A. FATHI

Appendice : Estimations de distances hyperboliques

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 151-158

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__151_0>

APPENDICE

ESTIMATIONS DE DISTANCES HYPERBOLIQUES

par A. FATHI

Nous considérons le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy, \ y > 0\}$, muni de la métrique $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. La distance entre deux points z et z' est notée $d(z,z')$.

1. Distance hyperbolique de i à z_0.

$$\operatorname{ch}(d(i,z_0)) = \frac{|z_0+i|^2 + |z_0 - i|^2}{|z_0+i|^2 - |z_0 - i|^2} .$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{D}^2$ l'isomorphisme $z \longrightarrow \dfrac{z - i}{z + i}$. Soit g_{z_0} l'automorphisme de $\mathbb{D}^2$ qui est la multiplication par $\dfrac{\overline{f(z_0)}}{|f(z_0)|}$; on vérifie que l'automorphisme de $\mathbb{H}^2$, $f^{-1} \circ g_{z_0} \circ f$, admet i pour point fixe et envoie z_0 au point imaginaire pur $i\dfrac{|z_0+i| + |z_0-i|}{|z_0+i| - |z_0-i|}$. Comme on a la formule $d(i,iy) = |\operatorname{Log} y|$, il vient :

$$e^{d(i,z_0)} = \frac{|z_0+i| + |z_0-i|}{|z_0+i| - |z_0-i|} . \qquad \square$$

2. Corollaire. Si $z_0 = \dfrac{ai + b}{ci + d}$ avec $ad - bc = 1$, on a :

$$\operatorname{ch}(d(i,z_0)) = \frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \right] .$$

3. Translation hyperbolique le long de l'axe imaginaire.

La transformation $\begin{pmatrix} e^{k/2} & 0 \\ 0 & e^{-k/2} \end{pmatrix}$ envoie en elle-même la droite Oy et les points de cette droite sont déplacés de la distance k.

4. Translation le long de la droite hyperbolique des complexes de module 1.

Si z est de module 1 et si z' vérifie $\frac{z'+1}{z'-1} = e^k \frac{z+1}{z-1}$, alors z' est de module 1. La transformation $z \longrightarrow z'$ qui est donnée par la matrice de $SL(2,\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\frac{k}{2}) & \operatorname{sh}(\frac{k}{2}) \\ \operatorname{sh}(\frac{k}{2}) & \operatorname{ch}(\frac{k}{2}) \end{pmatrix}$$

déplace les points de cette "droite" d'une distance k, vers la droite (partie réelle positive) si $k > 0$ et vers la gauche si $k < 0$.

5. Relations entre les côtés d'un hexagone hyperbolique droit.

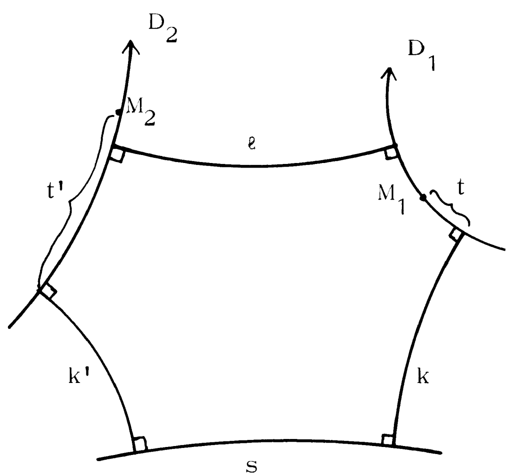


Figure 1

Dans cette figure, s, k, k' sont donnés. On veut calculer ℓ, qui est la plus courte distance entre les droites D_1 et D_2. On va établir la formule :

$$\operatorname{ch} \ell = \operatorname{ch}(s)\operatorname{sh}(k)\operatorname{sh}(k') - \operatorname{ch}(k)\operatorname{ch}(k') .$$

<u>Démonstration</u>. On calcule la distance d'un point courant M_1, d'abcisse t sur D_1 orienté, et d'un point courant M_2, d'abcisse t' sur D_2 orienté (comme sur la figure 1).

On place M_2 en i et on essaie d'obtenir $M_1 = f(i)$, où f est composé de translations hyperboliques le long de l'axe Oy et le long du cercle unité.

On voit facilement que l'on peut prendre $f \in SL(2,\mathbb{R})$ comme produit :

$$f = \begin{pmatrix} e^{-t'/2} & 0 \\ 0 & e^{t'/2} \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où
$$F = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\frac{k'}{2}) & \operatorname{sh}(\frac{k'}{2}) \\ \operatorname{sh}(\frac{k'}{2}) & \operatorname{ch}(\frac{k'}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\frac{k}{2}) & -\operatorname{sh}(\frac{k}{2}) \\ -\operatorname{sh}(\frac{k}{2}) & \operatorname{ch}(\frac{k}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

En effectuant les calculs, il vient :

$$a = \alpha\, e^{-\frac{t+t'}{2}} , \quad b = \beta\, e^{\frac{t-t'}{2}} , \quad c = \gamma\, e^{\frac{t'-t}{2}} , \quad d = \delta\, e^{\frac{t+t'}{2}} ,$$

$$\alpha = e^{s/2}\operatorname{ch}(\tfrac{k'}{2})\operatorname{ch}(\tfrac{k}{2}) - e^{-s/2}\operatorname{sh}(\tfrac{k'}{2})\operatorname{sh}(\tfrac{k}{2}) ,$$

$$\beta = e^{-s/2}\operatorname{sh}(\tfrac{k'}{2})\operatorname{ch}(\tfrac{k}{2}) - e^{s/2}\operatorname{ch}(\tfrac{k'}{2})\operatorname{sh}(\tfrac{k}{2}) ,$$

$$\gamma = e^{s/2}\operatorname{sh}(\tfrac{k'}{2})\operatorname{ch}(\tfrac{k}{2}) - e^{-s/2}\operatorname{ch}(\tfrac{k'}{2})\operatorname{sh}(\tfrac{k}{2}) ,$$

$$\delta = e^{-s/2}\operatorname{ch}(\tfrac{k'}{2})\operatorname{ch}(\tfrac{k}{2}) - e^{s/2}\operatorname{sh}(\tfrac{k'}{2})\operatorname{sh}(\tfrac{k}{2}) .$$

On a :
$$2\operatorname{ch}(d(M_1,M_2)) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$
$$= \alpha^2 e^{-(t+t')} + \beta^2 e^{t-t'} + \gamma^2 e^{t'-t} + \delta^2 e^{t+t'} .$$

En cherchant le point critique de cette fonction des variables t et t' (unique parce que la fonction est convexe), il vient :

$$e^{t+t'} = \left|\frac{\alpha}{\delta}\right| , \qquad e^{t-t'} = \left|\frac{\gamma}{\beta}\right| .$$

La valeur critique est donc : $\operatorname{ch} \ell = |\alpha\delta| + |\beta\gamma|$.

$$\alpha\delta = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{ch}(k)\operatorname{ch}(k') - \operatorname{ch}(s)\operatorname{sh}(k)\operatorname{sh}(k')\right]$$

$$\beta\gamma = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(k)\operatorname{ch}(k') - 1 - \operatorname{ch}(s)\operatorname{sh}(k)\operatorname{sh}(k')\right] .$$

On vérifie d'ailleurs que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. On trouve alors :

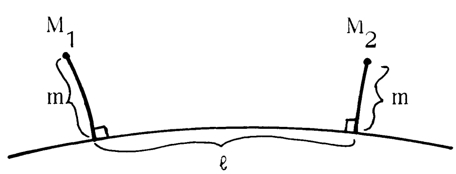
$$\operatorname{ch} \ell = \sup\left(1, \left|\operatorname{ch}(k)\operatorname{ch}(k') - \operatorname{ch}(s)\operatorname{sh}(k)\operatorname{sh}(k')\right|\right) .$$

Or, on voit géométriquement que, si à partir d'un hexagone, on augmente s, on obtient un nouvel hexagone pour lequel ℓ n'est sûrement pas nul ($\operatorname{ch} \ell > 1$) ; d'ailleurs, ℓ est une fonction croissante de s (voir exposé 3, § II). Donc :

$$\operatorname{ch} \ell = \operatorname{ch}(s)\operatorname{sh}(k)\operatorname{sh}(k') - \operatorname{ch}(k)\operatorname{ch}(k') . \qquad \square$$

6. Distance de deux points à égale distance d'une droite.

Figure 2



Dans la situation de la figure 2, on a la formule :

$$\operatorname{ch}(d(M_1,M_2)) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(\ell) + 1 + (\operatorname{ch}(\ell) - 1)\operatorname{ch}(2m)\right] .$$

Démonstration. On place M_1 en i et on écrit $M_2 = f(i)$, où f est dans $SL(2,\mathbb{R})$ le produit suivant :

$$f = \begin{pmatrix} e^{-m/2} & 0 \\ 0 & e^{m/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch(\frac{\ell}{2}) & sh(\frac{\ell}{2}) \\ sh(\frac{\ell}{2}) & ch(\frac{\ell}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{m/2} & 0 \\ 0 & e^{-m/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\frac{\ell}{2}) & e^{-m}\, sh(\frac{\ell}{2}) \\ e^{m}\, sh(\frac{\ell}{2}) & ch(\frac{\ell}{2}) \end{pmatrix}$$

On applique alors la formule 2 . □

7. Majoration de distances dans le pantalon.

On considère sur le pantalon P^2 une métrique hyperbolique pour laquelle les composantes du bord sont des géodésiques de longueurs respectives $2m_1$, $2m_2$, $2m_3$ (attention ! ce n'est pas la notation usuelle). Soit g_{ij} la géodésique simple orthogonale à $\partial_i P^2$ et à $\partial_j P^2$; si $i = j$, elle coupe P^2 en deux anneaux. Posons $\ell_3 = \text{long } g_{12}$, $\ell_2 = \text{long } g_{13}$, $\ell_1 = \text{long } g_{23}$.

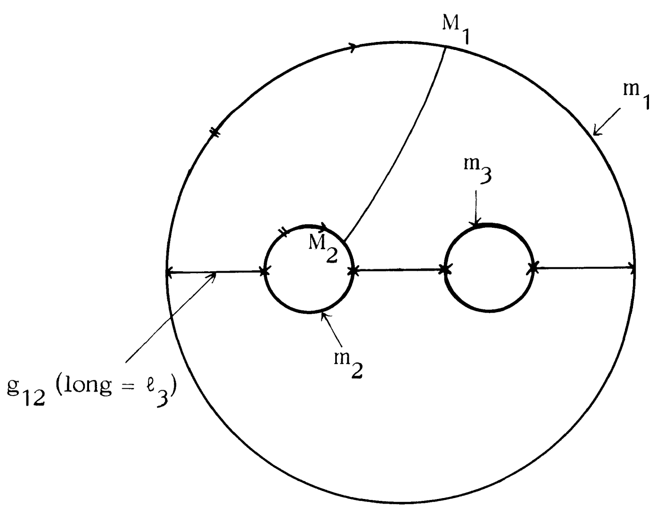


Figure 3

On a : $\operatorname{ch}(m_3) = \operatorname{ch}(\ell_3)\operatorname{sh}(m_1)\operatorname{sh}(m_2) - \operatorname{ch}(m_1)\operatorname{ch}(m_2)$.

Donc :
$$\operatorname{ch}(\ell_3) = \frac{\operatorname{ch}(m_3) + \operatorname{ch}(m_1)\operatorname{ch}(m_2)}{\operatorname{sh}(m_1)\operatorname{sh}(m_2)} .$$

Proposition. Soit M_1 (resp. M_2) un point d'abscisse $m \leq \inf(m_1, m_2)$ sur $\partial_1 P^2$ (resp. $\partial_2 P$) , où l'origine est le point d'intersection avec g_{12} et l'orientation celle de la figure 3. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante, ne dépendant que de ε , qui majore $d(M_1, M_2)$ pourvu que m, m_1, m_2, m_3 vérifient les inégalités (i), (ii) ou (i), (iii) :

(i) $m_1, m_2, m_3 > \varepsilon$;

(ii) $(m_1, m_2, m_3) \in (\leq \nabla)$ (inégalité du triangle) et $|m| \leq \dfrac{m_1 + m_2 - m_3}{2}$;

(iii) $m_1 \geq m_2 + m_3$ et $|m| \leq m_2$.

Démonstration. D'après la formule 6 , il s'agit de borner la quantité $(\operatorname{ch}(\ell_3) + 1) + (\operatorname{ch}(\ell_3) - 1)\operatorname{ch}(2m)$. Pour cela, il suffit de borner $Q = [\operatorname{ch}(\ell_3) - 1]\operatorname{ch}(2m)$ car on a : $\operatorname{ch}(\ell_3) + 1 \leq Q + 2$.

1° (i) et (ii) sont vrais. On a :

$$Q = \left[\frac{\operatorname{ch}(m_3) + \operatorname{ch}(m_1 - m_2)}{\operatorname{sh}(m_1)\operatorname{sh}(m_2)}\right]\operatorname{ch}(2m) \leq \left[\frac{\operatorname{ch}(m_3) + \operatorname{ch}(m_1 - m_2)}{\operatorname{sh}(m_1)\operatorname{sh}(m_2)}\right]\operatorname{ch}(m_1 + m_2 - m_3) .$$

Puisque $\partial_1 P^2$ et $\partial_2 P^2$ jouent ici des rôles symétriques, on peut supposer $m_1 - m_2 \geq 0$. Alors, on a :

$$\operatorname{ch}(m_1 - m_2)\operatorname{ch}(m_1 + m_2 - m_3) \leq \operatorname{ch}(2m_1 - m_3)$$

$$\operatorname{ch}(m_3)\operatorname{ch}(m_1 + m_2 - m_3) \leq \operatorname{ch}(m_1 + m_2) .$$

D'autre part $|m_1 - m_3| \leq m_2$; donc $0 \leq |2m_1 - m_3| \leq m_1 + m_2$; d'où : $\operatorname{ch}(2m_1 - m_3) \leq \operatorname{ch}(m_1 + m_2)$.

Finalement, on a : $Q \leq \dfrac{2\operatorname{ch}(m_1 + m_2)}{\operatorname{sh} m_1 \operatorname{sh} m_2} = 2 + 2\coth(m_1)\coth(m_2)$.

Le membre de droite est borné d'après (i) .

2° (i) et (iii) sont vrais.

$$Q = \left[\frac{\mathrm{ch}(m_3) + \mathrm{ch}(m_1 - m_2)}{\mathrm{sh}(m_1)\,\mathrm{sh}(m_2)}\right] \mathrm{ch}(2m_2) \ .$$

On a :

$$\mathrm{ch}(m_3)\,\mathrm{ch}(2m_2) \leq \mathrm{ch}(m_3 + 2m_2) \leq \mathrm{ch}(m_1 + m_2) \ ,$$

$$\mathrm{ch}(m_1 - m_2)\,\mathrm{ch}(2m_2) \leq \mathrm{ch}(m_1 + m_2) \ .$$

On conclut comme dans le 1er cas. □

Corollaire. Soient M, M' deux points distincts de $\partial_1 P^2$, équidistants de la géodésique g_{11} et du même côté de celle-ci. Alors d(M,M') est borné par une constante ne dépendant que de ϵ pourvu que l'on ait :

(i) $m_1, m_2, m_3 > \epsilon$,

(ii) $m_1 \geq m_2 + m_3$

(iii) $M \in AA'$ (voir figure 4) .

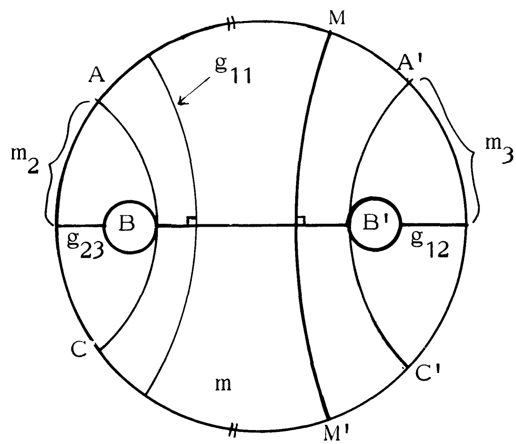


Figure 4

(toutes les lignes de cette figure sont des géodésiques)

<u>Démonstration</u>. D'après la proposition précédente, les quantités $d(A,B) = d(C,B)$ et $d(A',B') = d(C',B')$ sont bornées. D'après la formule du n° 6 ,

$$d(M,M') \leq \sup\,(d(A,C),\ d(A',C'))\ .$$

Par l'inégalité triangulaire, $d(A,C) \leq 2\,d(A,B)$ et $d(A',C') \leq 2\,d(A',B')$. □