Astérisque

V. POÉNARU

Classification des difféomorphismes des surfaces

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 159-180
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__159_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXPOSÉ 9

CLASSIFICATION DES DIFFÉOMORPHISMES DES SURFACES

par V. POÉNARU

§ I. - Préliminaires

§ II. - Le cas "réductible" : $\beta\ U(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$

§ III. - Feuilletages mesurés arationnels

§ IV. - Le cas II : $(\mathfrak{F}, \mu)$ est arationnel et $\lambda = 1$

§ V. - Le cas III : $(\mathfrak{F}, \mu)$ est arationnel et $\lambda \neq 1$

§ VI. - Quelques propriétés des difféomorphismes pseudo-Anosov

§ I. - PRÉLIMINAIRES

Soit M une surface fermée, orientable de genre $g > 1$. Son espace de Teichmüller compactifié $\overline{\mathfrak{T}M}$ est homéomorphe à D^{6g-6}. Les actions naturelles de $\pi_0(\mathrm{Diff}\,(M))$ sur $\mathfrak{T}M$ et sur $P\mathfrak{M}\mathfrak{F}(M)$ se recollent en une action continue sur

$$\overline{\mathfrak{T}M} = \mathfrak{T}M \cup P\mathfrak{M}\mathfrak{F}(M) \ .$$

Soient $\varphi \in \mathrm{Diff}\,(M)$ et $[\varphi]$ sa classe d'isotopie. Par le théorème du point fixe de Brouwer, il existe $x \in \overline{\mathfrak{T}M}$, tel que $[\varphi] \cdot x = x$.

Si x appartient à $\mathfrak{T}M$, alors x provient d'une métrique hyperbolique sur M, bien déterminée à isotopie près, et φ est isotope à une isométrie de cette métrique. D'après le théorème 18, exposé 3, φ est isotope à un difféomorphisme d'ordre fini.

Si x appartient au bord de $\overline{\mathcal{F}M}$, $x \in P\mathfrak{M}\mathcal{F}(M)$; l'égalité $[\varphi] \cdot x = x$ veut dire qu'il existe un feuilletage mesuré $(\mathcal{F},\mu)$, dont la classe de mesure dans l'espace projectif $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}})$ est préservée par φ (notation : $\mathcal{F}$ désigne le feuilletage et μ une mesure transverse invariante de $\mathcal{F}$). En d'autres termes, il existe un feuilletage mesuré $(\mathcal{F},\mu)$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}_+$, tels que

$$(*) \qquad \varphi(\mathcal{F},\mu) \sim_m (\mathcal{F},\lambda\mu) = \lambda(\mathcal{F},\mu) .$$

<u>Notations</u>. 1) Ici $\sim_m$ est la relation d'équivalence "de mesure" entre feuilletages mesurés. Je rappelle que :

$$(\mathcal{F}_1,\mu_1) \sim_m (\mathcal{F}_2,\mu_2)$$

veut dire que les deux feuilletages mesurés définissent la même fonctionnelle dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ (équivalence au sens de Schwartz). D'après l'exposé 6, cette relation est la même que l'équivalence au sens de Whitehead définie en II. 1 de l'exposé 5.

2) $\varphi(\mathcal{F},\mu)$ désigne le feuilletage image par φ de $\mathcal{F}$, équipé de la mesure image directe : la mesure d'un arc transversal α est la μ-mesure de $\varphi^{-1}(\alpha)$.

Pour aller plus loin, je définis un feuilletage mesuré partiel de M comme la donnée d'une sous-variété compacte de dimension 2, $N \subset M$, et d'un feuilletage mesuré $(\mathcal{F}',\mu')$ de support N, vérifiant ce qui suit :

(i) chaque composante connexe de ∂N est un cycle de feuilles ;

(ii) si Γ est une composante de ∂N qui borde un disque dans $M - \operatorname{int} N$, alors le nombre de séparatrices qui partent de $\operatorname{sing}\mathcal{F}' \cap \Gamma$, rentrant dans N, est au moins 2.

Si l'on part d'un feuilletage mesuré $(\mathcal{F},\mu)$ de M, on peut "<u>décoller</u>" $\mathcal{F}$ le long de toutes les feuilles qui relient les singularités et faire <u>éclater</u> toutes les singularités qui ne sont pas touchées par ces liaisons. On obtient ainsi un feuilletage mesuré partiel $U(\mathcal{F},\mu)$ (appelé le "unglue" de $(\mathcal{F},\mu)$), dont toutes les singularités sont sur le bord. On peut vérifier sans peine les faits suivants :

a) $i_*(\mathcal{F},\mu) = i_*(U(\mathcal{F},\mu)) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$;

b) si $i_*(\mathcal{F}_1,\mu_1) = i_*(\mathcal{F}_2,\mu_2)$, c'est-à-dire si $(\mathcal{F}_1,\mu_1) \sim_m (\mathcal{F}_2,\mu_2)$, alors $U(\mathcal{F}_1,\mu_1)$ et $U(\mathcal{F}_2,\mu_2)$ sont isotopes ;

c) on note $\beta U(\mathcal{F},\mu)$ la réunion des composantes du bord du support de $U(\mathcal{F},\mu)$ qui ne bordent pas de disque dans M ; comme élément de $\mathcal{S}'(M)$, $\beta U(\mathcal{F},\mu)$ ne dépend

que de la classe de mesure de $(\mathfrak{F},\mu)$.

En revenant à la relation $(*)$ donnée par le point fixe considéré, on a trois possibilités.

I) $\beta U(\mathfrak{F},\mu) \neq \emptyset$,

II) $\beta U(\mathfrak{F},\mu) = \emptyset$ et $\lambda = 1$,

III) $\beta U(\mathfrak{F},\mu) = \emptyset$ et $\lambda \neq 1$.

Dans la suite de cet exposé, on va analyser ces trois cas. On montrera que I) est le cas "réductible", que II) est de nouveau un cas "d'ordre fini" , tandis que III) est le cas "pseudo-Anosov" (voir l'exposé 1). Le théorème de classification est énoncé à la fin du paragraphe V. Dans cet exposé, les surfaces sont toujours orientables, mais les difféomorphismes ne préservent pas nécessairement l'orientation, ce qui complique certains arguments, en particulier le lemme 9 .

§ II. - LE CAS "RÉDUCTIBLE" : $\beta U(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$

La relation $(*)$ implique que $U(\varphi(\mathfrak{F},\mu))$ et $U(\mathfrak{F},\lambda\mu)$ sont isotopes. Donc, dans $\mathcal{S}'$, on a l'égalité :

$$\beta\, U(\varphi(\mathfrak{F},\mu)) = \beta\, U(\mathfrak{F},\lambda\mu) \quad .$$

D'autre part,

$$\beta\, U(\varphi(\mathfrak{F},\mu)) = \varphi(\beta U(\mathfrak{F},\mu))$$

$$\beta\, U(\mathfrak{F},\lambda\mu) = \beta\, U(\mathfrak{F},\mu) \quad .$$

Finalement, l'élément $\beta U(\mathfrak{F},\mu)$ de $\mathcal{S}'$ est invariant par $[\varphi]$, les diverses composantes pouvant être permutées.

Dans ces conditions, φ est isotope à un difféomorphisme φ' qui laisse invariante la sous-variété $\beta U(\mathfrak{F},\mu)$. En coupant M le long de cette famille de courbes, on obtient une variété à bord W , peut-être non connexe sur laquelle φ' induit un difféomorphisme ψ . On recommence une étude analogue pour ψ en appliquant la théorie de Thurston pour les surfaces à bord, qui est esquissée dans l'exposé 11. Noter que W est plus simple que M au sens où chaque composante de W a soit un genre plus petit que celui de M , soit le même genre et une caractéristique d'Euler plus petite en valeur absolue. Donc, en un nombre fini d'étapes, on peut donner la structure de φ à isotopie près.

§ III. - FEUILLETAGES MESURÉS ARATIONNELS

Par définition, un feuilletage mesuré $(\mathfrak{F},\mu)$ est arationnel si $\beta U(\mathfrak{F},\mu)$ est vide.

Lemme 1. 1° Si $(\mathfrak{F},\mu)$ est un feuilletage mesuré arationnel, l'ensemble compact invariant X, formé de toutes les singularités et des feuilles joignant deux singularités, ne possède que des composantes connexes contractiles.

2° $\mathfrak{F}$ ne possède pas de feuille fermée lisse.

Démonstration. La variété $\overline{M - \mathrm{Supp}\, U(\mathfrak{F},\mu)}$ collapse sur X, d'où 1). Supposons que Γ soit une feuille lisse de $(\mathfrak{F},\mu)$; en se fixant l'un des côtés de Γ dans M et en appliquant le lemme de stabilité de l'exposé 5, on peut trouver un cylindre maximal $\Phi : \Gamma \times [0,1] \to M$ tel que :

1) $\Phi(\Gamma \times \{0\}) = \Gamma$;

2) $\Phi(\Gamma \times [0,1[)$ soit un plongement partant du côté choisi de Γ.

Le genre étant > 1, si ce cylindre est maximal, alors $\Phi(\Gamma \times \{1\}) \subset X$. Vu le point 1), l'ensemble invariant $\Phi(\Gamma \times \{1\})$ est collapsible et on peut montrer sans difficulté que $\Phi(\Gamma \times [0,1])$ est un disque D^2 de spine $\Phi(\Gamma \times \{1\})$. Comme il n'existe pas de feuilletage mesuré sur D^2, tel que ∂D^2 soit une feuille, l'existence de Γ est absurde.

Ainsi, chaque demi-feuille de $\mathfrak{F}$, qui ne va pas à une singularité, est infinie. □

Remarque. Sur le tore T^2, d'après la définition, tout feuilletage est arationnel, tandis qu'un feuilletage qui satisfait aux conclusions du lemme 1 est conjugué à un feuilletage linéaire de pente irrationnelle.

Corollaire 2. Dans les conditions du lemme précédent, il existe $(\mathfrak{F}',\mu')$ équivalent à $(\mathfrak{F},\mu)$, ne possédant aucune liaison entre singularités. Ce feuilletage est unique à isotopie près dans sa classe de mesure.

Démonstration. On obtient $(\mathfrak{F}',\mu')$ en collapsant chaque composante de l'ensemble $\mathfrak{F}$-invariant X décrit ci-dessus. Le résultat du collapsing reste inchangé à isotopie près si on fait un glissement de Whitehead sur X ; l'unicité en découle. □

Convention. Dans la suite, on représentera systématiquement une classe de feuilletages arationnels par le modèle canonique obtenu ci-dessus.

Lemme 3. Si $(\mathfrak{F},\mu)$ est le modèle canonique d'une classe de feuilletages arationnels et si φ est un difféomorphisme tel que $\varphi(\mathfrak{F},\mu) \underset{m}{\sim} \lambda(\mathfrak{F},\mu)$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors φ est isotope à φ' tel que :

$$\varphi'(\mathfrak{F},\mu) = (\mathfrak{F},\lambda\mu) \ ,$$

c'est-à-dire : φ' envoie feuilles dans feuilles et, pour tout arc α transverse à $\mathfrak{F}$, on a :

$$\mu(\varphi'^{-1}(\alpha)) = \lambda\mu(\alpha) \ .$$

Attention : Si $\lambda > 1$, ceci veut dire que φ contracte les distances transversales (avec un facteur $\frac{1}{\lambda}$) tandis que si $\lambda < 1$, ceci veut dire que φ dilate les distances transversales (avec un facteur $\frac{1}{\lambda}$).

Démonstration. Les feuilletages $\varphi(\mathfrak{F},\mu)$ et $(\mathfrak{F},\lambda\mu)$ sont deux modèles canoniques de la même chose ; ils sont donc isotopes. En modifiant φ par cette isotopie, on obtient le φ' désiré. □

Définition. Soit $(\mathfrak{F},\mu)$ un feuilletage mesuré quelconque. Un $(\mathfrak{F},\mu)$-rectangle (ou, plus brièvement, un $\mathfrak{F}$-rectangle) est l'image d'une immersion $\varphi : [0,1] \times [0,1] \to M$ avec les propriétés suivantes :

a) $\varphi \mid]0,1[\times]0,1[$ est un plongement C^∞ ;

b) $\varphi(\{t\} \times [0,1])$ est contenue dans une réunion finie de feuilles et de singularités ; si $t \in]0,1[$, cette image est contenue dans une seule feuille ;

c) $\varphi([0,1] \times \{0\})$ et $\varphi([0,1] \times \{1\})$ sont transverses aux feuilles.

Pour un $\mathfrak{F}$-rectangle R, je considère la décomposition $\partial R = \partial_{\mathfrak{F}} R \cup \partial_{\tau} R$, où, par définition,

$$\partial_{\mathfrak{F}} R = \varphi(\{0,1\} \times [0,1]) \quad \text{et} \quad \partial_{\tau} R = \varphi([0,1] \times \{0,1\}) \ .$$

Je vais noter par $\partial_{\mathfrak{F}}^0 R$ et $\partial_{\mathfrak{F}}^1 R$ les images respectivement de $\{0\} \times [0,1]$ et de $\{1\} \times [0,1]$; une notation analogue sera utilisée pour $\partial_{\tau} R$. D'autre part, je conviens de noter $\operatorname{int} R = \varphi(]0,1[\times]0,1[)$, qui en général n'est pas l'intérieur de l'image ; il est facile de voir que $\operatorname{int} R$ et ∂R sont disjoints.

Définition. Un bon système de transversales pour $\mathcal{F}$ est un système fini $\tau = \{\tau_i \; ; \; i \in I\}$ d'arcs simples ayant les propriétés suivantes :

a) Chaque arc est transverse à $\mathcal{F}$ et ne peut rencontrer une singularité qu'en l'une de ses extrémités ;

b) Deux arcs ne peuvent se rencontrer qu'en une seule extrémité ; si celle-ci est une singularité, les deux arcs partent dans deux secteurs distincts.

La notation $\partial\tau$ désigne la collection des extrémités de chaque arc.

Remarque. On ne demande pas que chaque arc touche à une singularité.

Lemme 4. Etant donné un feuilletage mesuré $\mathcal{F}$ et un bon système de transversales τ, il existe un système de rectangles $R_1, \ldots, R_N$ avec les propriétés ci-dessous.

1) $\operatorname{int} R_i \cap \operatorname{int} R_j = \emptyset$, pour $i \neq j$.

2) $\partial^{\epsilon}_{\tau} R_i$ est contenu dans un seul arc de τ.

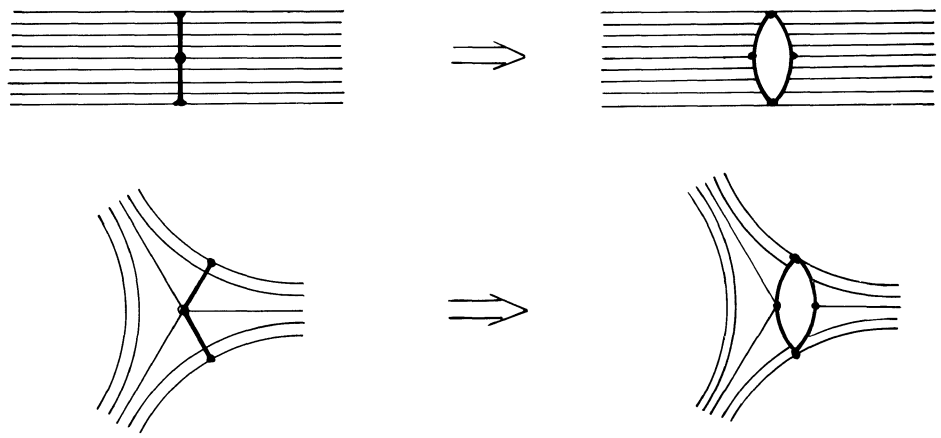
3) Chaque $\partial^{\epsilon}_{\mathcal{F}} R_i$ contient un point de $\operatorname{Sing} \mathcal{F} \cup \partial\tau$; en d'autres termes, chaque rectangle R_i est maximal par rapport à la condition 2).

4) Les deux côtés de chaque arc de τ sont recouverts par des rectangles.

Le système $(R_1, \ldots, R_N)$ est unique.

Remarque. Il est très instructif de prendre une petite transversale à un feuilletage irrationnel de T^2 et de construire les rectangles correspondants.

Démonstration. Coupons la variété comme l'indique la figure 1.



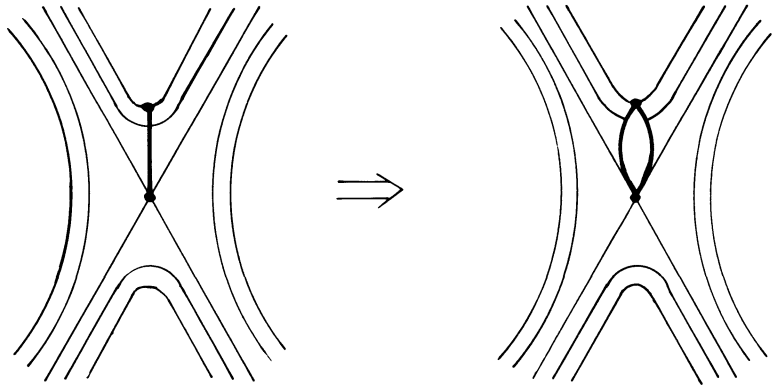


Figure 1

On obtient une variété à bord $\hat{M}$ avec un feuilletage $\mathfrak{F}'$; le bord τ' de $\hat{M}$ est le "dédoublé" de τ . Considérons l'ensemble fini Z de τ' , défini par l'une des conditions suivantes :

1) $x \in \operatorname{Sing} \mathfrak{F}'$;

2) x est un des points provenant d'une extrémité de τ ;

3) la feuille partant de x aboutit à une singularité de $\mathfrak{F}'$ ou à un point qui provient d'une extrémité de τ .

Par le théorème de récurrence de Poincaré (exposé 5) , toute feuille partant d'un point de $\tau' - Z$ retourne dans $\tau' - Z$.

Pour chaque composante α_i de $\tau' - Z$, par le lemme du rectangle maximal (exposé 5) , on peut trouver un rectangle R_i tel que $\partial_\tau^0 R_i = \overline{\alpha_i}$; $\partial_\tau^1 R$ est l'adhérence d'une autre composante de $\tau' - Z$. Quand on les regarde dans M , ces rectangles sont les rectangles cherchés. L'unicité est laissée en exercice. □

<u>Lemme</u> 5. Si, dans les données du lemme 4 , $\mathfrak{F}$ est un feuilletage arationnel, alors $R_1 \cup \ldots \cup R_N = M$.

<u>Démonstration</u>. De toutes façons, la réunion des R_i est un fermé $\mathfrak{F}$-invariant. Si sa frontière n'est pas vide, c'est un fermé $\mathfrak{F}$-invariant formé de cycles de feuilles. Si $\mathfrak{F}$ est arationnel, de tels cycles n'existent pas ; donc la frontière est vide et $M = \cup R_i$. □

<u>Lemme</u> 6. Si $\mathfrak{F}$ est un feuilletage arationnel, chaque demi-feuille L de $\mathfrak{F}$ qui ne va pas à une singularité est dense.

Démonstration. On sait que L est "infinie" (lemme 1). Soient τ un petit arc transverse à $\mathfrak{F}$ et $R_1,\dots,R_N$ le système de rectangles du lemme 4. D'après le lemme précédent, $\bigcup R_i = M$ et, comme L est infinie, elle contient des plaques dans $\bigcup \operatorname{int} R_i$, donc L touche τ. Comme τ est arbitraire, L est dense. □

§ IV. - LE CAS II : $(\mathfrak{F},\mu)$ EST ARATIONNEL ET $\lambda = 1$

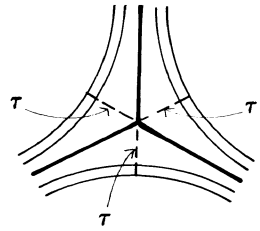
Lemme 7. Si φ est un difféomorphisme et $(\mathfrak{F},\mu)$ un feuilletage arationnel tels que :

$$\varphi(\mathfrak{F},\mu) = (\mathfrak{F},\mu) ,$$

alors φ est isotope à un difféomorphisme d'ordre fini parmi les difféomorphismes qui préservent $(\mathfrak{F},\mu)$.

Démonstration. Au voisinage de chaque singularité, je choisis des arcs transverses, un dans chaque secteur, tous de même longueur par rapport à la mesure μ, comme les arcs en pointillés de la figure 2.

Figure 2



Vu que $\lambda = 1$, on peut choisir ce système d'arcs τ de telle façon qu'après une éventuelle isotopie de φ, à travers des difféomorphismes qui préservent $\mathfrak{F}$, on ait $\varphi(\tau) = \tau$.

Soit $R_1,\dots,R_N$ le système de rectangles associé à τ (lemme 4). Comme $\varphi(\tau) = \tau$ et $\varphi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$, on voit que chaque $\varphi(R_i)$ est encore un $\mathfrak{F}$-rectangle satisfaisant à la condition 2) du lemme 4. Il est facile de voir qu'il existe une permutation π de $(1,\dots,N)$ telle que $\varphi(R_i) = R_{\pi(i)}$. En particulier, φ transforme le graphe $\Gamma = \bigcup_i \partial R_i$ en lui-même. Donc φ permute entre elles les arêtes de Γ. En travaillant sur les cycles de cette permutation, on peut isotoper φ en φ', par des difféomorphismes qui préservent $\mathfrak{F}$, tel que $\varphi' | \Gamma$ soit périodique et que $\varphi'(R_i) = R_{\pi(i)}$.

En travaillant sur les cycles de π, on peut faire une seconde isotopie jusqu'à obtenir un difféomorphisme périodique, à travers des difféomorphismes qui préservent $\mathfrak{F}$. □

Remarque. Un tel difféomorphisme a toujours un point fixe dans $\mathfrak{I}M$.

En effet, si φ est d'ordre fini, φ est une isométrie d'une certaine métrique m (dont la courbure est incontrôlée) ; φ est donc un automorphisme de la structure conforme sous-jacente. Mais, d'après le théorème d'uniformisation cité dans l'exposé 7 , au-dessus de cette structure, il y a une unique métrique hyperbolique qui, par conséquent, est invariante par φ .

§ V. - LE CAS III : $(\mathfrak{F},\mu)$ EST ARATIONNEL ET $\lambda \neq 1$

Je vais supposer maintenant qu'on est dans la situation où $\varphi(\mathfrak{F},\mu) = (\mathfrak{F},\lambda\mu)$ avec $\lambda \neq 1$, où $\mathfrak{F}$ est le modèle canonique d'une classe de feuilletages arationnels. En changeant éventuellement φ en φ^{-1} , on peut supposer $\lambda > 1$.

Lemme 8. Le facteur λ (resp. $\frac{1}{\lambda}$) est un entier algébrique de degré borné par une quantité qui n'est fonction que du genre de la surface.

Démonstration. Au-dessus de M , il y a un revêtement ramifié $\tilde{M}$ dans lequel $(\mathfrak{F},\mu)$ se relève en une 1-forme fermée ω . Si γ est un lacet de $M - \mathrm{Sing}\,\mathfrak{F}$, le long duquel $\mathfrak{F}$ est orientable, alors $\varphi(\gamma)$ a la même propriété ; il s'en suit que φ se relève en un difféomorphisme ψ du revêtement ouvert $\tilde{M}|M - \mathrm{Sing}\,\mathfrak{F}$. Il se prolonge en un difféomorphisme $\tilde{\psi}$ de $\tilde{M}$.

On a $(\tilde{\varphi}^{-1})^*(\omega) = \lambda\omega$. Donc λ est une valeur propre d'un automorphismes de $H^1(\tilde{M}\,;\mathbb{Z})$. Or, le rang de ce groupe de cohomologie est majoré par une quantité qui ne dépend que du genre de M . □

Lemme 9. Dans les conditions ci-dessus, quitte à changer φ par une isotopie qui laisse $\mathfrak{F}$ invariant, on peut trouver un bon système de transversales τ ayant les propriétés suivantes .

1) Dans chaque secteur de singularité, il y a un arc de τ (figure 2) .

2) $\varphi(\tau) \subset \tau$, ce qui signifie que φ envoie chaque arc de τ dans un arc de τ .

3) Si $x \in \partial\tau - \mathrm{Sing}\,\mathfrak{F}$, x appartient alors à la séparatrice d'une singularité ; on note F_x l'arc de feuille joignant x à $\mathrm{Sing}\,\mathfrak{F}$.

4) Chaque séparatrice contient un F_x .

5) $(\cup F_x) \subset \varphi(\cup F_x)$.

Démonstration. Puisque $\lambda > 1$, φ contracte les transversales (voir la définition d'image directe d'une mesure). Quitte à modifier φ par une isotopie qui conserve $\mathfrak{F}$, il est facile de trouver un bon systèmes de transversales τ'' qui vérifie 1) et 2) et qui soit formé d'un arc dans chaque secteur. Soit α'' un arc de τ'' et L une séparatrice issue d'une singularité s ; vu la densité des demi-feuilles, il y a, à partir de s , un premier point d'intersection de L avec α'' . En considérant toutes les séparatrices, on obtient sur α'' un nombre fini de tels points ; on subdivise ainsi α'' et on le tronque au point le plus éloigné. Soit τ' le bon système de transversales obtenu par cette opération sur chacun des arcs de τ'' . Il vérifie 1), 3), 4) .

Le système τ' vérifie aussi 2). Soit $\alpha' \in \tau'$, d'extrémités x et y . On a $\alpha' \subset \alpha''$, $\alpha'' \in \tau''$ et $\varphi(\alpha'') \subset \beta''$ pour un certain $\beta'' \in \tau''$. Supposons, pour le moment, que $\varphi(\alpha')$ est déjà contenu dans $\cup \{\beta' \mid \beta' \in \tau'\}$. Si $\varphi(\alpha')$ n'est pas contenu dans un arc de τ' , il existe une séparatrice L dont le premier point d'intersection avec β'' est un point z entre $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$. Mais $\varphi^{-1}(L)$, avant de couper α'' en $\varphi^{-1}(z)$, coupe α'' en $t \neq \varphi^{-1}(z)$. Donc L coupe β'' en $\varphi(t)$, qui est avant z sur L ; contradiction. Maintenant un raisonnement analogue prouve que $\varphi(\alpha') \subset \cup \{\beta' \mid \beta' \in \tau'\}$, pour tout $\alpha' \in \tau'$, ce qui complète la preuve que τ' vérifie 2).

Soit n le premier entier ≥ 0 , pour lequel φ^{n+1} laisse invariante chaque séparatrice. Soit τ la subdivision de τ' , définie par $\tau' \vee \varphi(\tau') \vee \ldots \vee \varphi^{n}(\tau')$; un arc α de τ est contenu dans un arc de τ' et est limité par deux points consécutifs de la forme $\varphi^{j}(x)$, $\varphi^{j'}(x')$, avec $x, x' \in \tau'$ et $0 \leq j, j' \leq n$. Les propriétés 1), 3), 4) sont évidentes.

Pour 2), supposons que $\varphi(\alpha)$, qui, vu que τ' vérifie 2), est contenu dans un certain β' de τ' , soit subdivisé ; c'est-à-dire qu'entre $\varphi^{j+1}(x)$ et $\varphi^{j'+1}(x')$, il y ait un $\varphi^{j''}(x'')$, avec $x'' \in \partial\tau'$, $j'' \leq n$. J'affirme que $j'' \geq 1$; ceci est vrai car $\varphi(\alpha)$, qui est contenu dans β' , n'est pas subdivisé par un point de $\partial\tau'$. Donc α contient $\varphi^{j''-1}(x'')$; contradiction.

Prouvons 5). Soit $x \in \partial\tau$; si $\varphi^{-1}(x) \in \partial\tau$, la propriété 5) est évidente. Si $\varphi^{-1}(x) \notin \partial\tau$, alors $x \in \partial\tau'$. La feuille L de F_x contient aussi $\varphi^{n+1}(F_x)$; par construction même de τ' , x est le premier point d'intersection de L avec l'arc de τ'' qui passe par x . Donc $\varphi^{n+1}(F_x)$ contient F_x et $\varphi^{-1}(F_x) \subset F_{\varphi^{n}(x)}$. □

Remarque. Soient $x \in \partial\tau - \mathrm{Sing}\,\mathfrak{F}$ et L la feuille contenant F_x . A partir de la singularité s de L , on considère le premier point y qui appartient à τ et pas à F_x . On note F'_x le segment de s à y sur L .

Soit F (resp. F') la réunion des F_x (resp. F'_x) . Vu que $\varphi(\tau) \subset \tau$ et $\varphi(F) \supset F$, on vérifie sans difficulté que $\varphi(F') \supset F'$.

<u>Définition</u>. Soient $(\mathfrak{F}, \mu)$ un feuilletage mesuré arationnel et φ un difféomorphisme tel que $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) = \lambda(\mathfrak{F}, \mu)$ avec $\lambda > 1$. Une <u>pré-partition</u> de Markov pour $(\mathfrak{F}, \varphi)$ est par définition une collection de $\mathfrak{F}$-rectangles $R_1, \ldots, R_m$ telle que :

1) $\operatorname{int} R_i \cap \operatorname{int} R_j = \emptyset$,

2) $\bigcup_i R_i = M$,

3) $\varphi(\bigcup_i \partial_\tau R_i) \subset \bigcup_i \partial_\tau R_i$;

4) $\varphi^{-1}(\bigcup_i \partial_{\mathfrak{F}} R_i) \subset \bigcup_i \partial_{\mathfrak{F}} R_i$.

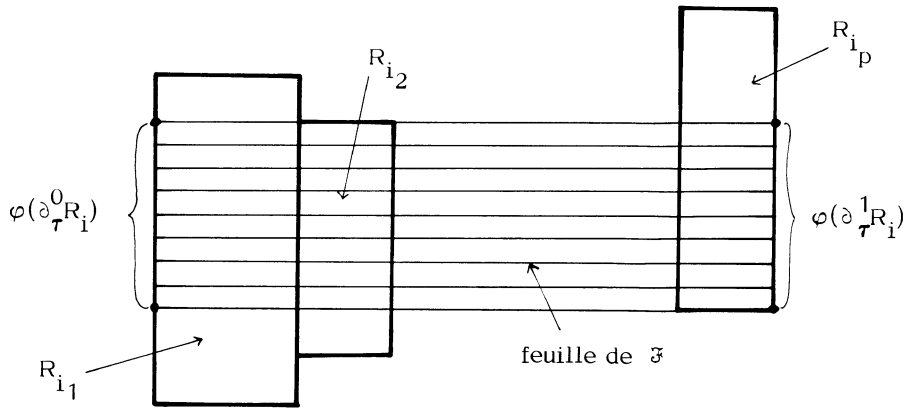
<u>Lemme</u> 10. Une pré-partition de Markov vérifie aussi :

5) pour chaque $i = 1, \ldots, m$ et $\varepsilon = 0, 1$, $\varphi(\partial_\tau^\varepsilon R_i)$ est recouvert du côté de $\varphi(R_i)$ par un seul rectangle : $\varphi(\partial_\tau^\varepsilon R_i) \subset \partial_\tau^{\eta(\varepsilon, i)} R_{j(\varepsilon, i)}$;

6) de même, $\varphi^{-1}(\partial_{\mathfrak{F}}^\varepsilon R_i)$ est recouvert du côté de $\varphi^{-1}(R_i)$ par un seul rectangle.

<u>Démonstration</u>. Si 5) n'est pas vrai, il existe $x \in \operatorname{int} R_i$ tel que $\varphi(x) \in \partial_{\mathfrak{F}} R_j$, ce qui contredit 4) . De même 6) résulte de 3) . □

Ceci veut dire que l'image par φ du rectangle R_i est quelque chose comme dans la figure 3 .



(N.B. : $i_1, i_2, \ldots, i_p$ ne sont pas nécessairement distincts)

Figure 3

Lemme 11. Soient $(\mathfrak{F},\mu)$ le modèle canonique d'une classe de feuilletages arationnels et φ un difféomorphisme tel que $\varphi(\mathfrak{F},\mu) = (\mathfrak{F},\lambda\mu)$ avec $\lambda > 1$. Quitte à faire une isotopie de φ préservant $\mathfrak{F}$, il existe une pré-partition de Markov pour $(\mathfrak{F},\varphi)$.

Démonstration. Soient τ comme dans le lemme 9 et $R'_1,\dots,R'_\ell$ le système de rectangles attaché à τ. On construit le système $R_1,\dots,R_m$ en prenant les fermetures des composantes de $\bigcup_i \operatorname{int} R'_i - F'$, où F' est décrit dans la remarque suivant le lemme 9.

Les conditions 1) et 2) d'une pré-partition de Markov sont clairement vérifiées. Pour la condition 3), on voit que $\tau = \bigcup_i \partial_\tau R'_i = \bigcup_i \partial_\tau R_i$ et on sait que $\varphi(\tau) \subset \tau$. D'autre part, par construction, chaque $\partial^\varepsilon_{\mathfrak{F}} R'_i$ est un arc α d'une feuille joignant un point $x \in \partial\tau$ à un point $y \in \tau$, et ne recoupant pas τ. Si $x \notin \operatorname{Sing}\mathfrak{F}$, α est donc contenu dans F'_x ; si x est une singularité, α est contenu dans F_y ; donc $\partial^\varepsilon_{\mathfrak{F}} R'_i \subset F'$. La subdivision garantit que F' est recouvert par la réunion des $\partial_{\mathfrak{F}} R_i$. On a remarqué que $\varphi^{-1}(F') \subset F'$; donc la condition 4) est vérifiée. □

Dans le reste de l'exposé, on travaillera avec une pré-partition de Markov $R_1,\dots,R_m$ adaptée au feuilletage mesuré $(\mathfrak{F},\mu)$ et au difféomorphisme φ. Notons x_i la μ-largeur du rectangle R_i et par a_{ij} le nombre de fois que $\varphi(\operatorname{int} R_i)$ traverse $\operatorname{int} R_j$ (i.e. nombre de composantes de l'intersection). Vu que φ^{-1} dilate les distances transverses avec un facteur λ et que a_{ij} est, aussi, égal au nombre de fois que $\varphi^{-1}(\operatorname{int} R_j)$ traverse $\operatorname{int} R_i$, on trouve :

$$\lambda x_j = \sum_i x_i a_{ij} .$$

Autrement dit, le vecteur colonne x_i est vecteur propre, de valeur propre λ, pour la matrice transposée de $A = (a_{ij})$.

Lemme 12. Il existe des nombres $\xi > 0$ et $y_1,\dots,y_m > 0$ tels que

$$y_i = \xi \sum_j a_{ij} y_j .$$

Autrement dit, A admet une valeur propre $\xi^{-1} > 0$, avec un vecteur propre dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

Démonstration. Vu que $a_{ij} \geq 0$ et que, pour tout j, il existe un i tel que $a_{ij} > 0$, A opère projectivement sur le simplexe fondamental. Le théorème du point fixe de Brouwer implique alors que A a une valeur propre > 0 avec un vecteur propre $y_1 \geq 0, \dots, y_n \geq 0$, avec $\Sigma y_i > 0$. Il s'agit de montrer que, pour tout i, y_i est

non nul.

Disons, pour fixer les idées, que $y_1 = y_2 = \dots = y_\ell = 0$ et que $y_{\ell+1} > 0, \dots, y_n > 0$. Il en résulte que, pour $i \leq \ell$, on a :

$$a_{ij} > 0 \implies j \leq \ell .$$

Autrement dit, l'ensemble $J = \bigcup_{i=1}^{\ell} R_i$ est invariant par φ et n'est pas dense. Pour montrer que ceci est contradictoire, on peut faire les remarques suivantes :

1° D'abord, si $N > 0$ est un entier, alors $R_1, \dots, R_m$ est une pré-partition de Markov pour φ^N. Ainsi, sans perte de généralité, on peut se réduire au cas où φ laisse fixe l'ensemble des secteurs des points singuliers (en particulier laisse fixe chaque singularité).

2° Comme $\varphi(J) \subset J$ et comme chaque segment de τ est contracté par φ vers son point singulier, il existe parmi les boites $R_1, \dots, R_\ell$, une boite, disons R_1, qui soit dans la configuration de la figure 4 .

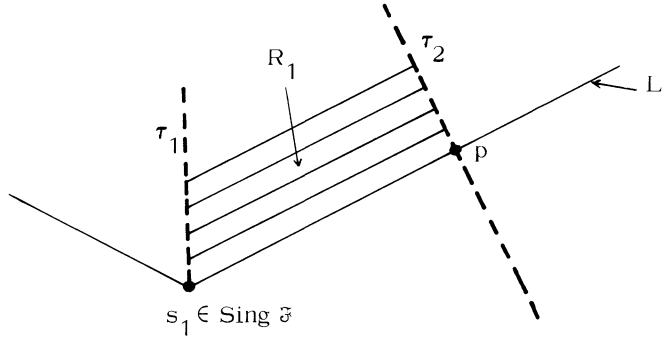


Figure 4

3° Puisque τ_2 est contracté par φ vers sa singularité, les points $\varphi^n(p)$ forment un ensemble infini. D'autre part, ils appartiennent tous à la même feuille L qui est φ-invariante. Donc la suite converge vers l'infini dans la topologie de la feuille. Si F désigne le segment de s_1 à p sur L, on a :

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^n(F) .$$

4° La feuille L étant dense dans M, l'égalité précédente implique que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^n(R_1)$ est dense dans M, tandis que, par ailleurs, cette réunion est contenue dans J qui

n'est pas dense ; contradiction. □

Construction d'un feuilletage mesuré $\mathcal{F}'$.

Je vais construire un feuilletage mesuré $\mathcal{F}'$ ayant les mêmes singularités que $\mathcal{F}$ et transversal à $\mathcal{F}$ en dehors de ces points, avec les propriétés suivantes :

A) Chaque segment de τ est contenu dans une feuille de $\mathcal{F}'$ et chaque rectangle R_i est feuilleté par $\mathcal{F}'$, comme dans la figure 5 .

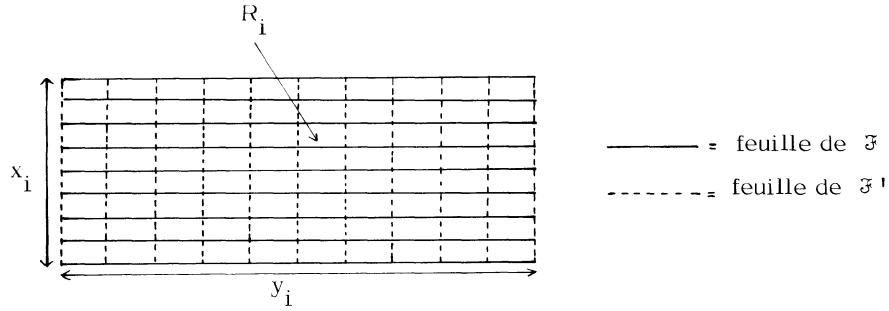


Figure 5

B) La $\mathcal{F}'$-largeur de R_i est le y_i du lemme 12 .

C) Soit $A_0, A_1, \ldots, A_k$ la suite des points de τ se trouvant sur $\partial^0_{\mathcal{F}} R_i$. Les segments $[A_1, A_2], \ldots, [A_{k-2}, A_{k-1}]$ sont tous du type $\partial^{\varepsilon}_{\mathcal{F}} R_j$; donc leur $\mathcal{F}'$-largeur est prescrite par la condition B) . Soit u la $\mathcal{F}'$-largeur de $[A_0, A_1]$; on détermine u de la façon suivante : si q est un entier assez grand, $\varphi^q(A_0)$ et $\varphi^q(A_1)$ n'appartiennent pas à $\partial\tau$ - Sing $\mathcal{F}$; alors $\varphi^q([A_0, A_1])$ est une somme de segments (plaques), contenus dans une réunion finie de feuilles et singularités, chacun traversant un R_j de part en part. On pose alors :

$$u = \xi^q \times (\text{somme des } \mathcal{F}'\text{-largeurs de ces segments}) .$$

On opère de même pour $[A_{k-1}, A_k]$, ainsi que pour les intervalles de $\partial^1_{\mathcal{F}} R_i$. Le lemme ci-dessous indique que tous ces choix sont consistants.

Lemme 13. La $\mathcal{F}'$-largeur de $[A_0, A_k]$ est la somme des $\mathcal{F}'$-largeurs des $[A_j, A_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, k-1$.

Démonstration . Pour fixer les idées, disons que $\partial^0_{\mathcal{F}} R_i$ s'écrit : $[A_0, A_1] \cup [A_1, A_2] \cup [A_2, A_3]$ où $[A_1, A_2]$ est une plaque de R_1 et où $[A_2, A_3]$ est une plaque de R_2 ; disons aussi que $\varphi([A_0, A_1])$ est la somme d'une plaque de

R_3 et d'une plaque de R_4 . Il s'agit de prouver :

$$y_i = \xi y_3 + \xi y_4 + y_1 + y_2 \ .$$

Posons $a_{ij}^{(q)} = \text{card}\, \pi_0(\varphi^q(\text{int } R_i) \cap \text{int } R_j)$

$$a_{ij}^q = \text{card}\, \pi_0(\varphi^q(\partial_{\mathfrak{F}}^0 R_i) \cap R_j) \ .$$

On remarque que $a_{ij}^{(q)}$ est le coefficient (i,j) de la matrice A^q ; d'autre part, l'entier $\delta_{ij}^q = a_{ij}^q - a_{ij}^{(q)}$ est compris entre 0 et 4 . En effet, $\varphi^q(\partial_{\mathfrak{F}}^0 R_i) \cap R_j$ peut contenir deux arcs de $\partial_{\mathfrak{F}} R_j$ ainsi que les deux images des extrémités de $\partial_{\mathfrak{F}}^0 R_j$, en plus des intersections des intérieurs.

Enfin, si q est assez grand pour que $\varphi^q(\partial\tau) \cap \partial\tau = \emptyset$, on a l'égalité donnée par la géométrie :

$$a_{ij}^q = a_{3j}^{q-1} + a_{4j}^{q-1} + a_{1j}^q + a_{2j}^q \ .$$

Donc : $\sum_j [\, a_{ij}^{(q)} - a_{3j}^{(q-1)} - a_{4j}^{(q-1)} - a_{1j}^{(q)} - a_{2j}^{(q)} \,]\, y_j =$

$$= \sum_j [\, \delta_{3j}^{q-1} + \delta_{4j}^{q-1} + \delta_{1j}^q + \delta_{2j}^q - \delta_{ij}^q \,]\, y_j \ .$$

Le premier membre est égal à $[\, y_i - \xi y_3 - \xi y_4 - y_1 - y_2 \,] / \xi^q$; quant au second membre, il ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsque q varie. Cela impose au numérateur ci-dessus d'être nul. □

On munit chaque rectangle R_i d'un système de coordonnées X^i , Y^i tel que :

$$R_i = \{0 \leq X^i \leq x_i \ , \ 0 \leq Y^i \leq y_i\} \ ,$$

et que, pour chaque segment $[A_j, A_{j+1}]$ de $\partial_{\mathfrak{F}} R_i$, la différence $Y^i(A_{j+1}) - Y^i(A_j)$ soit la largeur prescrite dans la condition C) . On peut alors interpréter les rectangles comme étant un atlas qui définit le feuilletage $(\mathfrak{F}', \mu')$, dont les plaques sont Y = constante et dont la mesure transverse est $\mu' = |dY|$.

<u>Construction d'un "difféomorphisme"</u> .

Je vais construire un "difféomorphisme" φ' , isotope à φ , tel que $\varphi'(\mathfrak{F}, \mu) = (\mathfrak{F}, \lambda\mu)$ et $\varphi'(\mathfrak{F}', \mu') = (\mathfrak{F}', \xi\mu')$. En fait, φ' sera un difféomorphisme sur le complémentaire des singularités, mais ne pourra pas être C^1 aux singularités (voir plus loin la définition d'un "difféomorphisme <u>pseudo-Anosov</u>").

On définit φ' par les conditions suivantes :

α) $\varphi'(R_i) = \varphi(R_i)$;

β) $\varphi'(X^i = c) = \varphi(X^i = c)$;

γ) Soit V une composante de $R_i \cap \varphi^{-1}(R_j)$; alors $\varphi'(V \cap (Y^i = \text{const.})) \subset (Y^j = \text{const.})$;

δ) Pour $p, q \in V$, on a :

$$\xi \, | Y^j(\varphi'(p)) - Y^j(\varphi'(q)) | = | Y^i(p) - Y^i(q) | .$$

<u>Lemme</u> 14. On a $\xi = \frac{1}{\lambda}$.

<u>Démonstration</u>. Une fois $(\mathcal{F}, \mu)$ et $(\mathcal{F}', \mu')$ donnés, transverses l'un à l'autre, on a une mesure $\mathfrak{m}$ sur M donné localement par le produit de μ et μ' . Manifestement

$$\varphi_* \mathfrak{m} = \lambda \xi \mathfrak{m} ,$$

et, comme M est compact, $\mathfrak{m}$ est de masse totale finie et l'égalité ci-dessus n'est possible que si $\lambda \xi = 1$. □

<u>Remarques</u>.

1) La mesure $\mathfrak{m}$ est donc φ'-invariante. On peut montrer que $(\mathfrak{m}, \varphi')$ est un processus de Bernoulli. En particulier, $(\mathfrak{m}, \varphi')$ est ergodique (voir § VI de l'exposé 10).

2) On remarquera le contraste entre le fait qu'il n'existe pas d'espace compact X , muni d'une mesure $\mathfrak{m}$ et d'un homéomorphisme ψ tel que $\psi_* \mathfrak{m} = \lambda \mathfrak{m}$, $\lambda \neq 1$, et le fait qu'il existe une variété compacte, munie d'un feuilletage mesuré $(\mathcal{F}, \mu)$ et d'un difféomorphisme $\varphi : M \to M$ tel que $\varphi(\mathcal{F}, \mu) = (\mathcal{F}, \lambda \mu)$, $\lambda \neq 1$.

Au niveau de "l'espace non-commutatif" qu'est l'ensemble des feuilles de $\mathcal{F}$, muni de μ , ceci est justement un "homéomorphisme" comme ci-dessus. Une telle situation "paradoxale" n'arrive que pour un spectre "discret" de valeurs λ satisfaisant à certaines conditions "arithmétiques" .

"<u>Difféomorphisme</u>" <u>pseudo-Anosov</u>.

Par définition, un "difféomorphisme" $\varphi : M \to M$ est pseudo-Anosov, s'il existe deux feuilletages mesurés invariants, mutuellement transverses, $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ et $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$ et un $\lambda > 1$, tels que :

$$\varphi(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \frac{1}{\lambda} \mu^s)$$
$$\varphi(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda \mu^u) .$$

On appelle $\mathfrak{F}^s$ (resp. $\mathfrak{F}^u$) le feuilletage stable (resp. instable) ; le difféomorphisme est contractant sur les feuilles du feuilletage stable, où les longueurs sont mesurés par μ^u.

Du point de vue de la "lissité", un "difféomorphisme" pseudo-Anosov est un vrai difféomorphisme sur $M - \operatorname{Sing} \mathfrak{F}$; mais il n'est jamais C^1 aux singularités. Bien entendu, aux singularités, il y a, topologiquement parlant, des modèles locaux canoniques du pseudo-Anosov, provenant des différentielles quadratiques.

On vient de prouver le lemme ci-dessous.

Lemme 15. Si le difféomorphisme φ vérifie les conditions du cas III, § I, c'est-à-dire s'il existe un feuilletage mesuré arationnel $(\mathfrak{F}, \mu)$ et $\lambda \neq 1$ tel que $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) \underset{m}{\sim} (\mathfrak{F}, \lambda\mu)$, alors φ est isotope à un "difféomorphisme" pseudo-Anosov.

Remarque. L'hypothèse que $\mathfrak{F}$ est arationnel est essentielle. Il résulte de l'existence de difféomorphisme pseudo-Anosov sur une variété à bord, que sur la variété fermée M (de genre > 1) il existe un feuilletage mesuré $(\mathfrak{F}, \mu)$ ayant un cycle de feuilles et un difféomorphisme φ vérifiant $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) \underset{m}{\sim} (\mathfrak{F}, \lambda\mu)$ avec $\lambda \neq 1$. Comme on le verra, ce φ n'est pas isotope à un difféomorphisme pseudo-Anosov de M.

Théorème. Soit φ un difféomorphisme d'une surface fermée de genre > 1. A isotopie près, φ est dans l'une des situations suivantes :

1) Isométrie pour une structure hyperbolique,

2) "Réductible" (c'est-à-dire que φ conserve un système de courbes simples mutuellement disjointes et non homotopes à zéro),

3) Pseudo-Anosov.

Les situations 1) et 3) (resp. 2) et 3)) sont mutuellement exclusives.

Une fois qu'on aura esquissé la théorie à bord non vide (exposé 11), on pourra écrire que φ est isotope à φ', pour lequel il existe une décomposition $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n$ en surfaces à bord d'intérieurs disjoints, telle que $\varphi'(M_i) = M_i$ et que $\varphi' | M_i$ soit isotope (comme difféomorphisme de M_i, le bord étant libre) à une isométrie hyperbolique ou à un difféomorphisme pseudo-Anosov. Bien entendu, cette décomposition ne peut rendre compte du "twist" de Dehn que fait φ' dans un voisinage collier des courbes le long desquelles sont recollées les M_i.

Démonstration. Le théorème de classification est complètement démontré ; il ne reste à prouver que les exclusions.

L'égalité $\varphi(\mathfrak{F},\mu) = (\mathfrak{F},\lambda\mu)$ avec $\lambda \neq 1$ interdit à la classe d'isotopie de φ d'être périodique ; d'où l'incompatibilité 1) - 3) .

Supposons que φ conserve un élément de $\mathcal{A}'$; quitte à remplacer φ par une de ces puissances, on peut supposer que φ, pseudo-Anosov, conserve la classe d'isotopie d'une courbe γ . On a donc :

$$I(\mathfrak{F}^S,\mu^S ; [\gamma]) = \lambda I(\mathfrak{F}^S,\mu^S ; [\varphi(\gamma)]) = \lambda I(\mathfrak{F}^S,\mu^S ; [\gamma]) .$$

On en déduit que $I(\mathfrak{F}^S,\mu^S ; [\gamma]) = 0$. D'après l'exposé 5 , il y a un feuilletage équivalent à $\mathfrak{F}^S$, possédant un cycle (non trivial) de feuilles. Vu que $\mathfrak{F}^S$ est arationnel, ceci est une contradiction. □

Remarque. Les relations d'incompatibilité sont en fait conséquence de la dynamique d'un pseudo-Anosov sur l'espace de Teichmüller complété : il n'y a que deux points fixes représentés par les feuilletages stable et instable, qui sont respectivement attracteur et répulseur (voir exposé 12) .

§ VI. - QUELQUES PROPRIÉTÉS DES DIFFÉOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV

Lemme 16. Les feuilletages stable et instable d'un pseudo-Anosov n'ont pas de liaisons entre les singularités ; ce sont donc des modèles canoniques pour des classes de feuilletages arationnels.

Démonstration. Considérant le cas où le difféomorphisme laisse fixes les singularités, une telle liaison devrait être contractée ou dilatée, ce qui est impossible. □

Proposition 17. Si U est un ouvert non vide, invariant par un difféomorphisme pseudo-Anosov, alors U est dense.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où le difféomorphisme φ laisse fixes les singularités des feuilletages stable et instable . Soit F une séparatrice du feuilletage stable, issue d'une singularité s . Puisque F est dense dans M , il existe un segment J de F contenu dans U . Soient a et b les extrémités de J ; les suites $\varphi^n(a)$ et $\varphi^n(b)$ convergent vers s . Soit T une plaque de $\mathfrak{F}^u$ contenue dans U et coupant J

en un point ; $\varphi^n(T)$ va s'allonger du point de vue de la mesure transverse du feuilletage stable et s'approcher des deux séparatrices F' et F'' du feuilletage instable, qui limitent les secteurs adjacents à F (figure 6) . Précisément $F' \cup F''$ est contenu dans l'adhérence de $\bigcup_{n \geq 0} \varphi^n(T)$. Donc $\overline{U}$ contient une séparatrice de $\mathfrak{F}^u$ toute entière. Une séparatrice est dense, donc $\overline{U}$ est dense. □

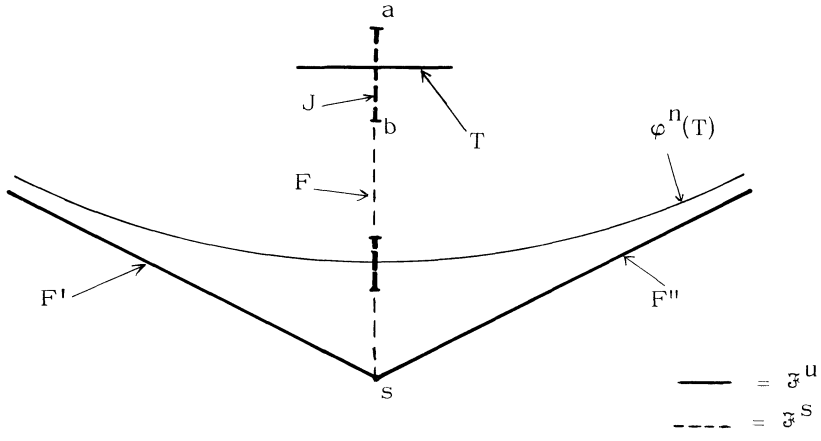


Figure 6

<u>Corollaire</u>. Un difféomorphisme pseudo-Anosov est topologiquement transitif (il existe une orbite dense).

<u>Démonstration</u>. Soit $\{U_i\}$ une base dénombrable d'ouverts. L'intersection $\bigcap_i \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(U_i) \right)$ est non vide (Baire). Tout point de l'intersection a une orbite dense. □

<u>Proposition</u> 18. Les points périodiques d'un difféomorphisme pseudo-Anosov sont denses.

<u>Démonstration</u> (c'est la même que celle d'Anosov pour les difféomorphismes du même nom). Les points singuliers sont périodiques. Soient $x_0 \in M$ un point régulier et U un rectangle adapté aux feuilletages $\mathfrak{F}^s$ et $\mathfrak{F}^u$, voisinage de x_0 . Soit V un autre rectangle voisinage de x_0 , fortement inclus dans U (figure 7) . Comme le difféomorphisme φ laisse invariante une mesure qui charge tous les ouverts non vides (donnée localement par le produit de μ^s et μ^u) , le principe de récurrence de Poincaré [1 ; p. 7] s'applique : quel que soit n_0 , il existe $n \geq n_0$, tel que $\varphi^n(V) \cap V \neq \emptyset$.

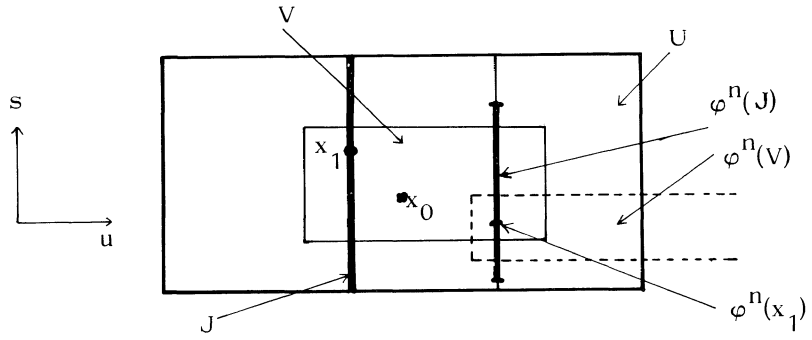


Figure 7

Soit x_1 un point de V tel que $\varphi^n(x_1) \in V$. Soit J la $\mathcal{F}^s$-plaque de U passant par x_1 ; on a :

$$\mu^u(\varphi^n(J)) = \lambda^{-n}\mu^u(J)$$

où λ est le facteur de dilatation de φ . On voit que si n_0 est choisi assez grand (U et V étant donnés) , on pourra assurer que $\varphi^n(J)$ est contenu dans U .

En identifiant $\varphi^n(J)$ à un intervalle de J , l'identification étant donnée en suivant les $\mathcal{F}^u$-plaques, on voit que φ^n a un "point fixe dans J" , ce qui veut dire qu'<u>il existe un point</u> x_2 <u>de</u> J <u>dont la</u> $\mathcal{F}^u$-<u>feuille est invariante</u> par φ^n .

Soit L la $\mathcal{F}^u$-plaque de x_2 ; si n_0 est choisi assez grand, on est sûr que $\varphi^n(L)$ contient L puisque $\varphi^n(L)$ et L ont déjà $\varphi^n(x_2)$ en commun (cette nouvelle condition sur n_0 ne dépend que des μ^s-largeurs de U et V) . Donc, il y a un point fixe pour $\varphi^n | L$. □

<u>Proposition</u> 19. Soient g une métrique riemannienne sur M et $\alpha \in \mathcal{S}$; on note $\ell_g(\alpha)$ la longueur d'une géodésique minimisante de la classe α . Soit φ un difféomorphisme pseudo-Anosov de M , de rapport de <u>dilatation</u> λ $(\lambda > 1)$; la classe d'isotopie de $\varphi(\alpha)$ est bien définie . On a :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ell_g(\varphi^n(\alpha))} = \lambda .$$

<u>Démonstration</u>. Si $(\mathcal{F}^s,\mu^s)$ et $(\mathcal{F}^u,\mu^u)$ <u>sont les</u> feuilletages stable et instable de φ, on peut définir la "métrique" $\mu = \sqrt{(\mu^s)^2 + (\mu^u)^2}$; celle-ci provient d'une "norme singulière" du fibré tangent, dont les zéros sont les singularités des feuilletages invariants. Notons au passage que la métrique μ est <u>plate</u> dans le complémentaire des singularités et que la courbure est constituée de masses de Dirac aux singularités. Soit

c une courbe dans la classe α. On a :

$$I(\mathcal{F}^s,\mu^s;\alpha) \leq \ell_\mu(\alpha) \leq \int_c d\mu^s + \int_c d\mu^u$$

et
$$I(\mathcal{F}^s,\mu^s;\varphi^n(\alpha)) \leq \ell_\mu(\varphi^n(\alpha)) \leq \int_{\varphi^n(c)} d\mu^s + \int_{\varphi^n(c)} d\mu^u \ ;$$

par les propriétés de φ, il vient :

$$\lambda^n I(\mathcal{F}^s,\mu^s;\alpha) \leq \ell_\mu(\varphi^n(\alpha)) \leq \lambda^n \int_c d\mu^s + \lambda^{-n}\int_c d\mu^u \ .$$

Comme on l'a vu dans la preuve du théorème de classification, $I(\mathcal{F}^s,\mu^s\ ;\ \alpha) \neq 0$.

Donc $\lim \sqrt[n]{\ell_\mu(\varphi^n(\alpha))} = \lambda$. La fin de la démonstration découle du lemme 20. □

<u>Lemme</u> 20. Il existe des constantes K et $k > 0$ telles que, pour toute classe de lacets α,

$$k \leq \frac{\ell_g(\alpha)}{\ell_\mu(\alpha)} \leq K \ .$$

<u>Démonstration</u> (A. Douady). Soient $a_1,\ldots,a_q$ les singularités de μ ; soit $D(a,\rho)$ la boule de centre a et de rayon ρ pour la métrique μ. Choisissons ρ assez petit pour que les boules $D(a_i,2\rho)$ soient disjointes. Dans le complémentaire des boules de rayon $\rho/2$, les deux métriques proviennent de normes dans le fibré tangent ; donc il existe des constantes K' et $k' > 0$, telles que, pour tout <u>arc</u> rectifiable β, on ait :

$$(1) \qquad k' \leq \frac{L_g(\beta)}{L_\mu(\beta)} \leq K' \ ,$$

où L_g (resp. L_μ) désigne la longueur géométrique.

D'autre part, il existe des constantes K'' et $k'' > 0$ telles que, pour tout $x, y \in \partial D(a_i,\rho)$, on ait :

$$(2) \qquad k'' \leq \frac{d_g(x,y)}{d_\mu(x,y)} \leq K'' \ .$$

En effet, si x et y sont assez proches, l'inégalité (1) s'applique ; en revanche, si on interdit à (x,y) un voisinage de la diagonale, le quotient ci-dessus est défini, continu et > 0 sur un compact. Dans les deux cas, l'inégalité (2) est claire.

On prend $k = \inf(k',k'',1)$ et $K = \sup(K',K'',1)$. Ces constantes dépendent du choix du rayon ρ. On prend celui-ci assez petit pour que, pour tout $x,y \in \partial D(a_i,\rho)$, la plus courte g-géodésique joignant x à y soit homotope à zéro dans $\pi_1(M,D(a_i,\rho))$.

Soient c_1 une μ-géodésique minimisante de la classe α et c'_1 le lacet obtenu en remplaçant chaque passage de c_1 dans les $D(a_i,\rho)$ par la g-géodésique joignant le point d'entrée au point de sortie (un passage est une composante connexe de $c_1^{-1}(D)$) . On a alors :

$$k\,\ell_\mu(\alpha) \leq L_g(c'_1) \leq K\,\ell_\mu(\alpha) \ .$$

D'où l'on déduit, $\ell_g(\alpha) \leq K\,\ell_\mu(\alpha)$. Pour obtenir l'autre inégalité, on part d'une g-géodésique minimisante c_2 et on remplace ses passages dans les boules par des arcs μ-géodésiques. □

RÉFÉRENCE

[1] Y. SINAI , Introduction to ergodic theory, Math. Notes, Princeton University Press, Princeton, 1976.