans des cartes convenables, h apparaît comme un germe d'homéomorphisme en $0 \in \mathbb{C}$ qui préserve les valeurs absolues des parties réelle et imaginaire de $\sqrt{z^{p-2}\,dz^2}$ $(p \geq 3)$. Le lecteur vérifiera que de tels germes, qui préservent l'orientation, sont des rotations d'angles $\frac{2k\pi}{p}$, les germes qui renversent l'orientation sont donnés par des symétries par rapport à des droites qui contiennent la réunion de deux séparatrices. $\square$

<u>Remarque</u>. On peut se demander quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un feuilletage arationnel, uniquement ergodique, soit le feuilletage stable d'un pseudo-Anosov.

RÉFÉRENCES

[1] R. BOWEN & B. MARCUS, Unique ergodicity for horocycle foliations, Israël J. of Math. 26 (1977), p. 43-67.

[2] F.R. GANTMACHER, The theory of matrices, Chelsea, 1959 ; Traduction française, Dunod, 1966 .

[3] S. KARLIN, A first course in stochastic processes, Academic Press, 1966 ; Traduction française, Dunod, 1969 .