Astérisque

F. LAUDENBACH

La théorie de Thurston sur les surfaces à bord

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 209-224
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__209_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXPOSÉ 11

LA THÉORIE DE THURSTON SUR LES SURFACES A BORD

par F. LAUDENBACH

§ I. - L'espace des courbes et des feuilletages mesurés

§ II. - L'espace de Teichmüller et son compactifié

§ III. - Préparatifs pour la classification des difféomorphismes

§ IV. - Le théorème de classification de Thurston et le théorème de Nielsen

§ V. - Le théorème spectral

Soit M une surface compacte connexe, à bord non vide, dont la caractéristique d'Euler est négative ; pour simplifier, nous nous limitons au cas où M est orientable. Soit alors g le genre de M et b le nombre de composantes du bord. La caractéristique d'Euler est donnée par :

$$\chi(M) = 2 - 2g - b \quad ,$$

donc $\chi(M) < 0$ équivaut à $b > 2 - 2g$.

Une telle surface peut être disconnectée par $3g - 3 + b$ courbes en $2g - 2 + b$ pantalons. Les cas exclus sont S^2 , T^2 , D^2 et $S^1 \times [0,1]$. Le pantalon est la seule surface avec $\chi < 0$ et $b \not> 3 - 3g$. Dans la suite, on se restreint au cas $b > 3 - 3g$.

§ I. - L'ESPACE DES COURBES ET DES FEUILLETAGES MESURÉS

Dans cette situation, $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des classe d'isotopie (= d'homotopie) de courbes simples non homotopes à zéro et non homotopes à une courbe du bord. D'autre part, on considère l'ensemble $\mathcal{MF}$ des classes de Whitehead de feuilletages

mesurés, qui sont astreints à la condition suivante sur le bord :

Chaque courbe du bord est un cycle de feuille, contenant au moins une singularité.

La relation d'équivalence de Whitehead est engendrée par les relations suivantes :

- isotopie, libre sur le bord ;
- contraction en un point d'une feuille de l'intérieur liant deux singularités, dont au plus une est sur le bord ;
- contraction en un point d'une feuille du bord liant deux singularités ;
- opérations réciproques des deux précédentes.

Comme dans le cas sans bord, l'intersection géométrique définit des applications

$$i_* : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{+}$$

$$I_* : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{+} .$$

Soit π la projection sur l'espace projectif :

$$\pi : \mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{+} - \{0\} \longrightarrow P(\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{+}) .$$

On note $P\mathcal{F}$ l'image de πI_* .

Théorème 1. 1° Les applications i_* et I_* sont injectives.

2° $P\mathcal{F}$ est homéomorphe à la sphère $S^{6g-7+2b}$.

3° L'image $\pi i_*(\mathcal{S})$ est dense dans $P\mathcal{F}$.

Démonstration. La démonstration étant très proche de celle du cas sans bord (voir exposés 4 et 6) , donnons seulement une explication pour la dimension.

On considère dans M un système de $3g - 3 + b$ courbes simples K_i , qui partagent M en pantalons de sorte que chaque K_i adhère à deux pantalons distincts ; cela n'existe pas si M est un tore avec un seul trou $(3g - 3 + b = 1)$; on reviendra sur ce cas à la fin. Une fois mis en "forme normale" par rapport à cette décomposition, un feuilletage $(\mathcal{F},\mu)$ est caractérisé (à équivalence près) par des triplets (m_i,s_i,t_i) , $i = 1,\ldots,3g-3+b$, appartenant au bord $\partial(\leq \nabla)$ de l'inégalité triangulaire. On a :

$$m_i = I(\mathcal{F},\mu ; [K_i]) .$$

Puisque les courbes du bord sont de mesure nulle, la connaissance des m_i détermine à équivalence près les feuilletages dans chaque pantalon. Puis, par la théorie des "arcs jaunes" la paire (s_i,t_i) décrit comment sont recollés les feuilletages des deux

pantalons adjacents à K_i .

Finalement, l'ensemble des classes d'équivalence de feuilletages mesurés, en forme normale par rapport à la décomposition donnée de M , est en bijection avec un cône positif épointé, de base $S^{6g-7+2b}$.

Pour obtenir le théorème, il reste à prouver que s_i et t_i sont déterminés par $I_*(\mathcal{F},\mu)$ et que l'image $I_*(\mathbb{m}\mathcal{F})$ est une variété topologique. Ces deux points se démontrent comme dans le cas sans bord ; précisément, s_i et t_i se calculent à l'aide des mesures de classes $[K'_i]$, $[K''_i]$, associées à la décomposition (voir exposé 6) ; il suffit alors de remarquer que ces classes sont bien des éléments de $\mathcal{S}$.

Dans le cas $3g - 3 + b = 1$ (M = tore avec un seul trou) , on prend pour K_1 et K'_1 deux "générateurs" du tore et pour K''_1 la courbe obtenue à partir de K'_1 par un twist positif d'un tour le long de K_1 (figure 1) . On laisse au lecteur l'exercice

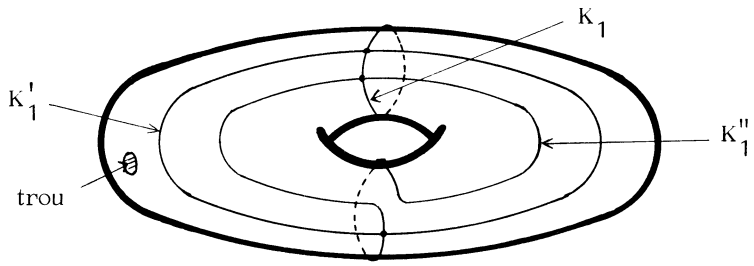


Figure 1

d'établir les formules qui donnent s_1 et t_1 en fonction des mesures de $[K_1]$, $[K'_1]$ et $[K''_1]$.

§ II. - L'ESPACE DE TEICHMÜLLER ET SON COMPACTIFIÉ

On considère l'espace topologique $\mathcal{H}$ des métriques riemanniennes de courbure -1 , pour lesquelles chaque courbe du bord est une géodésique de longueur 1 . Le groupe $\mathrm{Diff}^0(M)$ des difféomorphismes de M isotopes à l'identité agit naturellement sur $\mathcal{H}$; on appellera espace de Teichmüller (†) de M , l'espace topologique quotient

$$\mathcal{T} = \mathcal{H} / \mathrm{Diff}^0(M) .$$

(†) Classiquement [4] , on ne fixe pas la longueur des courbes du bord.

On paramètre $\mathcal{T}$ en fixant une décomposition en pantalons comme dans § I . Une structure de Teichmüller (i.e. un point de $\mathcal{T}$) est entièrement déterminée par <u>les longueurs</u> m_i des géodésiques isotopes aux courbes K_i et par les "angles" (nombres réels) de recollement α_i . On démontre que, par ce paramétrage, $\mathcal{T}$ est homéomorphe $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})^{3g-3+b}$.

D'autre part, pour chaque $\alpha \in \mathcal{S}$, on peut parler de sa longueur relativement à la structure de Teichmüller considérée. On a donc une application :

$$\ell_* : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} .$$

Comme dans le cas sans bord, l' "angle" α_i est déterminé par les longueurs des géodésiques de $[K_i']$ et de $[K_i'']$. On obtient donc le théorème suivant.

<u>Théorème</u> 2. L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}$ étant défini comme plus haut, l'application ℓ_* est une application propre qui est un homéomorphisme sur son image. En particulier, $\ell_*(\mathcal{T})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{6g-6+2b}$.

A partir de là, on identifie $\mathcal{M}\mathcal{F}$ et $\mathcal{T}$ à leurs images respectives dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$.

<u>Lemme</u>. Dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$, les espaces $\mathcal{M}\mathcal{F}$ et $\mathcal{T}$ sont disjoints.

<u>Démonstration</u>. Il suffit, par exemple, de trouver pour chaque feuilletage $(\mathcal{F},\mu)$ une suite $\alpha_n \in \mathcal{S}$ telle que $I(\mathcal{F},\mu\,;\,\alpha_n) \to 0$. Soit $q : \tilde{M} \to M$ le revêtement ramifié des orientations transversales de $\mathcal{F}$. Soit $\tilde{\mathcal{F}} = q^*\mathcal{F}$. Soit $z \in \operatorname{int}\tilde{M} - \operatorname{sing}\tilde{\mathcal{F}}$ un point limite pour une feuille L ; on peut former une courbe simple C_n , avec un arc de L et un arc transversal au feuilletage de mesure $\leq \frac{1}{n}$, contenu dans un "flow-box" voisinage de z . Comme $\tilde{\mathcal{F}}$ est transversalement orientable, C_n est approchable par une vraie transversale à $\tilde{\mathcal{F}}$; on peut supposer en plus que $q(C_n)$ n'a que des points doubles isolés. Par une modification autour de chaque point double, on construit une courbe C_n' , qui est une courbe simple de M , transversale à $\mathcal{F}$ et de mesure $\leq \frac{1}{n}$. On pose $\alpha_n = [C_n']$.

Il reste à vérifier que C_n' n'est pas isotope à une courbe du bord. Sinon, on a un anneau équipé d'un feuilletage mesuré, où une courbe du bord est transverse au feuilletage et où l'autre est un cycle ; ceci est interdit par le théorème de récurrence de Poincaré, § I.5 , exposé 5 . □

<u>Théorème</u> 3. La projection π injecte $\mathcal{T}$ dans $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}})$ par un homéomorphisme sur son image, qui est disjointe de $P\mathcal{M}\mathcal{F}$. Muni de la topologie induite, $\pi(\mathcal{T}) \cup P\mathcal{M}\mathcal{F}$ est

une variété à bord $\overline{\mathcal{T}}$, homéomorphe à la boule de dimension $6g - 6 + 2b$. Le groupe $\pi_0(\mathrm{Diff}(M))$ agit continûment sur $\overline{\mathcal{T}}$.

Pour la démonstration, on suit la même démarche que dans le cas sans bord (exposé 8) , et non celle que suggère l'ordre des phrases de l'énoncé précédent.

§ III. - PRÉPARATIFS POUR LA CLASSIFICATION DES DIFFÉOMORPHISMES

3.1. Il est bien entendu qu'il s'agit d'une classification des difféomorphismes à isotopie près, où l'isotopie sur le bord est libre.

Soient $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ et $[\varphi]$ sa classe d'isotopie. D'après le théorème du point fixe de Brouwer, il existe un point $x \in \overline{\mathcal{T}}$, tel que :

$$[\varphi]\cdot x = x \ .$$

Si $x \in \mathcal{T}$, alors φ est isotope à une isométrie hyperbolique ; dans ce cas, $[\varphi]$ est d'ordre fini (exposé 9) .

Si $x \in P\pi\mathcal{T}$, il existe un feuilletage $(\mathcal{F},\mu)$ et $\lambda > 0$, tels que :

$$\varphi\,(\mathcal{F},\mu) \sim (\mathcal{F},\lambda\mu) \ ,$$

l'équivalence étant au sens de Whitehead ; à partir de là, tout dépend de $(\mathcal{F},\mu)$ et de λ .

Soit Σ le complexe constitué des singularités et des feuilles joignant deux singularités (éventuellement confondues) ; Σ contient ∂M puisque chaque composante du bord contient une singularité. On note $U(\mathcal{F})$ le complémentaire d'un voisinage régulier de Σ dans M . On voit que $U(\mathcal{F})$ ne dépend à isotopie près que de la classe de Whitehead de $\mathcal{F}$.

On définit $\beta\,U(\mathcal{F})$ comme la réunion des composantes du bord de $U(\mathcal{F})$ qui représentent des éléments de $\mathcal{S}$. Pour la suite, on distingue les cas suivants :

(I) $\beta\,U(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ (cas réductible) ,

(II) $\beta\,U(\mathcal{F}) = \emptyset$ et $\lambda = 1$ (cas périodique) ,

(III) $\beta\,U(\mathcal{F}) = \emptyset$ et $\lambda \neq 1$ (cas pseudo-Anosov) .

3.2. Difféomorphisme réductible.

Définition. On dit que φ est réductible s'il existe des courbes simples $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ mutuellement disjointes, représentant chacune un élément distinct de $\mathcal{S}$, telles que $\varphi(\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n) = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$.

Lemme. Si $\varphi(\mathcal{F},\mu) \sim (\mathcal{F},\lambda\mu)$ et si $\beta U(\mathcal{F})$ est non vide, alors φ est isotope à un difféomorphisme réductible.

Démonstration. Quitte à modifier φ par isotopie, on peut supposer que $\varphi(U(\mathcal{F})) = U(\mathcal{F})$. Soit γ_1 une composante de $\beta U(\mathcal{F})$, $\gamma_2 = \varphi(\gamma_1)$, etc.; on s'arrête à γ_n si c'est le premier itéré tel que $\varphi(\gamma_n)$ soit isotope à γ_1. Puisque $\varphi(\gamma_n)$ et γ_1 bordent un anneau, il n'est pas difficile de faire une isotopie de φ pour que $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ soit invariant. □

Si on coupe M le long de $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$, on obtient une surface $\hat{M}$ plus "simple", sur laquelle φ induit un difféomorphisme. Une petite difficulté pour la suite tient au fait que $\hat{M}$ n'est pas en général connexe ; nous y reviendrons au § 4. Remarquons que chaque composante de $\hat{M}$ ou bien est un pantalon, ou bien vérifie $b > 3g-3$; en effet, deux courbes parmi les γ_i ne sont pas isotopes et aucun γ_i n'est isotope à une courbe du bord. Notons que le nombre de réductions successives possibles admet une borne supérieure ne dépendant que de M; quand tous les morceaux sont des pantalons, il n'y a plus de réduction possible.

3.3. Feuilletage arationnel.

Lorsque $\beta U(\mathcal{F})$ est vide, on dit que $\mathcal{F}$ est arationnel. Il y a alors un représentant privilégié dans la classe de $\mathcal{F}$: les singularités de l'intérieur sont sans liaison (ni entre elles, ni avec celles du bord) et les singularités du bord sont simples (une seule séparatrice rentrant dans l'intérieur). Ce représentant est unique à isotopie près. Dans la suite, on suppose que $\mathcal{F}$ est ce représentant canonique. L'équivalence $\varphi(\mathcal{F},\mu) \sim (\mathcal{F},\lambda\mu)$ devient alors une égalité :

$$\varphi(\mathcal{F},\mu) = (\mathcal{F},\lambda\mu)$$

à condition de modifier φ par une isotopie convenable.

A tout système τ d'arcs transverses à $\mathcal{F}$ est associé un système de $\mathcal{F}$-rectangles, dont la réunion est un sous-ensemble N de M, qui a pour frontière une réunion de cycles de feuilles. Puisque $\beta U(\mathcal{F})$ est vide, la frontière de N est dans

∂M , donc $N = M$. De là, on déduit que toute demi-feuille qui ne va pas à une singularité est partout dense.

3.4. Cas $\varphi(\mathfrak{F},\mu) = (\mathfrak{F},\mu)$.

Comme dans le cas d'une surface fermée, on considère un "bon" système d'arcs transverses τ (voir exposé 9). Quitte à changer φ par une isotopie qui préserve $\mathfrak{F}$, on se ramène au cas où $\varphi(\tau) = \tau$ et donc où φ préserve le système de rectangles ; d'où on déduit que φ est isotope à un difféomorphisme périodique.

3.5. Cas $\varphi(\mathfrak{F},\mu) = (\mathfrak{F},\lambda\mu)$, $\lambda > 1$.

En vue de la construction d'un deuxième feuilletage invariant, on est amené ici à modifier la construction d'un "bon" système d'arcs transverses, par rapport à celle donnée au lemme 9 de l'exposé 9. Dans chaque secteur d'une singularité intérieure à M , on prend un petit arc transverse à $\mathfrak{F}$; en revanche on n'en met pas dans les secteurs adjacents au bord. D'autre part, pour chaque feuille lisse du bord, on choisit un point d'où on fait partir une petite transversale rentrante (figure 2) .

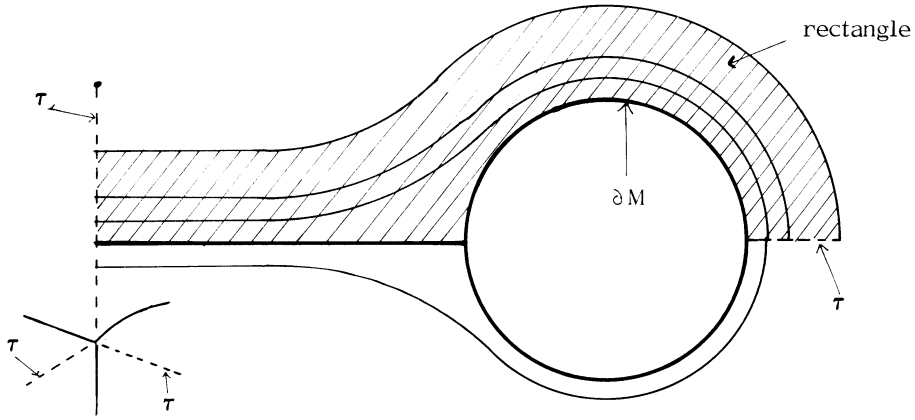


Figure 2

Si τ est un tel système d'arcs, par une isotopie convenable de φ , le long des feuilles de $\mathfrak{F}$, on obtient $\varphi(\tau) \subset \tau$. A partir de là, la technique des lemmes 9 et 11 de l'exposé 9 s'applique pour construire une pré-partition de Markov $\{R_i\}$.

Soit a_{ij} le nombre de composantes de $\varphi(\text{int } R_i) \cap \text{int } R_j$. Soit x_i la μ-mesure de $\partial_\tau^0 R_i$ (ou de $\partial_\tau^1 R_i$) . On a :

$$\lambda x_j = \sum_i x_i a_{ij} .$$

Autrement dit, si A est la matrice (a_{ij}), le vecteur colonne (x_i) est vecteur propre de la matrice transposée ${}^tA$, avec λ pour valeur propre. Par la même démonstration que dans le cas sans bord, on prouve que A a aussi un vecteur propre (y_i), dont toutes les coordonnées sont strictement positives, avec une valeur propre $1/\xi > 0$.

$$y_i = \xi \Sigma a_{ij} y_j .$$

Noter que la démonstration géométrique reposait sur le fait que, pour tout i, $\bigcup_n \varphi^n(\partial^0_{\mathcal{F}} R_i)$ est dense. Ceci est encore vrai ici, car $\partial^0_{\mathcal{F}} R_i$ ne peut être entièrement contenu dans le bord de M ; il contient nécessairement un arc d'une feuille de l'intérieur.

<u>Construction du feuilletage</u> $(\mathcal{F}', \mu')$. Comme dans le cas sans bord, on commence par fixer la μ' - mesure d'arcs remarquables dans $\partial^e_{\mathcal{F}} R_i$. Si un tel arc est dans ∂M, on lui attribue la mesure 0, car on veut que ∂M soit aussi une réunion de cycles de feuilles pour $\mathcal{F}'$ (figure 3).

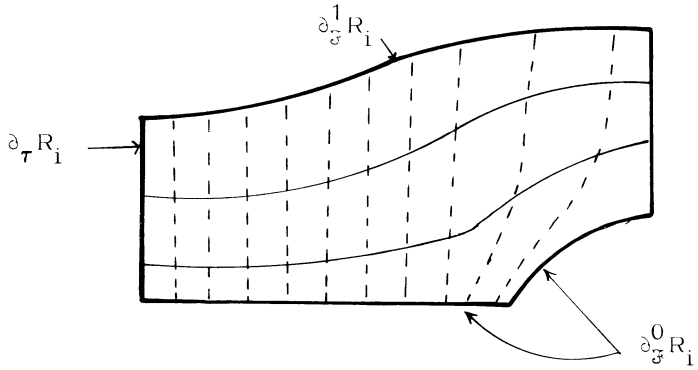


Figure 3

A partir de là, on dessine dans chaque rectangle R_i, un feuilletage mesuré $(\mathcal{F}', \mu')$ transversal à $\mathcal{F}$ et qui respecte les mesures assignées ; cette condition garantit le recollement des morceaux. On observe que $\mathrm{Sing}\,\mathcal{F}' \cap \mathrm{int}\, M = \mathrm{Sing}\,\mathcal{F} \cap \mathrm{int}\, M$, tandis que les singularités de $\mathcal{F}$ sur ∂M deviennent des points réguliers de $\mathcal{F}'$; on a $\mathrm{Sing}\,\mathcal{F}' \cap \partial M = \tau \cap \partial M$.

Maintenant que l'on a une mesure μ' sur les feuilles de $\mathcal{F}$, on construit un "difféomorphisme" pseudo-Anosov φ', qui respecte les deux feuilletages, dilatant les feuilles de $\mathcal{F}$ par $\frac{1}{\xi}$ et contractant celles de $\mathcal{F}'$ par $\frac{1}{\lambda}$. On prouve alors que $\xi = \frac{1}{\lambda}$. Noter que φ' est l'identité sur le bord.

3.6. Difféomorphisme pseudo-Anosov.

On dit que φ est un "difféomorphisme" pseudo-Anosov, s'il existe deux feuilletages mesurés invariants, $(\mathcal{F}^s,\mu^s)$ et $(\mathcal{F}^u,\mu^u)$ et un $\lambda > 1$ avec les propriétés suivantes :

1) $\varphi(\mathcal{F}^s,\mu^s) = (\mathcal{F}^s, \frac{1}{\lambda}\mu^s)$,

2) $\varphi(\mathcal{F}^u,\mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u)$,

3) $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont transverses en tout point de l'intérieur ,

4) Chaque composante de ∂M est un cycle de feuilles de $\mathcal{F}^s$ et de $\mathcal{F}^u$ et contient des singularités de ces deux feuilletages et φ est l'identité sur le bord.

N.B. φ n'est pas C^1 le long du bord.

Les propriétés des difféomorphismes pseudo-Anosov, indiquées au § 6 de l'exposé 9, sont encore valables. Seule la proposition 19 nécessite une modification : elle ne s'applique qu'aux classes d'isotopies de courbes non homotopes à une composante du bord ; d'ailleurs, la métrique $\sqrt{(d\mu^s)^2 + (d\mu^u)^2}$ est singulière le long de tout le bord.

Exemple sur le disque à 3 trous.

Soit A une matrice d'Anosov agissant sur T^2 . Soit σ l'involution $(x,y) \longrightarrow (-x,-y)$; elle a quatre points fixes ; on peut regarder $T^2 \to T^2/\sigma$ comme une structure de revêtement ramifié. Comme on le voit en calculant la caractéristique d'Euler, la base est la 2-sphère.

La transformation A laisse invariant deux feuilletages linéaires de pente irrationnelle, qui passent donc au quotient induisant sur S^2 deux feuilletages mesurés $(\mathcal{F}^s,\mu^s)$ et $(\mathcal{F}^u,\mu^u)$, avec singularités aux quatre points de ramification (sur T^2, les mesures transverses sont données par les 1-formes fermées à coefficients constants qui définissent les feuilletages respectifs). Puisque l'indice de ramification est 2 , les singularités sont du type indiqué sur la figure 4 .

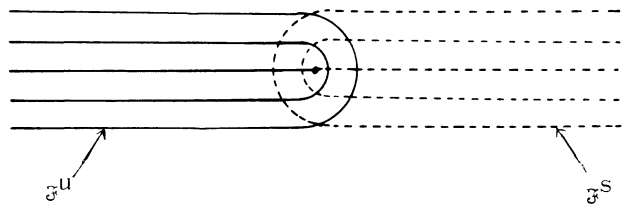


Figure 4

Puisque A commute avec σ , A induit sur S^2 un homéomorphisme φ qui laisse invariants $\mathfrak{F}^u$ et $\mathfrak{F}^s$ et qui transforme les mesures comme le fait A sur T^2 . Pour obtenir le disque à 3 trous, équipé d'un difféomorphisme pseudo-Anosov, on éclate les singularités comme sur la figure 5 .

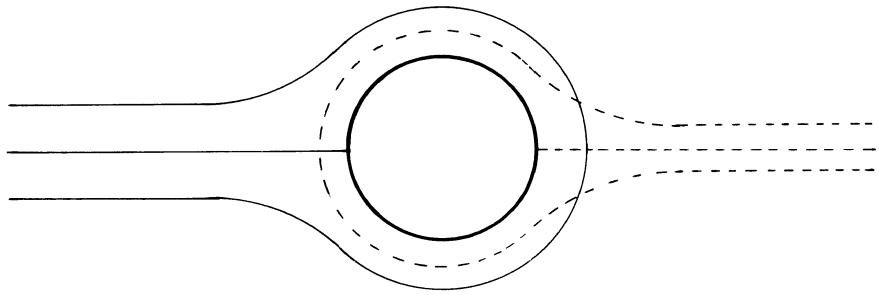


Figure 5

§ 4. - LE THÉORÈME DE CLASSIFICATION DE THURSTON ET LE THÉORÈME DE NIELSEN

4.1. Les arguments du paragraphe précédent achèvent, tout au moins dans le cas orientable, de donner une preuve du théorème suivant.

Théorème. Pour tout difféomorphisme φ d'une surface compacte connexe vérifiant $b > 2 - 2g$, φ est isotope à φ' qui a l'une des trois propriétés :

1° φ' est d'ordre fini ; c'est alors une isométrie d'une structure hyperbolique ;

2° φ' est pseudo-Anosov ;

3° φ' est réductible.

Pour poursuivre l'analyse du cas réductible, il faut dire comment travailler avec une surface non connexe. Il n'y a d'ailleurs à considérer que le cas où φ opère transitivement sur $\pi_0(M)$. Donc $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n$, où les M_i sont les composantes connexes ; $\varphi(M_i) = M_{i+1}$ pour $i = 1,\ldots,n-1$ et $\varphi(M_n) = M_1$.

On dira que φ est pseudo-Anosov, si $\varphi^n | M_1$ est pseudo-Anosov ; alors, par conjugaison, $\varphi^n | M_i$ est pseudo-Anosov pour tout i . Si on sait que $\varphi^n | M_1$ est isotope à un pseudo-Anosov (resp. un difféomorphisme d'ordre fini), alors φ est isotope à un tel difféomorphisme ; il suffit de lire l'isotopie de $\varphi^n | M_1$ comme une isotopie de

$\varphi : M_n \to M_1$. Ainsi, on obtient le résultat final ci-dessous, dans lequel on peut s'abstenir de restrictions sur le genre ou la caractéristique d'Euler, puisque les cas de $M = S^2$, T^2 , D^2 , Pantalon, ruban de Möbius et bouteille de Klein sont connus.

4.2. Théorème. Soit φ un difféomorphisme d'une surface compacte M . Alors, il existe des surfaces (peut-être non connexes) $M_1, \ldots, M_k$ ayant les propriétés suivantes :

1° $M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$;

2° pour $i \neq j$, $M_i \cap M_j$ est une réunion de courbes fermées de leurs bords respectifs ; on note $C_1, \ldots, C_r$ les courbes de "coupure" ;

3° pour $i \neq j$, C_i n'est pas isotope à C_j ;

4° φ isotope à un difféomorphisme φ' tel que pour tout i , $\varphi'(M_i) = M_i$;

5° $\varphi' | M_i$ est isotope, dans $\mathrm{Diff}(M_i)$, à un difféomorphisme périodique ou à un "difféomorphisme" pseudo-Anosov.

Il faut remarquer que, paradoxalement, si φ est un difféomorphisme de Dehn (twist le long d'une courbe C) , cette classification laisse tomber φ à la trappe. En effet, si on coupe M le long de C et si on se permet une isotopie libre sur le bord, on arrive à l'identité.

4.3. Théorème (Nielsen [5]). Soit φ un difféomorphisme d'une surface compacte représentant un élément d'ordre n de $\pi_0(\mathrm{Diff}(M))$. Alors φ est isotope à un difféomorphisme périodique, d'ordre n .

Démonstration. On se limite au cas non trivial $b > 3-3g$ (notations de l'introduction). Soit $M_1 \cup \ldots \cup M_k$ une décomposition de la surface comme dans le théorème précédent ; pour chaque courbe de coupure C_i , on considère un petit voisinage tubulaire $N_i = C_i \times [-1,+1]$; on note M'_j la partie de M_j qui reste après avoir enlevé les tubes ouverts. Après une première isotopie, on a $\varphi(M'_j) = M'_j$ pour tout j et $\varphi(C_i \times \{t\})$ est de la forme $C_{i'} \times \{t'\}$; de plus, $\varphi | M'_j$ est périodique ou pseudo-Anosov.

Lemme 1. Le difféomorphisme φ^n conserve chaque C_i avec son orientation et son orientation normale.

Preuve. Si $i \neq j$, C_i n'est pas isotope à C_j . D'autre part, C_i ne peut être

isotope à son opposée que sur la bouteille de Klein (exclue). Enfin, un échange de côtés induit un morphisme non trivial sur $H_1(M,\mathbb{Z})$. $\square$

<u>Lemme</u> 2. L'isotopie de φ^n à l'identité peut être choisie parmi les difféomorphismes qui conservent $C_1 \cup \ldots \cup C_r$.

<u>Preuve</u>. Une isotopie de φ^n à l'identité induit un lacet, basé en C_1 , dans l'espace des courbes simples de M . Puisque $M \neq T^2$, bouteille de Klein, un tel lacet est homotope à zéro [3] . Par relèvement de cette homotopie dans $\mathrm{Diff}(M)$, on trouve une isotopie de φ^n à l'identité dans $\mathrm{Diff}(M,C_1)$. On travaille de même avec les autres courbes. $\square$

Par conséquent, pour tout j , $\varphi^n | M'_j$ est isotope à l'identité dans $\mathrm{Diff}(M'_j)$. Alors $\varphi | M'_j$ ne peut être pseudo-Anosov ; donc $\varphi | M'_j$ est périodique et, comme c'est une isométrie pour une certaine métrique hyperbolique (†) (voir exposé 9) , $\varphi^n | M'_j$ est l'identité. Donc $\varphi^n | N_i$ est un certain itéré θ^{q_i} du twist de Dehn θ le long de la courbe C_i .

<u>Lemme</u> 3. L'entier q_i est nul pour tout i .

<u>Preuve</u>. Il existe une classe $\beta \in \mathcal{S}$, telle que $i(\beta,[C_i]) \neq 0$ et $i(\beta,[C_j]) = 0$ pour $j \neq i$; si q_i n'est pas nul, d'après l'appendice de l'exposé 4, on a $i(\varphi^n(\beta),\beta) \neq 0$, ce qui interdit à φ^n d'être isotope à l'identité. $\square$

Supposons que $\varphi(C_i) = C_i$; ce lemme signifie alors que φ fait tourner les deux bords du tube N_i dans le même sens. Plus précisément, dans des coordonnées convenables, $\varphi(x,\pm 1) = (x+\frac{1}{n},\pm 1)$, où $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et $\varphi(\{0\} \times [-1,1])$ est isotope à $\{\frac{1}{n}\} \times [-1,+1]$, rel le bord. A partir de là, il est facile de faire une isotopie de $\varphi | N_i$, triviale le long de ∂N_i , jusqu'à un difféomorphisme périodique, de période n .

Si $\varphi(C_i) \neq C_i$, on travaille de la même façon sur l'orbite de C_i .

<u>Remarque</u>. La démonstration de Nielsen repose sur le fait que φ se relève au revêtement universel en un $\tilde{\varphi}$ qui se prolonge au bord du disque de Poincaré ; $\tilde{\varphi} | \partial \mathbb{D}^2$ ne

---

(†) La métrique hyperbolique obtenue par ce raisonnement ne donne peut-être pas la longueur 1 aux courbes du bord ; il n'est donc pas dit ici que $\varphi | M'_j$ admet un point fixe dans $\mathcal{T}(M'_j)$. Question : est-ce qu'une telle métrique de Teichmüller invariante pour $\varphi | M'_j$ existe ? .

dépend que de la classe d'homotopie de φ . Derrière la démonstration faite ici, il y a une autre idée de compactification : celle de l'espace de Teichmüller. En réalité, comme Fenchel l'a annoncé (voir [2] ou le livre de Fenchel et Nielsen dont la parution est prochaine), on peut déduire du théorème du point fixe de Smith [6] que, si G <u>est un sous-groupe fini résoluble de</u> $\pi_0(\mathrm{Diff}\, M)$, <u>alors</u> G <u>admet un point fixe dans l'espace de Teichmüller</u> (ouvert) ; d'où l'on déduit que G se relève en un sous-groupe de $\mathrm{Diff}\, M$.

L'argument est brièvement le suivant. Soit $F \to G \to \mathbb{Z}_p$ une extension où p est un nombre premier ; on suppose que le résultat est vrai pour F . Soit $\mathcal{T}_F$ l'ensemble des points fixes de F dans $\mathcal{T}$. Soient $M' = M/F$, pour une action choisie de F sur M , et X l'ensemble des points de ramification. Soit $\mathcal{T}(M',X)$ l'ensemble des structures conformes de M' modulo la composante neutre de $\mathrm{Diff}\,(M',X)$; on démontre que c'est une cellule [utiliser le théorème de Earle et Eells [1] que l'action de Diff^0 sur les métriques de courbure -1 définit une structure de fibré principal et le fait que $\mathrm{Diff}^0(M')/\mathrm{Diff}^0(M',X)$ est contractile ; par exemple, si $X = 1$ point, ce dernier quotient est homéomorphe au revêtement universel $\tilde{M}$] .

D'autre part, on démontre que $\mathcal{T}_F$ est homéomorphe à $\mathcal{T}(M',X)$; donc $\mathcal{T}_F$ est aussi une cellule. Enfin, comme F est invariant dans G , G agit sur $\mathcal{T}_F$ via le quotient $\mathbb{Z}_p$. D'après Smith, il y a un point fixe (*) .

§ V. - <u>LE THÉORÈME SPECTRAL</u>

5. 1. Pour une métrique riemannienne g et une courbe simple c , on note sa longueur par $L_g(c)$ et, $[c]$ désignant sa classe d'isotopie, on pose :

$$\ell_g([c]) = \inf \{ L_g(c') \mid c' \text{ isotope à } c \} .$$

<u>Théorème</u>. Pour tout difféomorphisme φ d'une surface compacte M , il existe une suite finie $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \geq 1$ tels que, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$ et pour toute métrique riemannienne g , la suite $\sqrt[n]{\ell_g(\varphi^n(\alpha))}$ converge vers une limite qui est indépendante de g et qui appartient à $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$. Les nombres $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ sont des unités algébriques dont le degré admet un majorant qui ne dépend que de la caractéristique d'Euler de M .

(*) Je remercie Alexis Marin qui m'a communiqué l'essentiel des éléments constituant cette remarque.

Démonstration Par le théorème 4.2, on peut supposer : $M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$, $\varphi(M_i) = M_i$; $\varphi|M_i$ est isotope dans $\mathrm{Diff}(M_i)$ à un difféomorphisme φ_i, qui est pseudo-Anosov de facteur de dilatation λ_i pour $i = 1,\ldots,m$, et qui est périodique pour $i = m+1,\ldots,k$. Pour $i > m$, on pose $\lambda_i = 1$. On va prouver que ce "spectre" vérifie l'énoncé précédent.

Puisque toutes les métriques riemanniennes sont équivalentes, on peut se limiter au cas où g est une métrique hyperbolique qui admet les ∂M_i comme géodésiques. Alors, la géodésique c de la classe α coupe ∂M_i minimalement. On découpe c en arcs $c_1,\ldots,c_r$ correspondant aux différents passages de c dans les M_i ; $c_s \subset M_{i(s)}$. D'après le § III de l'exposé 3, c_s est un arc essentiel de $M_{i(s)}$ (non trivial dans $\pi_1(M_{i(s)}, \partial M_{i(s)})$) ; donc, $\varphi(c_s)$ est aussi un arc essentiel de $M_{i(s)}$. De plus, la géodésique de la classe $\varphi^n(\alpha)$ s'écrit $c_1^{(n)} \cup \ldots \cup c_r^{(n)}$, où $c_s^{(n)}$ est isotope à $\varphi^n(c_s)$ par une isotopie ambiante de $\mathrm{Diff}(M_{i(s)})$.

Disons que $\lambda_{i(1)} \geq \lambda_{i(s)}$ pour $s = 1,\ldots,r$. On va prouver que $\sqrt[n]{\ell_g(\varphi^n(\alpha))} \to \lambda_{i(1)}$. Puisque, pour α fixé, toutes les classes $\varphi^n(\alpha)$ traversent les mêmes M_i, il suffit de le prouver pour une sous-suite $(\varphi^t)^n$; ceci permet de se réduire au cas où φ est l'identité sur les ∂M_i et où $\lambda_{i(s)} = 1$ implique $\varphi_{i(s)} = \mathrm{Id}$, ce qu'on supposera dans la suite.

Considérons l'arc géodésique $d_s^{(n)}$ (resp. $h_s^{(n)}$) qui est homotope à $\varphi^n(c_s)$ à extrémités fixes (resp. libres). Soit $\beta_s^{(n)}$ (resp. $\delta_s^{(n)}$) le plus court chemin joignant l'origine (resp. l'extrémité) de $d_s^{(n)}$ à celle de $h_s^{(n)}$, tel que $d_s^{(n)}$ soit homotope, à extrémités fixes, à $\beta_s^{(n)} * h_s^{(n)} * [\delta_s^{(n)}]^{-1}$. Admettons provisoirement le résultat suivant :

Lemme. La croissance de $L_g(\beta_s^{(n)})$ et de $L_g(\delta_s^{(n)})$ est sous-exponentielle, c'est-à-dire $\limsup \frac{1}{n} \log(\ ) = 0$.

Si $\lambda_{i(s)} = 1$, il est évident que $L_g(h_s^{(n)})$ est borné. Si $\lambda_{i(s)} > 1$, alors $\sqrt[n]{L_g(h_s^{(n)})} \to \lambda_{i(s)}$; en effet $\varphi_{i(s)}$ est pseudo-Anosov de coefficient de dilatation $\lambda_{i(s)}$ et, dans ce cas, le résultat est donné par la proposition 19 de l'exposé 9 (à ceci près qu'ici la variété est à bord et qu'il s'agit de classe d'homotopie libre de chemins allant du bord au bord, mais la preuve est la même). Par le lemme, on trouve $\sqrt[n]{L_g(d_s^{(n)})} \to \lambda_{i(s)}$. D'autre part, on a les inégalités suivantes :

$$\sum_s L_g(h_s^{(n)}) \leq \sum_s L_g(c_s^{(n)}) = \ell_g(\varphi^n(\alpha)) \leq \sum_s L_g(d_s^{(n)}) .$$

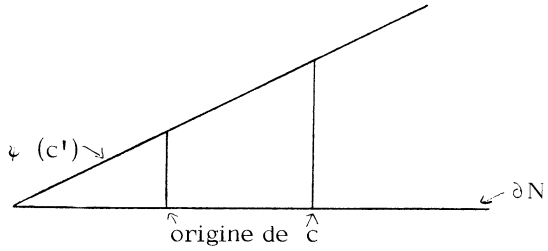
Vu la croissance de chaque terme, on trouve que $\sqrt[n]{\ell_g(\varphi^n(\alpha))}$ tend vers $\lambda_{i(1)}$. □

Démonstration du lemme. On sait, d'après Lickorish, que $\varphi \mid M_{i(s)}$ est isotope rel le bord à un composé de twists de Dehn le long de courbes simples de $M_{i(s)}$ (voir exposé 15). On considère alors la situation d'une variété à bord N, munie d'une métrique hyperbolique g, d'un twist ψ d'un tour le long d'une géodésique α de N. Soit c la géodésique minimisante d'une classe non triviale de $\pi_1(N, \partial N)$; soit h la géodésique minimisante dans la classe de $\psi(c)$. Dans l'homotopie de $\psi(c)$ à h, chaque extrémité de l'arc se déplace sur le bord : on a sur ∂N des arcs géodésiques de ∂N, β et δ, tels que $\psi(c)$ soit homotope à $\beta * h * \delta^{-1}$, à extrémités fixes. Disons que chaque composante de ∂N a une longueur égale à 1. Alors, le lemme résulte de l'affirmation suivante.

Affirmation. $L_g(\beta)$, $L_g(\delta) \leq 1$.

Noter que si α est isotope à une composante du bord, il n'y a rien à démontrer car $h = c$ et le déplacement de chaque extrémité de $\psi(c)$ au cours de son isotopie à c est exactement d'un tour. Ceci étant, l'intersection de h et de c est minimale dans la classe d'homotopie libre de h. Soit c' un arc parallèle à c ; si $\mathrm{card}(\psi(c') \cap c) = \mathrm{card}(h \cap c)$, alors $\psi(c')$ et h sont isotopes par une isotopie qui laisse c invariant (propositions 12 de l'exposé 3) ; dans ce cas, le déplacement des extrémités durant cette isotopie est de moins d'un tour.

D'après l'appendice de l'exposé 4, $\mathrm{card}(\psi(c') \cap c)$ ne peut être diminué tant qu'on laisse fixes les extrémités de $\psi(c')$. En revanche, en déplaçant l'origine de $\psi(c')$ par dessus celle de c, on diminue éventuellement $\mathrm{card}(\psi(c') \cap c)$; on dit qu'on fait fuir un point d'intersection par le bord. Pour déplacer l'origine de $\psi(c')$ de plus d'un tour, on doit avoir une immersion d'un triangle dans N, comme l'indique la figure ci-dessous à la source de l'immersion. De là, on déduit que α est isotope à une composante du bord, ce qu'on a exclu au début. Puisque le déplacement de l'origine de c à celle de c' est arbitrairement petit, on voit finalement que celui de l'origine de $\psi(c)$ à h est de moins d'un tour. □



RÉFÉRENCES

[1] C.J. EARLE - J. EELLS, A fiber bundle description of Teichmüller theory, J. Diff. Geom. 3 (1969), p. 19-43.

[2] W. FENCHEL, Bemaerkninger om endelige grupper af afbildningsklasser, Mat. Tidsskr. B (1950), p. 90-95.

[3] A. GRAMAIN, Sur le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte, Ann. Scient. E.N.S. 6 (1973), p. 53-66.

[4] W.J. HARVEY (edited by), Discrete groups and automorphic functions, Academic Press, 1977.

[5] J. NIELSEN, Abbildungsklassen endlicher ordnung, Acta Math. 75 (1943), p. 23-115.

[6] P. SMITH, A theorem on fixed points for periodic transformations, Ann. of Math. 35 (1934), p. 572-578.