JEAN-PIERRE SERRE

Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate

Astérisque, tome 65 (1979), p. 155-188

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__65__155_0>

GROUPES ALGÉBRIQUES ASSOCIÉS AUX MODULES DE HODGE-TATE

par

Jean-Pierre SERRE

Soit V un module de Hodge-Tate sur un corps local d'inégale caractéristique. Le sous-groupe d'inertie du groupe de Galois qui opère sur V est "presque" algébrique : il est <u>ouvert</u> dans un certain sous-groupe algébrique H_V du groupe linéaire GL_V.

<u>Quelle est la structure de la composante neutre H_V^o de H_V</u> ?

Le but de cet exposé est de donner deux cas où l'on peut répondre, au moins en partie, à cette question :

i) le cas <u>commutatif</u>, où H_V^o est un tore, quotient de ceux qui interviennent dans les groupes de Lubin-Tate ;

ii) le cas où V <u>n'a pour poids que</u> 0 <u>et</u> 1 (exemple : module de Tate d'une variété abélienne, ou d'un groupe p-divisible) ; les facteurs simples de H_V^o sont alors <u>de type classique</u> (A_n, B_n, C_n ou D_n), et leurs poids dans V sont des <u>poids minuscules</u>.

Ces résultats font l'objet des §§ 2 et 3 ; le § 1 contient divers préliminaires.

§ 1. La catégorie des modules de Hodge-Tate

1.1. Notations

La lettre K désigne un corps local, i.e. un corps complet pour une valuation discrète. On note A_K l'anneau des entiers de K, et $k = A_K/\mathfrak{p}_K$ son corps résiduel. On suppose K de caractéristique zéro, et k algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, de sorte que K est extension du corps p-adique $\mathbf{Q}_p$.

On note $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, et C sa complétion. Le groupe de Galois G_K de $\bar{K}$ sur K opère sur C.

On note $\chi : G_K \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique de G_K. On a $s(z) = z^{\chi(s)}$ pour tout $s \in G_K$ et pour toute racine de l'unité $z \in \bar{K}$ d'ordre une puissance de p.

Un module galoisien sur K est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel V de dimension finie sur lequel G_K opère continûment. On note ρ_V l'homomorphisme de G_K dans $\mathrm{Aut}(V)$ qui définit l'action de G_K. Le groupe $G_V = \mathrm{Im}(\rho_V)$ est un sous-groupe compact (donc de Lie) du groupe de Lie p-adique $\mathrm{Aut}(V)$. Si $x \in V$ et $s \in G_K$ (ou $s \in G_V$), on note $s(x)$ le transformé de x par s.

1.2. Modules de Hodge-Tate (cf. [5], [6], [9])

Soit V un module galoisien sur K. L'action de G_K sur V se prolonge au C-espace vectoriel $V_C = C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ par la formule

$$s(\sum c_\alpha \otimes x_\alpha) = \sum s(c_\alpha) \otimes s(x_\alpha) \qquad (c_\alpha \in C,\ x_\alpha \in V).$$

Si $i \in \mathbf{Z}$, on note $V_C\{i\}$ l'ensemble des $x \in V_C$ tels que

$$s(x) = \chi(s)^i x \qquad \text{pour tout } s \in G_K .$$

C'est un K-sous-espace vectoriel de V_C. On pose :

$$V_C(i) = C \otimes_K V_C\{i\} .$$

D'après un théorème de Tate ([5], prop. 4) les injections $V_C\{i\} \to V_C$ se prolongent en une injection C-linéaire

$$\epsilon : \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} V_C(i) \to V_C .$$

Cela permet d'identifier $V_C(i)$ à un C-sous-espace vectoriel de V_C. Si l'on pose

$$v_i = \dim_C V_C(i) = \dim_K V_C\{i\} ,$$

on a $\sum v_i \leq \dim V$ et $v_i = 0$ pour presque tout i .
L'entier v_i est appelé la multiplicité de i comme poids de V .

On dit que V est un module de Hodge-Tate si ε est bijectif, autrement dit si V_C est somme (nécessairement directe) des $V_C(i)$, ou encore si $\sum v_i = \dim V$.

La catégorie des modules de Hodge-Tate est stable par dualité, produit tensoriel, somme directe, passage aux sous-modules et modules quotients. Dans la terminologie de Saavedra ([3], p. 193), c'est une $\otimes$-catégorie tannakienne sur Q_p , munie d'un foncteur fibre, à savoir le foncteur qui associe à un module V le Q_p-espace vectoriel sous-jacent.

Exemples

Soit $\underline{A}$ un groupe p-divisible sur A_K (resp. une variété abélienne sur K) , et soit $V_p(\underline{A})$ son module de Tate. Alors $V_p(\underline{A})$ est un module de Hodge-Tate de poids 0 et 1 , avec multiplicités $v_o = \dim \underline{A}'$, $v_1 = \dim \underline{A}$, où $\underline{A}'$ est le dual de $\underline{A}$.
Dans le cas p-divisible, ce résultat est dû à Tate [9]. Dans le cas des variétés abéliennes, il est dû à Raynaud (non publié) qui l'a déduit du cas p-divisible en utilisant le théorème de "réduction semi-stable" de Grothendieck-Mumford (SGA 7 I).

Ces modules, et ceux de la $\otimes$-catégorie qu'ils engendrent, sont (essentiellement) les seuls exemples connus de modules de Hodge-Tate. Il serait intéressant d'en construire d'autres ; cela devrait être possible en utilisant la théorie de Fontaine [2].

1.3. L'enveloppe algébrique de G_V

Soit V un module galoisien sur K , de dimension n . Nous noterons GL_V le groupe algébrique des automorphismes de l'espace vectoriel V ; si L est une extension de Q_p , le groupe $GL_V(L)$ des L-points de GL_V est le groupe

$$\mathrm{Aut}_L(L \otimes V) .$$

On a en particulier :

$$GL_V(Q_p) = \mathrm{Aut}(V) \qquad \text{et} \qquad GL_V(C) = \mathrm{Aut}_C(V_C) .$$

Le choix d'une base de V identifie GL_V à GL_n .

Soit G_V le sous-groupe de $GL_V(Q_p)$ image de G_K , cf. n° 1.1. Nous noterons H_V l'enveloppe algébrique de G_V (cf. [5]), autrement dit le plus petit sous-groupe algébrique H de GL_V tel que $H(Q_p)$ contienne G_V ; c'est l'adhérence de Zariski de G_V dans GL_V .

La bigèbre Λ_V de H_V s'identifie à la $\mathbf{Q}_p$-algèbre de fonctions sur G_K engendrée par les coefficients de la représentation ρ_V et de sa duale, mises sous forme matricielle.

On a par construction $G_V \subset H_V(\mathbf{Q}_p)$. Si $\mathfrak{g}_V$ (resp. $\mathfrak{h}_V$) désigne l'algèbre de Lie du groupe p-adique G_V (resp. du groupe algébrique H_V) , on a

$$\mathfrak{g}_V \subset \mathfrak{h}_V \subset \mathrm{End}(V) ,$$

et $\mathfrak{h}_V$ est la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathrm{End}(V)$ contenant $\mathfrak{g}_V$ (cf. [1], § 7).

Remarque

Soit Rep_V la $\otimes$-catégorie de G_K-modules engendrée par V et son dual. On peut caractériser H_V comme le groupe des automorphismes du foncteur fibre naturel sur Rep_V , au sens de Saavedra [3], II, § 4 ; de plus, Rep_V s'identifie à la catégorie des représentations linéaires du groupe algébrique H_V ([3], loc.cit.).

THÉORÈME 1 ([4], [7]) - *Si* V *est un module de Hodge-Tate,* G_V *est ouvert dans* $H_V(\mathbf{Q}_p)$.

Une formulation équivalente est :

THÉORÈME 1' - *On a* $\mathfrak{g}_V = \mathfrak{h}_V$, *autrement dit* $\mathfrak{g}_V$ *est une sous-algèbre de Lie algébrique de* $\mathrm{End}(V)$.

La démonstration du th. 1' donnée par Sen ([4], § 6) utilise le th. 2 ci-dessous. On peut également en donner une démonstration directe : on traite d'abord le cas où G_V est abélien, ce qui est facile à partir de résultats de Tate (cf. § 2, ainsi que [6], chap. III) ; le cas général s'en déduit grâce au théorème de Chevalley ([1], § 7, cor. (7.9)) disant que $\mathfrak{g}_V$ contient l'algèbre dérivée $[\mathfrak{h}_V,\mathfrak{h}_V]$ de $\mathfrak{h}_V$.

1.4. Le groupe à un paramètre h_V

A partir de maintenant, on suppose que V est un module de Hodge-Tate.

La graduation de V_C par les $V_C(i)$ correspond à une action du groupe multiplicatif G_m sur V_C : à tout élément c de $C^* = G_m(C)$, on associe l'automorphisme $h_V(c)$ de V_C défini par la formule

$$h_V(c).x = c^i x \qquad \text{pour tout } i \in \mathbf{Z} \text{ et tout } x \in V_C(i) .$$

On obtient ainsi un homomorphisme de C-groupes algébriques

$$h_V : G_{m/C} \to GL_{V/C} ,$$

où $G_{m/C}$ et $GL_{V/C}$ désignent les groupes algébriques déduits de $\mathbf{G}_m$ et de GL_V par extension des scalaires à C . Il n'est pas difficile de voir que $\mathrm{Im}(h_V)$ est contenu dans $H_{V/C}$; cela résulte par exemple de l'interprétation de H_V comme groupe d'automorphismes du foncteur fibre de la $\otimes$-catégorie Rep_V , cf. 1.3 (noter que, si W est un objet de Rep_V, h_W est le composé de h_V et de l'homomorphisme naturel $H_{V/C} \to H_{W/C}$) . Comme $\mathbf{G}_m$ est connexe, le groupe $\mathrm{Im}(h_V)$ est contenu dans $H^o_{V/C}$, où H^o_V désigne la composante neutre de H_V .

Le résultat suivant, conjecturé dans [7] et démontré dans [4], joue un rôle essentiel dans toute la suite :

THÉORÈME 2 (Sen) - Le groupe H^o_V est le plus petit sous-groupe algébrique de GL_V défini sur $\mathbf{Q}_p$ qui, après extension des scalaires à C , contienne $\mathrm{Im}(h_V)$.

Voici quelques conséquences de ce théorème :

COROLLAIRE 1 - Les propriétés suivantes d'un sous-espace vectoriel W de V sont équivalentes :

a) W est stable par H^o_V ;
b) W est stable par un sous-groupe ouvert de G_V ;
c) W_C est stable par $\mathrm{Im}(h_V)$;
d) W_C est somme de ses intersections avec les $V_C(i)$.

Les équivalences a) $\Leftrightarrow$ b) et c) $\Leftrightarrow$ d) sont immédiates. L'équivalence de a) et c) résulte du th. 2.

COROLLAIRE 2 - Soit $x \in V$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) x est fixé par H^o_V ;
b) l'orbite $G_V x$ de x est finie ;
c) x est fixé par $\mathrm{Im}(h_V)$;
d) x appartient à $V_C(0)$.

Ici encore, les équivalences a) $\Leftrightarrow$ b) et c) $\Leftrightarrow$ d) sont immédiates ; celle de a) et c) résulte du th. 2.

COROLLAIRE 3 - Si 0 est le seul poids de V , i.e. si $V_C = V_C(0)$, on a $H^o_V = \{1\}$, et le groupe G_V est un groupe fini.

Cela résulte du cor. 2.

Remarque. Inversement, on peut déduire le th. 2 du cor. 3, appliqué à un module convenable de Rep_V .

Variantes du théorème 2

Soit Γ_C le groupe des $\mathbf{Q}_p$-automorphismes (non nécessairement continus) du corps C . Si $\sigma \in \Gamma_C$ et $c \in C$, notons ${}^\sigma c$ le conjugué de c par σ ; si $x = \sum c_\alpha \otimes x_\alpha$ est un élément de V_C (avec $c_\alpha \in C$, $x_\alpha \in V$) , posons

$${}^\sigma x = (\sigma \otimes 1)x = \sum {}^\sigma c_\alpha \otimes x_\alpha .$$

Le conjugué de h_V par σ est l'homomorphisme ${}^\sigma h_V$ de $\mathbf{G}_{m/C}$ dans $H_{V/C}$ déduit de h_V par le changement de corps de base $\sigma : C \to C$; il correspond à la décomposition de V_C en somme directe des ${}^\sigma V_C(i)$; on peut le caractériser par la formule

$$ {}^\sigma h_V({}^\sigma c)^\sigma x = {}^\sigma(h_V(c)x) \qquad \text{pour tout } c \in C^* \text{ et tout } x \in V_C . $$

Un élément c de C appartient à $\mathbf{Q}_p$ si et seulement si l'on a ${}^\sigma c = c$ pour pour tout $\sigma \in \Gamma_C$: cela résulte de ce que C est algébriquement clos. De là on déduit facilement l'équivalence du th. 2 avec :

THÉORÈME 2' - Le groupe $H^o_{V/C}$ est engendré par les conjugués $\mathrm{Im}({}^\sigma h_V)$, $\sigma \in \Gamma_C$, du groupe $\mathrm{Im}(h_V)$.

Voici maintenant une traduction en termes d'algèbres de Lie : notons φ_V la dérivée de h_V en l'élément neutre, autrement dit l'endomorphisme de V_C tel que

$$ \varphi_V(x) = ix \qquad \text{si} \quad i \in \mathbf{Z} ,\ x \in V_C(i) . $$

En vertu d'un résultat connu ([1], th. 7.6), le th. 2 équivaut à :

THÉORÈME 2" - L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_V$ est la plus petite $\mathbf{Q}_p$-sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(V)$ qui, après extension des scalaires à C, contienne φ_V.

Ou encore :

THÉORÈME 2"' - Les conjugués ${}^\sigma\varphi_V$ de φ_V $(\sigma \in \Gamma_C)$ engendrent l'algèbre de Lie $C \otimes \mathfrak{h}_V$.

C'est sous cette forme que le th. 2 est démontré par Sen [4]. Sen prouve même un résultat en apparence plus fort : le sous-espace vectoriel Φ de $\mathrm{End}(V_C)$ engendré par les ${}^\sigma\varphi_V$ est égal à $C \otimes \mathfrak{h}_V$. (Ce résultat peut en fait se déduire du th. 2"'. En effet, le cor. à la prop. 1 du n° 1.5 ci-après entraîne que l'ensemble des ${}^\sigma\varphi_V$, $\sigma \in \Gamma_C$, est stable par $\varphi \mapsto g^{-1}\varphi g$ pour tout $g \in G_V$. Il en est donc de même de Φ, et, par dérivation, cela entraîne $[\Phi , \mathfrak{h}_V] \subset \Phi$. Comme Φ est contenu dans $C \otimes \mathfrak{h}_V$, on en déduit $[\Phi,\Phi] \subset \Phi$, et Φ est une algèbre de Lie ; d'après le th. 2"', cette algèbre de Lie est égale à $C \otimes \mathfrak{h}_V$.)

1.5. Degré de transcendance de h_V

Formules de fonctorialité

On a vu au n° 1.4 que l'on peut conjuguer h_V par tout élément σ de $\Gamma_C = \mathrm{Aut}_{\mathbf{Q}_p}(C)$, et que l'on obtient ainsi un homomorphisme ${}^\sigma h_V$ de $\mathbf{G}_{m/C}$ dans $H^o_{V/C}$.

Supposons que $\sigma(K) = K$ et que σ soit continu. Si $s \in G_K$, on a alors $\sigma^{-1}s\sigma \in G_K$. Cela permet de définir une représentation $\rho_{\sigma V}$ de G_K dans $\mathrm{Aut}(V)$

par :

$$\rho_{\sigma V}(s) = \rho_V(\sigma^{-1} s \sigma) \qquad \text{pour tout} \quad s \in G_K .$$

L'homomorphisme $h_{\sigma V}$ attaché à $\rho_{\sigma V}$ n'est autre que le conjugué ${}^{\sigma}h_V$ de h_V par σ ; cela se voit par transport de structure.

Supposons maintenant que σ appartienne à G_K, et soit $g = \rho_V(\sigma)$ son image dans $H_V(\mathbf{Q}_p)$. La représentation $\rho_{\sigma V}$ est alors isomorphe à ρ_V : on a

$$\rho_{\sigma V}(s) = g^{-1}\rho_V(s)g \qquad \text{pour tout} \quad s \in G_K .$$

On en déduit par fonctorialité :

$$h_{\sigma V} = g^{-1} h_V g = \mathrm{Int}(g^{-1}) \circ h_V ,$$

où $\mathrm{Int}(g^{-1})$ désigne l'automorphisme intérieur de H_V défini par g^{-1}.

Utilisant le fait que $h_{\sigma V} = {}^{\sigma}h_V$, on obtient finalement le résultat suivant (que l'on peut aussi vérifier par calcul direct) :

PROPOSITION 1 - Si $\sigma \in G_K$ a pour image g dans $H_V(\mathbf{Q}_p)$, on a

$${}^{\sigma}h_V = \mathrm{Int}(g^{-1}) \circ h_V .$$

COROLLAIRE - On a ${}^{\sigma}\varphi_V = g^{-1}\varphi_V\, g$.

Pour $\sigma \in G_K$, les ${}^{\sigma}h_V$ et les ${}^{\sigma}\varphi_V$ sont donc des conjugués de h_V et φ_V à la fois au sens galoisien, et au sens de la conjugaison par les automorphismes intérieurs de H_V.

Corps de définition de h_V

Les groupes algébriques $\mathbf{G}_m$ et H_V^o sont définis sur $\mathbf{Q}_p$. On peut donc parler du corps de définition $\mathbf{Q}_p(h_V)$ de l'homomorphisme $h_V : \mathbf{G}_{m/C} \to H^o_{V/C}$: c'est le plus petit sous-corps de C contenant $\mathbf{Q}_p$ sur lequel h_V soit rationnel ; c'est aussi le corps de définition de l'élément φ_V de $C \otimes \mathrm{End}(V)$.

Le corps $K(h_V)$ engendré par K et $\mathbf{Q}_p(h_V)$ est le corps de définition de h_V sur K.

Nous allons déterminer les degrés de transcendance des extensions $\mathbf{Q}_p(h_V)$ et $K(h_V)$:

THÉORÈME 3 - Soit Z_V le commutant de $\mathrm{Im}(h_V)$ dans $H^o_{V/C}$. On a

$$\mathrm{deg.tr}_{\mathbf{Q}_p}\, \mathbf{Q}_p(h_V) = \mathrm{deg.tr}_K\, K(h_V) = \dim H_V - \dim Z_V .$$

Démonstration

Choisissons un tore maximal T de H_V^o défini sur $\mathbf{Q}_p$; on sait que c'est possible ([1], th. 18.2) et que tout sous-tore de $H^o_{V/C}$ est conjugué d'un sous-tore de $T_{/C}$ ([1], cor. 11.3). En appliquant ceci au tore $\mathrm{Im}(h_V)$, on en conclut qu'il existe un homomorphisme

$$h_1 : \mathbf{G}_{m/C} \to T_{/C}$$

et un élément g de $H^o_V(C)$ tels que $h_V = \mathrm{Int}(g) \circ h_1$. Soit E le corps de définition de h_1. C'est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ ([1], prop. 8.11). Le commutant Z_1 de $\mathrm{Im}(h_1)$ dans $H^o_{V/E}$ est défini sur E. Soit $X = H^o_{V/E}/Z_1$ l'espace homogène correspondant ; c'est une variété algébrique sur E. On a

$$\dim X = \dim H^o_V - \dim Z_1 = \dim H_V - \dim Z_V .$$

Soit x l'image de g dans $X(C)$; le point x ne dépend pas du choix de g, car g est déterminé à une multiplication à droite près par un élément de $Z_1(C)$. Si L est une sous-extension de C contenant E, on voit tout de suite que x est rationnel sur L si et seulement si h_V est rationnel sur L. Le corps

$$E(h_V) = E.\mathbf{Q}_p(h_V)$$

est donc égal au corps de définition $E(x)$ du point x de X.
Le th. 3 équivaut à dire que

$$\mathrm{deg.tr}_E\, E(x) = \mathrm{deg.tr}_{K.E}\, K.E(x) = \dim X ,$$

ou encore que x est un point générique de X sur E et sur $K.E$. Montrons que x est générique sur $K.E$ (l'assertion relative à E en résultera). Soit X' la plus petite sous-variété de X contenant x et définie sur $K.E$; il s'agit de prouver que $X' = X$. Soit G' le sous-groupe ouvert de G_K formé des éléments qui fixent E, et dont l'image dans $H_V(\mathbf{Q}_p)$ appartient à $H^o_V(\mathbf{Q}_p)$. Si $\sigma \in G'$, et si g est l'image de σ dans $H^o_V(\mathbf{Q}_p)$, la prop. 1 montre que $g^{-1}x = {}^{\sigma}x$, d'où $g^{-1}x \in X'(C)$ puisque la variété X' est définie sur $K.E$. On a donc

$$\rho_V(G').c \subset X'(C) ,$$

et comme $\rho_V(G')$ est dense dans H^o_V pour la topologie de Zariski, ceci entraîne $H^o_V(C).x \subset X'$, d'où $X' = X$, cqfd.

Exemple. Supposons que V soit un module de Hodge-Tate de dimension 2, avec poids 0 et 1 de multiplicité 1, et que H_V soit égal à $\mathbf{GL}_V$; c'est le cas lorsque V est le module de Tate d'un groupe formel à un paramètre de hauteur 2 dont l'anneau des endomorphismes est réduit à $\mathbf{Z}_p$, cf. [5], th. 5. La décomposition de Hodge-Tate de V_C est définie par les deux droites $V_C(0)$ et $V_C(1)$. Soient c_o et c_1 les pentes de ces droites, prises par rapport à une base de V. Le corps de définition de h_V est le corps $\mathbf{Q}_p(c_o,c_1)$ engendré par c_o et c_1. On a

$$\dim H_V = 4 \qquad \text{et} \qquad \dim Z_V = 2 \ ;$$

la variété X est de dimension 2 (c'est un produit de deux droites projectives). D'après le th. 3, on a

$$\mathrm{deg.tr}_{\mathbf{Q}_p}\, \mathbf{Q}_p(c_o,c_1) = \mathrm{deg.tr}_K\, K(c_o,c_1) = 2 \ ;$$

autrement dit, c_o et c_1 sont algébriquement indépendants sur K .

1.6. Passage à la limite : le groupe proalgébrique H

Domination

Soient V et W deux modules de Hodge-Tate. Nous dirons que W est dominé par V si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) W appartient à la $\otimes$-catégorie Rep_V engendrée par V et son dual ;

(ii) la bigèbre Λ_W du groupe H_W (cf. 1.3) est contenue dans la bigèbre Λ_V du groupe H_V ;

(iii) il existe un morphisme de groupes algébriques (nécessairement unique) $\pi_W^V : H_V \to H_W$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & H_V(\mathbf{Q}_p) \arrow[d] \\ G_K \arrow[ur] \arrow[r] & H_W(\mathbf{Q}_p) \end{tikzcd} .$$

(L'équivalence de (ii) et (iii) est immédiate. Celle de (i) et (iii) résulte, par exemple, de [3], II.4.3.2 a), p. 156. L'hypothèse "de Hodge-Tate" n'intervient pas.)

Passage à la limite

La domination est une relation de préordre filtrante sur la catégorie des modules de Hodge-Tate. Cela permet de définir le groupe proalgébrique

$$H = \varprojlim H_V ,$$

limite projective des H_V relativement aux morphismes π_W^V . Ce groupe est un groupe affine sur $\mathbf{Q}_p$. Sa bigèbre Λ est la réunion des bigèbres Λ_V .

Par passage à la limite, les ρ_V et les h_V définissent des homomorphismes

$$\rho : G_K \to H(\mathbf{Q}_p) \qquad \text{et} \qquad h : \mathbf{G}_{m/C} \to H_{/C} .$$

Toute représentation linéaire (de dimension finie) de H fournit, via ρ , un module galoisien dont la décomposition de Hodge-Tate est donnée par h ; inversement, tout module de Hodge-Tate s'obtient de cette manière. Ainsi, la $\otimes$-catégorie des modules de Hodge-Tate s'identifie à celle des représentations linéaires du groupe proalgébrique H (cf. [3], II, § 4).

Si l'on remplace la catégorie des modules de Hodge-Tate par la sous-catégorie des modules admissibles (au sens de Fontaine [2], 3.2.5), on obtient un groupe proalgébrique H_{adm}, qui est quotient de H. De même, si l'on remplace cette catégorie par la $\otimes$-sous-catégorie engendrée par les modules de Tate des groupes p-divisibles, on trouve un groupe H_{div}, qui est quotient de H_{adm}, donc aussi de H.

Le groupe H/H^o

Soit $H^o = \varprojlim H^o_V$ la composante neutre de H. Le groupe quotient

$$H/H^o = \varprojlim H_V/H^o_V$$

est un groupe proalgébrique de dimension 0. Nous allons déterminer sa structure.

Remarquons d'abord que, si V est un module de Hodge-Tate, toute classe de $H_V \bmod H^o_V$ contient un élément de G_V ; cela provient de ce que H_V est l'enveloppe algébrique de G_V (cf. [5], dém. de la prop. 2). Comme les éléments de G_V sont rationnels sur $\mathbf{Q}_p$, il s'ensuit que H_V/H^o_V est un groupe "constant", i.e. un groupe de dimension 0 dont tous les points sont rationnels. Par passage à la limite, la même propriété est vraie pour H/H^o : c'est un groupe "constant", et on peut l'identifier au groupe profini de ses points rationnels sur $\mathbf{Q}_p$. Ce groupe est isomorphe à G_K. Plus précisément :

PROPOSITION 2 - L'homomorphisme composé

$$G_K \to H(\mathbf{Q}_p) \to (H/H^o)(\mathbf{Q}_p)$$

est un isomorphisme du groupe profini G_K sur le groupe profini des points rationnels de H/H^o.

D'après ce qui précède, l'homomorphisme $G_K \to (H/H^o)(\mathbf{Q}_p)$ est surjectif. Pour voir qu'il est injectif, il suffit de prouver que, si N est un sous-groupe ouvert normal de G_K, il existe un module de Hodge-Tate V tel que $\rho_V(N)$ soit contenu dans le groupe $H^o_V(\mathbf{Q}_p)$; or c'est évident : il suffit de prendre pour V n'importe quelle représentation linéaire fidèle du groupe fini G_K/N (on sait en effet qu'une telle représentation donne naissance à un module de Hodge-Tate, cf. [6], III. 32).

Dans toute la suite, nous identifierons H/H^o à G_K.

Remarques

1) Du point de vue des $\otimes$-catégories [3], la prop. 2 exprime simplement le fait que tout module galoisien à action finie est un module de Hodge-Tate.

2) La situation est très différente pour les groupes H_{adm} et H_{div} définis

plus haut. En effet, Fontaine a montré que ces groupes sont <u>connexes</u> ([2], 3.7.4).

1.7. <u>Variation de</u> H <u>par extension finie du corps de base</u>

Soit K_1 une extension finie de K contenue dans $\bar{K}$, et soit $G_{K_1} = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_1)$ le groupe de Galois correspondant ; c'est un sous-groupe ouvert de G_K. Soit H_1 le groupe proalgébrique correspondant à la $\otimes$-catégorie des modules de Hodge-Tate sur K_1. Nous allons comparer H_1 au groupe H relatif à K. Tout d'abord :

LEMME 1 - (a) <u>Tout module de Hodge-Tate sur</u> K <u>définit par restriction un module de Hodge-Tate sur</u> K_1.

(b) <u>Tout module de Hodge-Tate sur</u> K_1 <u>est dominé par un module du type</u> (a).

L'assertion (a) résulte de la définition des modules de Hodge-Tate. Prouvons (b). Soit V_1 un module de Hodge-Tate sur K_1, et soit V le module <u>induit</u> de V_1 (au sens usuel de l'induction des représentations de groupes). Comme V_1 est contenu dans V, donc dominé par V, il nous suffit de vérifier que V est un module de Hodge-Tate sur K. Choisissons une extension galoisienne finie K' de K, contenue dans $\bar{K}$, et contenant K_1. D'après [6], III. 32, il suffit de voir que V est un module de Hodge-Tate sur K'. Mais, sur K', V est somme directe de modules isomorphes à des conjugués de V_1, lesquels sont bien des modules de Hodge-Tate. D'où notre assertion.

Ce lemme montre que les modules de Hodge-Tate sur K sont <u>cofinaux</u> (pour la relation de domination) dans la catégorie des modules de Hodge-Tate sur K_1. On a donc

$$H_1 = \varprojlim H_{1V} \qquad (V \text{ de Hodge-Tate sur } K),$$

où H_{1V} est l'enveloppe algébrique de $G_{1V} = \rho_V(G_{K_1})$ dans GL_V. Comme G_{1V} est d'indice fini dans G_V, H_{1V} est d'indice fini dans H_V ; en particulier <u>les composantes neutres de</u> H_V <u>et</u> H_{1V} <u>coïncident</u>. De plus, l'image de H_{1V} dans le groupe fini H_V/H_V^o est égale à l'image de G_{1V} dans ce groupe. Par passage à la limite sur V, on en déduit :

PROPOSITION 3 - <u>Le groupe</u> H_1 <u>s'identifie à un sous-groupe de</u> H <u>contenant</u> H^o ; <u>son image dans</u> $H/H^o = G_K$ <u>est</u> G_{K_1}.

COROLLAIRE - <u>Les groupes</u> H <u>et</u> H_1 <u>ont même composante neutre</u>.

(Autrement dit, la composante neutre H^o de H <u>ne change pas</u> par extension finie du corps de base.)

On peut résumer la situation par le diagramme commutatif suivant, où les flèches verticales sont des inclusions :

$$\begin{array}{ccccccccc} \{1\} & \to & H_1^o & \to & H_1 & \to & G_{K_1} & \to & \{1\} \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \{1\} & \to & H^o & \to & H & \to & G_K & \to & \{1\} \ . \end{array}$$

<u>Remarque</u>

Ici encore, la situation est différente pour les groupes H_{adm} et H_{div} du n° 1.6. Si l'on remplace K par K_1 , ces groupes sont remplacés par des groupes $H_{1.adm}$ et $H_{1.div}$ munis d'homomorphismes

$$H_{1.adm} \to H_{adm} \quad \text{et} \quad H_{1.div} \to H_{div} \ ;$$

ces homomorphismes sont <u>surjectifs</u>, mais ne sont pas injectifs en général.

§ 2. Le cas commutatif

Le but de ce § est de décrire les modules de Hodge-Tate V dont le groupe de Galois associé G_V est commutatif. Comme on le verra, ces modules se ramènent essentiellement aux modules V_E associés aux groupes formels de Lubin-Tate, cf. 2.1 ci-dessous.

2.1. Les modules V_E et les caractères χ_E

Les modules $V_{E,\pi}$

Soient E une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\bar{K}$, et π une uniformisante de E. Soit $\bar{E} = \bar{\mathbf{Q}}_p$ la fermeture algébrique de E dans $\bar{K}$. Considérons le groupe formel de Lubin-Tate attaché au couple (E,π), et notons $V_{E,\pi}$ son module de Tate, tensorisé avec $\mathbf{Q}_p$. On sait (cf. par exemple [6], III. A4) que $V_{E,\pi}$ est un E-espace vectoriel de dimension 1 et que l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ sur $V_{E,\pi}$ respecte cette structure. Cette action est donnée par un homomorphisme

$$f_{E,\pi} : \mathrm{Gal}(\bar{E}/E) \to U_E ,$$

où U_E est le groupe des unités de E.

Comme U_E est commutatif, on peut, via la théorie du corps de classes, interpréter $f_{E,\pi}$ comme un homomorphisme de E^* dans U_E ; d'après un théorème de Lubin-Tate, cet homomorphisme est caractérisé par les propriétés suivantes

$$f_{E,\pi}(\pi) = 1$$
$$f_{E,\pi}(u) = u^{-1} \qquad \text{si } u \in U_E .$$

Cette dernière formule montre en particulier que la restriction de $f_{E,\pi}$ au groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ ne dépend pas du choix de π.

Les modules V_E

Supposons maintenant que E soit contenu dans K. L'action de $G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $\bar{E}$ définit alors un homomorphisme

$$G_K \to \mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$$

qui permet de faire opérer G_K sur $V_{E,\pi}$. Comme G_K est égal à son groupe d'inertie, le module galoisien ainsi obtenu est indépendant du choix de π ; nous le noterons V_E et nous désignerons par χ_E l'homomorphisme correspondant de G_K dans U_E (cf. [6], p. III. 41).

Exemple. Si $E = \mathbf{Q}_p$, $\pi = p$, le groupe de Lubin-Tate est le groupe multiplicatif (formel), V_E est de dimension 1 , et χ_E est le caractère cyclotomique χ du n° 1.1.

Décomposition de Hodge-Tate de V_E

Soit Σ_E l'ensemble des plongements $\sigma : E \to C$ qui sont l'identité sur $\mathbf{Q}_p$. On a

$$\mathrm{Card}(\Sigma_E) = [E:\mathbf{Q}_p] = \dim V_E .$$

Parmi les éléments de Σ_E figure l'inclusion $\iota : E \to C$.

Si $\sigma \in \Sigma_E$, notons $V_{E,\sigma}$ le C-espace vectoriel $C \otimes_\sigma V_E$ déduit du E-espace vectoriel V_E par le changement de corps de base $\sigma : E \to C$. On a $\dim_C V_{E,\sigma} = 1$. Le C-espace vectoriel $V_{E/C} = C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_E$ est somme directe des $V_{E,\sigma}$:

$$V_{E/C} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_E} V_{E,\sigma} .$$

Il résulte de [9], cor. 2 au th. 3, que V_E est un module de Hodge-Tate de poids 0 et 1 , les sous-espaces correspondants étant :

$$V_{E/C}(0) = \bigoplus_{\sigma \neq \iota} V_{E,\sigma}$$

$$V_{E/C}(1) = V_{E,\iota} = C \otimes_E V_E .$$

Enveloppe algébrique de $\mathrm{Im}(\chi_E)$

L'image de G_K dans $\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ est un sous-groupe d'indice fini du groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$, l'indice en question étant d'ailleurs égal au quotient e_K/e_E des indices de ramification absolus de K et de E . Il en résulte que $\mathrm{Im}(\chi_E)$ est un sous-groupe ouvert de U_E . Son enveloppe algébrique H_{V_E} (au sens du n°1.3) est donc le tore $T_E = R_{E/\mathbf{Q}_p}(\mathbf{G}_{m/E})$ déduit de $\mathbf{G}_{m/E}$ par restriction des scalaires de E à $\mathbf{Q}_p$ ([6], II.1.1). [Rappelons que, si A est une extension de $\mathbf{Q}_p$, le groupe $T_E(A)$ des points de T_E à valeurs dans A est le groupe des éléments inversibles de $A \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$; en particulier, on a $T_E(\mathbf{Q}_p) = E^*$: le tore T_E représente le groupe multiplicatif de E .]

Le groupe à un paramètre attaché à T_E

Sur C (et même sur $\bar{\mathbf{Q}}_p$) le tore T_E se décompose en produit de groupes multiplicatifs indexés par les éléments de Σ_E :

$$T_{E/C} = \prod_{\sigma \in \Sigma_E} G_{m,\sigma} \qquad \text{où} \quad G_{m,\sigma} = G_{m/C} \quad \text{pour tout} \quad \sigma .$$

Sur $V_{E/C}$, un élément $t = (t_\sigma)$ de $T_{E/C}$ opère par :

$$t.\sum_\sigma x_\sigma = \sum_\sigma t_\sigma x_\sigma \qquad \text{si} \quad x_\sigma \in V_{E,\sigma} .$$

Vu la décomposition de Hodge-Tate de V_E donnée ci-dessus, il en résulte que l'homomorphisme $h_{V_E} : G_{m/C} \to T_{E/C}$ attaché à V_E (au sens du n° 1.4) est donné par :

$$h_{V_E}(c) = (c_\sigma) \text{ , avec } \begin{cases} c_\sigma = 1 & \text{si} \quad \sigma \neq \iota \\ c_\sigma = c & \text{si} \quad \sigma = \iota . \end{cases}$$

En d'autres termes, h_{V_E} est le plongement de $G_{m/C}$ dans $T_{E/C}$ correspondant au facteur de $T_{E/C}$ d'indice ι .

2.2. Structure de H^{ab}

Si X est un groupe proalgébrique, nous noterons X^{ab} le plus grand groupe proalgébrique quotient de X qui soit commutatif ; de même, si X est un groupe profini, nous noterons X^{ab} le plus grand quotient profini commutatif de X .

Nous nous proposons de déterminer la structure du groupe proalgébrique H^{ab} , où $H = \varprojlim H_V$, cf. n° 1.6.

Tout d'abord, l'homomorphisme naturel de H sur le groupe G_K (vu comme groupe proalgébrique "constant" de dimension 0 , cf. n° 1.6) définit par passage au quotient un homomorphisme

$$\varepsilon : H^{ab} \to G_K^{ab} .$$

D'après la prop. 2, cet homomorphisme est surjectif, et son noyau est la composante neutre $(H^{ab})^o$ de H^{ab} .

D'autre part, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K , on a défini ci-dessus un module de Hodge-Tate V_E dont le groupe algébrique associé H_{V_E} est le tore T_E défini par E . Comme H est limite projective des H_V , et que T_E est commutatif, on en déduit un homomorphisme $\rho_E : H^{ab} \to T_E$. Si E' est un sous-corps de E , et si $N_{E/E'} : T_E \to T_{E'}$ désigne la norme, on a

$$\rho_{E'} = N_{E/E'} \circ \rho_E ;$$

cela résulte de la formule correspondante pour χ_E et $\chi_{E'}$, qui est bien connue (ou, si l'on préfère, de celle pour h_{V_E} et $h_{V_{E'}}$, qui est immédiate). Notons alors $\varprojlim_{E \subset K} T_E$ la limite projective des tores T_E , pour $E \subset K$, relativement aux $N_{E/E'}$; les ρ_E définissent un homomorphisme

$$\rho : H^{ab} \rightarrow \varprojlim_{E \subset K} T_E .$$

La structure de H^{ab} est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 4 - <u>L'homomorphisme</u>

$$(\varepsilon,\rho) : H^{ab} \rightarrow G_K^{ab} \times \varprojlim_{E \subset K} T_E$$

<u>est un isomorphisme</u>.

Comme ε définit un isomorphisme de $H^{ab}/(H^{ab})^o$ sur G_K^{ab} , le th. 4 équivaut à :

THÉORÈME 4' - <u>La restriction de</u> ρ <u>à</u> $(H^{ab})^o$ <u>est un isomorphisme de</u> $(H^{ab})^o$ <u>sur</u> $\varprojlim_{E \subset K} T_E$.

<u>Démonstration</u>

Par construction, l'homomorphisme

$$(\varepsilon,\rho) : H^{ab} \rightarrow G_K^{ab} \times \varprojlim_{E \subset K} T_E$$

est surjectif. Montrons que c'est un isomorphisme. Pour cela il suffit de prouver que, si $\pi : H^{ab} \rightarrow A$ est un homomorphisme de H^{ab} sur un groupe algébrique linéaire A , <u>l'homomorphisme</u> π <u>peut se factoriser par</u> (ε,ρ) . Or, soit

$$h_A : \mathbf{G}_{m/C} \rightarrow A_{/C}$$

le groupe à un paramètre correspondant à A (cf. 1.4), et soit E le corps de définition de h_A . Du fait que A est commutatif, E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$([1], prop. 8.11). De plus, la prop. 1 du n° 1.5 montre que ${}^{\sigma}h_A = h_A$ pour tout $\sigma \in G_K$, donc que h_A est rationnel sur K ; le corps E est donc contenu dans K . D'après une propriété universelle bien connue du tore T_E , il existe un unique homomorphisme $f_E : T_E \rightarrow A$ tel que

$$h_A = f_E \circ h_{V_E} ,$$

où h_{V_E} est le groupe à un paramètre canonique de T_E , cf. 2.1.

L'homomorphisme f_E définit un homomorphisme f de $\lim\limits_{E \subset K} T_E$ dans A. Posons

$$\pi' = f \circ \rho = f_E \circ \rho_E ;$$

c'est un homomorphisme de H^{ab} dans A qui a le même effet que π sur le groupe à un paramètre canonique de H^{ab}. D'après le th. 2, il en résulte que π et π' coïncident sur $(H^{ab})^o$; leur quotient $\varphi = \pi.(\pi')^{-1}$ est trivial sur $(H^{ab})^o$, donc s'écrit sous la forme $\varphi = g \circ \varepsilon$, où g est un homomorphisme continu (à noyau ouvert) de G_K^{ab} dans $A(\mathbf{Q}_p)$. En multipliant g par f, on obtient un homomorphisme

$$F = g.f : G_K^{ab} \times \lim_{E \subset K} T_E \to A ,$$

et il est clair que $\pi : H^{ab} \to A$ est le composé de (ε, ρ) et de F. Cela montre bien que π se factorise par (ε, ρ) ; le th. 4 en résulte.

<u>Remarque</u>. Le th. 4 est essentiellement une <u>reformulation</u>, dans le langage des groupes proalgébriques, des résultats de Tate exposés dans [6], III, Appendice ; l'emploi du th. 2 (théorème de Sen) n'est pas indispensable.

<u>Application</u> : <u>modules de Hodge-Tate à action abélienne</u>

Soit V un module de Hodge-Tate tel que G_V soit commutatif. L'enveloppe algébrique H_V de G_V est alors commutative ; elle s'identifie donc à un quotient du groupe H^{ab} étudié ci-dessus. Vu le th. 4, on en déduit :

a) La composante neutre H_V^o de H_V est un <u>tore</u>, quotient de l'un des T_E. Cela entraîne que H_V est un groupe <u>réductif</u> ([1], 11.21) et que V est un <u>module semi-simple</u> sur H_V (ou sur G_V, cela revient au même).

b) L'homomorphisme $H^{ab} \to H_V$, restreint au facteur direct G_K^{ab} de H^{ab}, définit un homomorphisme continu

$$\psi_V : G_K^{ab} \to H_V(\mathbf{Q}_p) ,$$

dont l'image est un sous-groupe fini de $H_V(\mathbf{Q}_p)$. En utilisant ψ_V, on munit ainsi V d'une nouvelle structure de module galoisien, où cette fois l'action de G_K est <u>finie</u> ; cela permet, par exemple, de parler du <u>conducteur d'Artin</u> de V, pour cette nouvelle structure. Nous dirons que V est <u>non ramifié</u> si $\psi_V = 1$. Cela revient à dire que la projection $H^{ab} \to H_V$ peut <u>se factoriser par l'un des</u> $\rho_E = H^{ab} \to T_E$, ou encore que V est <u>dominé</u> (au sens de 1.6) par l'un des V_E.

Lorsque V est ramifié, on peut seulement affirmer que V est dominé par un $V_E \oplus W$, où W est un module galoisien à action finie et commutative : c'est une autre façon de formuler le th. 4.

2.3. Structure de H^{ab}_{adm} et H^{ab}_{div}

Rappelons (cf. 1.6) que H_{adm} est le groupe proalgébrique associé à la catégorie des modules admissibles ([2], 3.2.5), et que H_{div} est le groupe proalgébrique associé à la $\otimes$-catégorie engendrée par les modules de Tate des groupes p-divisibles. On a des homomorphismes canoniques

$$H \to H_{adm} \to H_{div} ,$$

d'où

$$H^{ab} \to H^{ab}_{adm} \to H^{ab}_{div} .$$

Ces homomorphismes sont surjectifs. Comme H_{adm} et H_{div} sont connexes ([2], 3.7.4), la restriction de $H^{ab} \to H^{ab}_{div}$ à $(H^{ab})^o$ est également surjective.

Du fait que les V_E sont des modules de Tate de groupes p-divisibles, l'homomorphisme $\rho : H^{ab} \to \varprojlim_{E \subset K} T_E$ se factorise en :

$$H^{ab} \to H^{ab}_{div} \to \varprojlim_{E \subset K} T_E .$$

THÉORÈME 5 (Fontaine) - Les homomorphismes

$$(H^{ab})^o \to H^{ab}_{adm} \to H^{ab}_{div} \to \varprojlim_{E \subset K} T_E$$

sont tous des isomorphismes.

En effet ils sont surjectifs et leur composé est un isomorphisme d'après le th. 4'.

COROLLAIRE 1 - Les projections $H^{ab} \to H^{ab}_{adm}$ et $H^{ab} \to H^{ab}_{div}$ ont pour noyau le facteur direct G^{ab}_K de H^{ab}.

C'est clair.

COROLLAIRE 2 - Soit V un module de Hodge-Tate à action abélienne. Pour que V soit non ramifié (au sens de 2.2), il faut et il suffit que V soit admissible (au sens de [2], 3.2.5).

Cela résulte du cor. 1.

Exemple : module de Tate d'un groupe p-divisible de type (CM)

Soit $\underline{A}$ un groupe p-divisible sur A_K, de hauteur h et de dimension n. Soit E_1 une extension de Q_p de degré h et supposons qu'un sous-anneau d'indice fini de l'anneau des entiers de E_1 opère sur $\underline{A}$ (de sorte que $\underline{A}$ est "de type (CM)"). Le module de Tate V de $\underline{A}$, tensorisé avec $\mathbf{Q}_p$, est un E_1-espace vectoriel de dimension 1. Comme l'action de G_K sur V est E_1-linéaire, elle est donnée par un homomorphisme $\chi_{\underline{A}} : G_K \to E_1^*$. Par passage aux enveloppes algébriques, on en déduit, comme au n° 2.1, un homomorphisme

$$\rho_{\underline{A}} : H^{ab}_{div} \to T_{E_1} .$$

D'après le th. 5, cet homomorphisme peut se factoriser en

$$H^{ab}_{div} \to T_E \xrightarrow{\delta} T_{E_1} ,$$

pour E et δ bien choisis. Indiquons brièvement comment on peut construire (E,δ) :

On considère la représentation de E_1 dans l'espace tangent à $\underline{A}$. C'est une représentation de dimension n, définie sur K. Elle provient par extension des scalaires d'une représentation définie sur un sous-corps E de K de degré fini sur $\mathbf{Q}_p$; on obtient ainsi un (E,E_1)-bimodule t, de dimension n sur E. Si $x \in E^*$, l'automorphisme x_t de t défini par x est E_1-linéaire ; soit

$$f(x) = \det_{E_1}(x_t)$$

son déterminant. L'application f de E^* dans E_1^* ainsi définie est "algébrique": elle se prolonge en un homomorphisme δ de T_E dans T_{E_1}. On peut prouver (par exemple en utilisant [6], III. App.) que le couple (E,δ) ainsi construit a les propriétés voulues.

2.4. Structure de $(H^o)^{ab}$

Si U est un sous-groupe ouvert de G_K, notons H_U le sous-groupe de H image réciproque de U par l'homomorphisme canonique $H \to G_K$ (cf. 1.6). Le groupe H^o est limite projective des H_U. On en conclut que

$$(H^o)^{ab} = \varprojlim H_U^{ab} = \varprojlim (H_U^{ab})^o .$$

Si K_U désigne la sous-extension de $\bar{K}$ fixée par U, le groupe H_U n'est autre que le "groupe H" relatif au corps de base K_U, cf. prop. 3. D'après le th. 4', appliqué à K_U, on a

$$(H_U^{ab})^o = \varprojlim_{E \subset K_U} T_E .$$

Comme la réunion des K_U est $\bar{K}$, on en déduit :

THÉORÈME 6 - <u>Le groupe</u> $(H^o)^{ab}$ <u>est isomorphe à</u> $\varinjlim_{E \subset \bar{K}} T_E$.

<u>Remarque</u>. La condition " $E \subset \bar{K}$ " est équivalente à " $E \subset \bar{Q}_p$ " . Il en résulte que le groupe $(H^o)^{ab}$ <u>ne dépend pas de</u> K : il ne dépend que de la caractéristique résiduelle p .

§ 3. Modules de Hodge-Tate à poids 0 et 1

3.1. Rappels sur les poids et racines (cf. [1], [11], SGA 3 III)

Soit M un groupe réductif connexe sur un corps E de caractéristique 0. Soit E' une extension galoisienne finie de E sur laquelle M se déploie ([1], 18.8) ; choisissons un tore maximal $\underline{T}$ de $M_{/E'}$ qui soit déployé (i.e. isomorphe à un produit de groupes $\mathbf{G}_{m/E'}$) et soit $\underline{B}$ un sous-groupe de Borel de $M_{/E'}$ contenant $\underline{T}$. Notons X (resp. Y) le groupe des caractères (resp. cocaractères, ou "groupes à un paramètre") de $\underline{T}$. On a :

$$X = \mathrm{Hom}(\underline{T}, \mathbf{G}_{m/E'}) \qquad \text{et} \qquad Y = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_{m/E'}, \underline{T}) .$$

Les groupes X et Y sont des $\mathbf{Z}$-modules libres duaux l'un de l'autre ; leur rang est égal à $\dim \underline{T}$. On pose

$$X_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \otimes X \qquad \text{et} \quad Y_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \otimes Y ;$$

ce sont des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels en dualité. Si $x \in X_{\mathbf{Q}}$ et $y \in Y_{\mathbf{Q}}$, le produit scalaire de x et y est noté $<x,y>$. On a

$$<x,y> \in \mathbf{Z} \qquad \text{si } x \in X \text{ et } y \in Y .$$

Système de racines

Le système de racines de $M_{/E'}$ relativement à $\underline{T}$ est une partie finie R de X (à savoir l'ensemble des poids $\neq 0$ de $\underline{T}$ dans la représentation adjointe de M), munie d'une injection $\alpha \mapsto \alpha^{\vee}$ dans Y. Si $\alpha \in R$, on a $<\alpha,\alpha^{\vee}> = 2$; la symétrie s_α de $X_{\mathbf{Q}}$ définie par

$$s_\alpha(x) = x - <x, \alpha^{\vee}> \alpha$$

laisse stable X et R ; sa transposée est la symétrie s_α de $Y_{\mathbf{Q}}$ telle que

$$s_\alpha(y) = y - <\alpha, y> \alpha^{\vee}$$

pour tout y. Le groupe W engendré par les s_α est le groupe de Weyl ; il opère sur $X_{\mathbf{Q}}$ et $Y_{\mathbf{Q}}$; on a

$$<wx, wy> = <x,y> \qquad \text{si } x \in X_{\mathbf{Q}} , \ y \in Y_{\mathbf{Q}} , \ w \in W .$$

Base

Au groupe de Borel $\underline{B}$ est associé une base B de R ; tout élément de R s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha$, où les n_α sont des entiers de même signe. Soit X_Q^+ (resp. Y_Q^+) l'ensemble des $x \in X_Q$ (resp. $y \in Y_Q$) tels que

$$<x,\alpha^\vee> \geqq 0 \quad (\text{resp. } <\alpha,y> \geqq 0) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in B ,$$

et posons

$$X^+ = X \cap X_Q^+ , \quad Y^+ = Y \cap Y_Q^+ .$$

Tout élément de X (resp. Y, X_Q , Y_Q) est le transformé par W d'un élément et d'un seul de X^+ (resp. Y^+ , X_Q^+ , Y_Q^+) .

<u>Décomposition de</u> X_Q <u>et</u> Y_Q

Soient $(R_i)_{i \in I}$ les <u>composants irréductibles</u> de R ; les $B_i = B \cap R_i$ sont les composantes connexes du <u>graphe de Coxeter</u> de W (Bourbaki, LIE V.VI). Soit X_i le sous-espace vectoriel de X_Q engendré par R_i , et soit Y_i le sous-espace vectoriel de Y_Q engendré par l'ensemble $R_i^\vee$ des $\alpha^\vee$ avec $\alpha \in R_i$. Si X_c (resp. Y_c) désigne l'orthogonal dans X_Q (resp. dans Y_Q) de la somme des Y_i (resp. des X_i) , on a

$$X_Q = X_c \oplus \bigoplus_{i \in I} X_i \qquad \text{et} \qquad Y_Q = Y_c \oplus \bigoplus_{i \in I} Y_i .$$

Ces décompositions en sommes directes reflètent la décomposition du groupe $M_{/E'}$, à isogénie près, en produit direct d'un tore M_c et de groupes simples M_i , $i \in I$.

Si $x \in X_Q$, nous noterons x_c et $(x_i)_{i \in I}$ les composantes de x dans X_c et dans les X_i ; nous emploierons une notation analogue pour les composantes d'un élément y de Y_Q. On a

$$<x,y> = <x_c , y_c> + \sum_{i \in I} <x_i , y_i> .$$

Si x et y sont des éléments non nuls de $X_i^+ = X_i \cap X_Q^+$ et de $Y_i^+ = Y_i \cap Y_Q^+$, on a $<x,y> > 0$.

<u>Action de</u> $\Gamma = \mathrm{Gal}(E'/E)$

Changer le couple $(\underline{T},\underline{B})$ ne modifie pas (à isomorphisme unique près) le système $(X,Y,R,\alpha \mapsto \alpha^\vee, B)$. Ce système est donc attaché canoniquement au groupe $M_{/E'}$ (cf. Bourbaki, LIE VIII.110, Remarque 2). Du fait que M est défini sur E , il en résulte que le groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(E'/E)$ <u>opère de façon naturelle sur</u> $(X,Y,R,\alpha \mapsto \alpha^\vee,B)$, cf. [11], 3.1 ainsi que Bourbaki, LIE VIII.227, exerc.8. En particulier, Γ opère sur le groupe de Weyl W et sur l'ensemble I des composants irréductibles de R.

On a

$$<\gamma x\,,\,\gamma y> = <x,y>\quad,\quad \gamma w x = \gamma(w)\gamma x\quad,\quad \gamma X_c = X_c\quad,\quad \gamma X_i = X_{\gamma i}\ ,$$

si $x\in X_{\mathbf{Q}}$, $y\in Y_{\mathbf{Q}}$, $w\in W$, $i\in I$ et $\gamma\in\Gamma$.

<u>Représentations linéaires</u> (cf. [11], ainsi que Bourbaki, LIE VIII, § 7)

Soient V une représentation linéaire de M sur E , et $V_{E'}$ la représentation linéaire de $M_{/E'}$ déduite de V par extension des scalaires à E' . Le tore $\underline{T}$ opère sur $V_{E'}$. Si $\omega\in X$, soit $V_{E'}(\omega)$ le sous-espace propre de $V_{E'}$ correspondant à ω : on a $v\in V_{E'}(\omega)$ si et seulement si $tv = \omega(t)v$ pour tout point t de $\underline{T}$. L'espace $V_{E'}$ est somme directe des $V_{E'}(\omega)$, pour $\omega\in X$. On dit que ω est un <u>poids</u> de V si $V_{E'}(\omega)\neq 0$; la dimension $n_V(\omega)$ de $V_{E'}(\omega)$ est alors appelée la <u>multiplicité</u> de ω . L'ensemble $\Omega(V)$ des poids de V est une <u>partie finie</u> de X , stable par W et Γ . Pour que V soit une représentation linéaire <u>fidèle</u> (resp. <u>à noyau fini</u>) de M , il faut et il suffit que $\Omega(V)$ <u>engendre</u> le Z-module X (resp. le Q-espace vectoriel $X_{\mathbf{Q}}$) . La connaissance des poids de V et de leurs multiplicités détermine la représentation V à isomorphisme près.

On peut décomposer $V_{E'}$ en somme directe de représentations absolument irréductibles. Si V^{λ} est l'une de ces représentations, il existe une droite D^{λ} de V^{λ} et une seule qui est stable par le groupe de Borel $\underline{B}$. L'action de $\underline{T}$ sur D^{λ} se fait grâce à un caractère χ^{λ} qui appartient à X^{+} . On a $D^{\lambda} = V^{\lambda}\cap V_{E'}(\chi^{\lambda})$; le caractère χ^{λ} est de multiplicité 1 dans V^{λ} . L'ensemble $\Omega(V^{\lambda})$ des poids de V^{λ} est le R-<u>saturé</u> de χ^{λ} , au sens de Bourbaki, LIE VIII.125. Tout élément de cet ensemble est de la forme

$$\chi^{\lambda} - \sum_{\alpha\in B} n_{\alpha}\alpha\ ,$$

où les n_{α} sont des entiers $\geqq 0$. On dit que χ^{λ} est <u>le plus haut poids</u> de V^{λ} . Le <u>plus bas poids</u> de V^{λ} est $w_o\chi^{\lambda}$, où w_o est l'unique élément de W qui transforme B en $-B$ [l'automorphisme $-w_o$ est <u>l'involution fondamentale</u> de X ; nous le noterons $x\mapsto x'$] .

3.2. <u>Représentations de</u> M <u>à poids</u> 0 <u>et</u> 1

On conserve les notations M, $\underline{T}$, $\underline{B}$, R, ... du n° 3.1. On se donne :

a) une <u>représentation linéaire</u> V du groupe réductif M ,

b) un <u>corps algébriquement clos</u> C contenant E' ,

c) un <u>groupe à un paramètre</u> $h_M : G_{m/C}\to M_{/C}$ défini sur C .

On fait les <u>hypothèses</u> suivantes :

(i) V est fidèle ;

(ii) tout sous-groupe algébrique normal N de M, défini sur E, tel que $N_{/C}$ contienne $\mathrm{Im}(h_M)$, est égal à M ;

(iii) l'action de $G_{m/C}$ sur $V_C = C \otimes_E V$ définie par h_M a pour seuls poids 0 et 1.

[Rappelons que le groupe des caractères de G_m s'identifie de façon naturelle à $\mathbf{Z}$; cela donne un sens à (iii).]

Nous allons voir que ces hypothèses entraînent des propriétés très particulières pour l'ensemble $\Omega(V)$ des poids de V, ainsi que pour le groupe à un paramètre h_M. Tout d'abord :

LEMME 2 - <u>Il existe</u> $h_o \in Y^+$ <u>tel que</u> h_M <u>et</u> h_o, <u>considérés comme homomorphismes de</u> $G_{m/C}$ <u>dans</u> $M_{/C}$, <u>soient conjugués l'un de l'autre par un automorphisme intérieur de</u> $M_{/C}$; <u>on a</u>

(1) $\langle \omega , h_o \rangle = 0$ <u>ou</u> 1 <u>pour tout</u> $\omega \in \Omega(V)$.

(On peut en fait montrer que h_o est <u>unique</u>.)

D'après [1], cor. 11.3, il existe un automorphisme intérieur de $M_{/C}$ qui transforme h_M en un homomorphisme

$$h_1 : G_{m/C} \to \underline{T}_{/C} \subset M_{/C}$$

à valeurs dans $\underline{T}_{/C}$. Du fait que $\underline{T}$ est déployé sur E', h_1 est rationnel sur E', donc appartient à Y. D'après ce qui a été rappelé au n° 3.1, il existe $w \in W$ tel que $h_o = wh_1$ appartienne à Y^+ ; comme tout élément de W est induit par un automorphisme intérieur de $M_{/C}$, l'élément h_o répond à la question. Les actions de $G_{m/C}$ sur V_C définies par h_M et par h_o sont conjuguées, donc ont même poids ; vu (iii), ces poids sont égaux à 0 ou 1, ce qui démontre la formule (1).

<u>Remarque</u>. Comme $\Omega(V)$ est stable par le produit semi-direct ΓW de Γ par W, la formule (1) entraîne :

(2) $\langle \omega , h \rangle = 0$ <u>ou</u> 1 <u>pour tout</u> $\omega \in \Omega(V)$ <u>et tout</u> $h \in \Gamma W h_o$.

LEMME 3 - (a) <u>L'ensemble</u> $\Omega(V)$ <u>des poids de</u> V <u>engendre le</u> $\mathbf{Z}$-<u>module</u> X.

(b) <u>L'orbite</u> $\Gamma W h_o$ <u>de</u> h_o <u>par le groupe</u> ΓW <u>engendre le</u> $\mathbf{Q}$-<u>espace vectoriel</u> $Y_{\mathbf{Q}}$.

L'assertion (a) traduit l'hypothèse que V est fidèle. D'autre part, les sous-espaces de $Y_{\mathbf{Q}}$ stables par W et Γ correspondent de façon naturelle aux sous-groupes normaux connexes de M définis sur E ; si le sous-espace engendré par $\Gamma W h_o$ était distinct de $Y_{\mathbf{Q}}$, il existerait un tel sous-groupe N , distinct de M , et tel que l'image de h_o soit contenue dans $N_{/C}$; il en serait alors de même de l'image de h_M , ce qui contredirait l'hypothèse (ii). D'où (b).

LEMME 4 - <u>Si</u> $\alpha \in R$, $\omega \in \Omega(V)$ <u>et</u> $h \in \Gamma W h_o$, <u>on a</u>

(3) $$\langle \omega , \alpha^{\vee} \rangle = 0 \ , \ 1 \ \underline{\text{ou}} \ -1 \ ,$$

(4) $$\langle \alpha , h \rangle = 0 \ , \ 1 \ \underline{\text{ou}} \ -1 \ .$$

(Noter le rôle symétrique joué par les éléments de $\Omega(V)$ et de $\Gamma W h_o$: ils s'échangent par " dualité de Langlands " . Je ne connais pas d'explication <u>a priori</u> de ce phénomène.)

Appliquons (2) à ω et à $s_{\alpha}\omega = \omega - \langle \omega , \alpha^{\vee} \rangle \alpha$. On obtient

$$\langle \omega , h \rangle = 0 \ \text{ou} \ 1$$

$$\langle \omega , h \rangle - \langle \omega , \alpha^{\vee} \rangle \langle \alpha , h \rangle = 0 \ \text{ou} \ 1 \ .$$

Par différence, cela donne :

(5) $$\langle \omega , \alpha^{\vee} \rangle \langle \alpha , h \rangle = 0 , 1 \ \text{ou} \ -1 \ .$$

Remarquons maintenant que, pour ω et α fixés, on peut choisir $h \in \Gamma W h_o$ tel que $\langle \alpha , h \rangle \neq 0$: cela résulte du lemme 3 (b). Comme $\langle \alpha , h \rangle$ est un entier non nul, et que $\langle \omega , \alpha^{\vee} \rangle$ est un entier, (5) n'est possible que si $\langle \omega , \alpha^{\vee} \rangle = 0 , 1$ ou -1 , ce qui démontre (3). De même, pour α et h fixés, on peut choisir $\omega \in \Omega(V)$ tel que $\langle \omega , \alpha^{\vee} \rangle \neq 0$: cela résulte du lemme 3 (a) ; on en déduit comme ci-dessus que $\langle \alpha , h \rangle = 0 , 1$ ou -1 .

[<u>Variante</u>. Puisque V est un M-module fidèle, la représentation adjointe de M est isomorphe à une sous-représentation de End (V). Or les poids de End (V) (pour l'action de $\mathbf{G}_{m/C}$ donnée par h , h_o ou h_M) sont différences de deux poids de V (cf. [8], lemme 11.3), donc appartiennent à $\{0 , 1 , -1\}$. On retrouve ainsi la formule (4) .]

Soit $\Omega^{+}(V)$ l'ensemble des plus hauts poids des composantes irréductibles de $V_{E'}$; on a $\Omega^{+}(V) \subset X^{+} \cap \Omega(V)$, et le R-saturé de $\Omega^{+}(V)$ est $\Omega(V)$, cf. n° 3.1.

LEMME 5 - *Soit* R_i $(i \in I)$ *un composant irréductible de* R.

(a) *Il existe* $\omega \in \Omega^+(V)$ *tel que* $\omega_i \neq 0$; *l'élément* ω_i *de* X_i *est alors un poids* minuscule *du système de racines* R_i , *au sens de Bourbaki*, LIE VIII.129.

(b) *Il existe* $h \in \Gamma h_o$ *tel que* $h_i \neq 0$; *l'élément* h_i *de* Y_i *est alors un poids* minuscule *du système de racines* $R_i^\vee$ *dual de* R_i .

(Rappelons que ω_i et h_i désignent les composantes d'indice i de ω et de h , cf. n° 3.1.)

Si l'on avait $\omega_i = 0$ pour tout $\omega \in \Omega^+(V)$, on aurait aussi $\omega_i = 0$ pour tout $\omega \in \Omega(V)$ puisque $\Omega(V)$ est le R-saturé de $\Omega^+(V)$, et cela contredirait le lemme 3 (a). D'autre part, si $\omega_i \neq 0$, la formule (3) du lemme 4, appliquée avec $\alpha \in R_i$, montre que ω_i satisfait à la condition (iii) de Bourbaki, *loc. cit.*, déf. 1, donc est minuscule. D'où (a).

De même, l'existence de $h \in \Gamma h_o$ tel que $h_i \neq 0$ résulte du lemme 3 (b) ; le fait que " $h_i \neq 0$ " $\Rightarrow$ " h_i minuscule" résulte de la formule (4) du lemme 4. D'où (b).

Le lemme 5 entraîne déjà un certain nombre de propriétés de V :

PROPOSITION 4 - *On a* $\Omega(V) = W.\Omega^+(V)$.

Cela résulte de (a), et du fait que le R-saturé d'un poids minuscule est égal à son orbite par W, cf. Bourbaki, *loc. cit.* , condition (i).

PROPOSITION 5 - *Soit* $\mathfrak{m}$ *l'algèbre de Lie de* M, *et soit* $\mathfrak{m}^\alpha$ *le sous-espace propre de* $\mathfrak{m}_{E'} = E' \otimes \mathfrak{m}$ *correspondant à une racine* $\alpha \in R$. *Si* x *appartient à* $\mathfrak{m}^\alpha$, *l'endomorphisme* x_V *de* $V_{E'}$ *défini par* x *est de carré nul.*

Cela résulte de la prop. 7 de Bourbaki, LIE VIII.128.

COROLLAIRE - *Les éléments* x *de* $\mathfrak{m}_{E'}$ *tels que* $(x_V)^2 = 0$ *engendrent l'algèbre dérivée de* $\mathfrak{m}_{E'}$.

(Noter l'analogie avec les " Quadratic Pairs " de Thompson [10] .)

PROPOSITION 6 - *Le groupe* $M_{/E'}$ *n'a aucun quotient* $\neq \{1\}$ *qui soit simplement connexe.*

Il suffit de prouver que $M_{/E'}$ n'a aucun quotient *simple* simplement connexe. Un tel quotient correspond à un composant irréductible R_i de R ayant la propriété suivante : pour tout $y \in Y$, la composante y_i de y appartient au sous-groupe $\mathbf{Z}.R_i^\vee$ de Y_i engendré par $R_i^\vee$ (c'est ainsi que se traduit la simple connexion, cf. SGA 3 III, p. 129). Or, si l'on prend pour y un élément de Γh_o satisfaisant au lemme 5 (b), la composante y_i de y est minuscule ; d'après la prop. 8 de Bourbaki, LIE VIII.128, y_i n'appartient pas à $\mathbf{Z}.R_i^\vee$. D'où la proposition.

COROLLAIRE - Aucun quotient de $M_{/E'}$ n'est isomorphe à SL_n $(n \geqq 2)$, $Sp_{2n} (n \geqq 1)$, G_2, F_4 ou E_8.

Revenons aux propriétés des ω_i et des h_i :

LEMME 6 - Soient $\omega \in \Omega^+(V)$ et $h \in \Gamma h_o$. Alors :

(a) Il existe au plus un élément i de I tel que $\omega_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$.

(b) Si $i \in I$ est tel que $\omega_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$, on a

$$\langle \omega_i , h_i \rangle + \langle \omega_i' , h_i \rangle = 1 , \tag{6}$$

où ω_i' est le transformé de ω_i par l'involution fondamentale $-w_o$, cf. n° 3.1.

Soit J l'ensemble des $i \in I$ tels que $\omega_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$. Si $i \in J$, le lemme 5 montre que (ω_i , h_i) est un couple minuscule : ses deux composantes sont minuscules. Définissons alors la hauteur $\ell(\omega_i , h_i)$ d'un tel couple par la formule

$$\ell(\omega_i , h_i) = \langle \omega_i , h_i \rangle + \langle \omega_i' , h_i \rangle . \tag{7}$$

Comme ω_i appartient à $X_i^+ - \{0\}$ et h_i à $Y_i^+ - \{0\}$, les produits scalaires $\langle \omega_i , h_i \rangle$ et $\langle \omega_i' , h_i \rangle$ sont > 0, et il en est de même de $\ell(\omega_i , h_i)$. De plus, comme $\omega_i + \omega_i' = \omega_i - w_o\omega_i$, et que ω_i est un poids de X_i, $\omega_i + \omega_i'$ appartient au sous-groupe $\mathbf{Z}.R_i$ de X_i engendré par R_i (Bourbaki, LIE VI.167, prop. 27). Ceci entraîne que son produit scalaire $\ell(\omega_i , h_i)$ avec h_i est un entier. On conclut de là que $\ell(\omega_i , h_i)$ est un entier $\geqq 1$.

D'autre part, d'après (2) appliqué à ω et $w_o\omega = -\omega'$, on a :

$$\langle \omega_c , h_c \rangle + \sum_{i \in J} \langle \omega_i , h_i \rangle = 0 \text{ ou } 1 \tag{8}$$

$$\langle \omega_c' , h_c \rangle + \sum_{i \in J} \langle \omega_i' , h_i \rangle = 0 \text{ ou } -1 . \tag{9}$$

Comme w_o opère trivialement sur X_c, on a $\omega_c' = -\omega_c$. En ajoutant les équations ci-dessus, on obtient :

$$\sum_{i\in J} \{<\omega_i\,,\,h_i> + <\omega'_i\,,\,h_i>\} = 0,\ 1 \quad \text{ou} \quad -1\ ,$$

autrement dit

$$\sum_{i\in J} \ell(\omega_i\,,\,h_i) = 0,\ 1 \quad \text{ou} \quad -1\ .$$

Comme les $\ell(\omega_i\,,\,h_i)$ sont des entiers $\geqq 1$, ceci n'est possible que si $J = \emptyset$, ou si J est réduit à un élément $\{i\}$ et si $\ell(\omega_i\,,\,h_i) = 1$, ce qui démontre le lemme.

Remarques

1) Si $J = \{i\}$, les formules (8) et (9) entraînent :

(10) $$<\omega_c\,,\,h_c> = <\omega'_i\,,\,h_i> = 1 - <\omega_i\,,\,h_i>\ .$$

La connaissance des $<\omega_i\,,\,h_i>$ détermine donc celle de $<\omega_c\,,\,h_c>$. Par contre, si $J = \emptyset$, on a simplement

$$<\omega_c\,,\,h_c> \; = <\omega\,,\,h> = 0 \quad \text{ou} \quad 1\ ,$$

ce qui ne suffit pas à déterminer $<\omega_c\,,\,h_c>$.

2) Les arguments utilisés ci-dessus sont essentiellement les mêmes que ceux de Springer [8], § 11 ; la différence principale est la présence du groupe Γ qui n'apparaît pas dans [8], où le corps de base est supposé algébriquement clos.

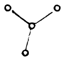
La proposition suivante résume le lemme 5 et la partie (b) du lemme 6 :

PROPOSITION 7 - *Pour tout* $i \in I$, *il existe* $\omega \in \Omega^+(V)$ *et* $h \in \Gamma h_o$ *tels que* $\omega_i \neq 0$ *et* $h_i \neq 0$; *tout couple* $(\omega_i\,,\,h_i)$ *ainsi obtenu est un couple minuscule de hauteur* 1 (au sens défini ci-dessus).

COROLLAIRE 1 - *Tous les composants irréductibles de* R *sont de type classique* A_n , B_n , C_n *ou* D_n .

En effet, les systèmes de racines irréductibles de type G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 ne possèdent pas de couple minuscule de hauteur 1 , cf. Annexe.

COROLLAIRE 2 - *Aucun composant irréductible de* R *n'est de type* D_4 *trialitaire*.

(Soit Γ_i le sous-groupe de Γ qui fixe i . Le groupe Γ_i opère sur R_i . On dit que R_i est "de type D_4 trialitaire" s'il est de type D_4 et si l'image de Γ_i dans $\mathrm{Aut}(R_i)$ est d'ordre 3 ou 6 , autrement dit si Γ_i permute transitivement les trois sommets terminaux du graphe de Dynkin  de R_i .)

Supposons que R_i soit de type D_4 trialitaire. Le groupe Γ_i permute transitivement les trois poids minuscules ϖ_1 , ϖ_3 , ϖ_4 de R_i , cf. Annexe. Comme l'un de ces poids est de la forme ω_i , avec $\omega \in \Omega^+(V)$, ils le sont tous. Choisissons alors $h \in \Gamma h_o$ tel que $h_i \neq 0$. D'après la prop. 7, les trois couples minuscules

$$(\varpi_1 , h_i) \ , \ (\varpi_3 , h_i) \ \text{ et } \ (\varpi_4 , h_i)$$

sont de hauteur 1, ce qui est impossible (cf. Annexe).

Le cas irréductible

Supposons V irréductible. Son commutant Δ est un corps. Notons E_1 le centre de Δ , et posons

$$[\Delta : E_1] = m^2 \quad \text{et} \quad [E_1 : E] = r.$$

L'entier m est l'indice de Schur de V. La représentation $V_{E'}$ de $M_{/E'}$ se décompose en r représentations irréductibles conjuguées, chacune de multiplicité m . Le groupe Γ opère transitivement sur $\Omega^+(V)$, qui a r éléments. Si $\omega \in \Omega(V)$, la multiplicité $n_V(\omega)$ de ω est égale à m : c'est clair lorsque ω appartient à $\Omega^+(V)$, et le cas général résulte de ce que $\Omega(V)$ est égal à $W.\Omega^+(V)$, cf. prop. 4. On a en particulier

$$\dim V = m \operatorname{Card} \Omega(V) = m \operatorname{Card} W.\Omega^+(V).$$

D'autre part, si ω est un élément de $\Omega^+(V)$, on a

$$\operatorname{Card} W.\Omega^+(V) = r \operatorname{Card} W\omega = r \prod_{i \in I} d(\omega_i) ,$$

où $d(\omega_i) = \operatorname{Card} W\omega_i$. D'où :

PROPOSITION 8 - Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a

$$\dim V = m r \prod_{i \in I} d(\omega_i) . \tag{11}$$

Noter que $d(\omega_i) = 1$ si $\omega_i = 0$; lorsque $\omega_i \neq 0$, ω_i est minuscule, et $d(\omega_i)$ se calcule sans difficulté (cf. Annexe) ; on trouve en particulier que $d(\omega_i)$ est pair si R_i n'est pas de type A . Comme, pour $i \in I$ donné, on peut choisir ω tel que $\omega_i \neq 0$ (lemme 5), on en conclut en appliquant (11) :

COROLLAIRE - Si V est irréductible de dimension impaire, tous les composants irréductibles de R sont de type A.

Remarque

Lorsque $r = 1$, ce qui est le cas lorsque V est absolument simple, on peut préciser davantage la structure de M et de V : si ω est l'unique élément de $\Omega^+(V)$, on a $\omega_i \neq 0$ pour tout $i \in I$ d'après le lemme 5 (a) ; vu le lemme 6 (a), il existe au plus un élément i de I tel que $(h_o)_i \neq 0$. D'où deux cas :

a) $(h_o)_i = 0$ pour tout $i \in I$; d'après le lemme 3, cela entraîne que $I = \emptyset$, i.e. que M est commutatif ; on a alors $m = 1$ et $\dim V = 1$; le groupe M est, soit réduit à $\{1\}$ (poids 0), soit égal à $\mathbf{G}_m$ (poids 1).

b) Il existe un unique élément i de I tel que $(h_o)_i \neq 0$; utilisant le lemme 5 (b), on voit que $I = \Gamma i$, donc que Γ <u>opère transitivement sur</u> I. Soit Γ_i le fixateur de i dans Γ, et soit E_i le sous-corps de E' fixé par Γ_i. Le <u>groupe adjoint</u> de M s'obtient par restriction des scalaires de E_i à E à partir d'un groupe <u>absolument simple</u> sur E_i, de type $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{D}$. La composante neutre du centre de M est le groupe $\mathbf{G}_m$, opérant par homothéties. On a

$$\dim V = m\, d(\omega_i)^{[E_i\,:\,E]} . \tag{12}$$

3.3. <u>Application aux modules de Hodge-Tate à poids</u> 0 <u>et</u> 1

Soit V un module de Hodge-Tate, et soit H_V le groupe algébrique correspondant, cf. n° 1.3. Soit V_{ss} le <u>semi-simplifié</u> de V, i.e. la somme directe des quotients d'une suite de Jordan-Hölder de V. Le groupe H_V opère sur V_{ss}, et le noyau de cette action est le <u>radical unipotent</u> U_V de H_V, autrement dit le plus petit sous-groupe normal de H_V tel que H_V/U_V soit réductif ([1], 11.21). Si l'on s'intéresse simplement aux quotients réductifs de H_V, on peut donc supposer que $V = V_{ss}$, i.e. que V est <u>semi-simple</u> ; dans ce cas H_V est <u>réductif</u>.

Faisons cette hypothèse, et supposons en outre que <u>les poids de</u> V <u>sont</u> 0 <u>et</u> 1, autrement dit que $V_C = V_C(0) \oplus V_C(1)$. Si l'on pose $E = \mathbf{Q}_p$, $M = H_V^o$, les hypothèses de 3.2 sont satisfaites, en prenant pour h_M le groupe à un paramètre canonique h_V (cf. 1.4) : (i) est évident, (ii) est une conséquence du théorème de Sen (th. 2), et (iii) traduit le fait que les poids de V sont égaux à 0 et 1. <u>On peut donc appliquer au groupe</u> $M = H_V^o$ <u>les résultats du</u> n° 3.2, <u>et en particulier les prop</u>. 4, 5, 6, 7, 8. On obtient ainsi, par exemple :

THÉORÈME 7 - <u>Si</u> V <u>est un module de Hodge-Tate semi-simple à poids</u> 0 <u>et</u> 1, <u>les composants irréductibles du système de racines de</u> H_V^o <u>sont de type</u> $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ <u>ou</u> $\mathbf{D}$; <u>si</u> V <u>est irréductible de dimension</u> impaire, <u>ces composants sont tous de type</u> $\mathbf{A}$. <u>Aucun quotient</u> $\neq \{1\}$ <u>de</u> H_V^o <u>n'est simplement connexe</u>.

COROLLAIRE - <u>Tout quotient simple du groupe proalgébrique</u> H_{div} (cf. 1.6) <u>est de type</u> **A, B, C** <u>ou</u> **D** .

<u>Problème</u>

Existe-t-il des <u>groupes</u> p-<u>divisibles</u> correspondant aux divers couples (V, H_V^o) qui sont <u>a priori</u> possibles d'après le n° 3.2 ? Par exemple, peut-on construire un tel groupe pour lequel le système de racines de H_V^o soit de type D_n , le module V étant (à l'action du centre près) une représentation semi-spinorielle de D_n , de degré 2^{n-1} ? La théorie de Fontaine [2] devrait permettre de répondre à ce genre de question.

Annexe - <u>Couples minuscules de type</u> $\mathbf{A}_n , B_n , \dots , E_8$

Pour chaque système de racines irréductible réduit, on note $\{\alpha_1 , \dots , \alpha_n\}$ sa base, numérotée comme dans Bourbaki, LIE VI, Planches, $\{\varpi_1 , \dots , \varpi_n\}$ ses poids fondamentaux, et $\{\check{\varpi}_1 , \dots , \check{\varpi}_n\}$ ceux du système dual. Les ϖ_i et les $\check{\varpi}_i$ sont caractérisés par

$$<\varpi_i , \check{\alpha}_j> = <\alpha_j , \check{\varpi}_i> = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j . \end{cases}$$

Tout poids minuscule est un poids fondamental ; pour qu'un poids fondamental ϖ_i soit minuscule, il faut et il suffit que le coefficient de $\check{\alpha}_i$ dans la plus grande racine du système dual soit égal à 1 (Bourbaki, LIE VIII.128, prop.8). Cela rend immédiate la détermination des poids minuscules. On obtient ainsi :

<u>Type</u> $\mathbf{A}_n$ $(n \geqq 1)$

Tous les ϖ_i et tous les $\check{\varpi}_j$ sont minuscules. L'involution fondamentale $-w_o$ transforme i en $i' = n + 1 - i$ et j en $j' = n + 1 - j$. La hauteur du couple minuscule $(\varpi_i , \check{\varpi}_j)$ est donnée par :

$$\ell(\varpi_i , \check{\varpi}_j) = <\varpi_i , \check{\varpi}_j> + <\varpi_{i'} , \check{\varpi}_j> = \mathrm{Inf}(i,j,i',j') .$$

Les couples minuscules de hauteur 1 sont :

$$(\varpi_1 , \check{\varpi}_i) , (\varpi_n , \check{\varpi}_i) , (\varpi_i , \check{\varpi}_1) , (\varpi_i , \check{\varpi}_n) \quad \text{avec } 1 \leqq i \leqq n .$$

La représentation associée à ϖ_i est la puissance extérieure i-ème de la représentation standard de degré $n+1$. Son degré

$$d(\varpi_i) = \operatorname{Card} W\varpi_i$$

est égal à $\binom{n+1}{i}$.

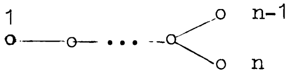
Type B_n $(n \geqq 2)$

Le couple $(\varpi_n, \varpi_1^\vee)$ est le seul couple minuscule ; sa hauteur est égale à 1. La représentation associée à ϖ_n est la représentation spinorielle ; son degré $d(\varpi_n)$ est 2^n.

Type C_n $(n \geqq 2)$

Ce cas est dual du précédent. Le couple $(\varpi_1, \varpi_n^\vee)$ est le seul couple minuscule ; sa hauteur est égale à 1. La représentation associée à ϖ_1 est la représentation standard ; son degré $d(\varpi_1)$ est $2n$.

Type D_n $(n \geqq 4)$



Il y a trois poids minuscules ϖ_1, ϖ_{n-1} et ϖ_n qui correspondent à la représentation standard et aux deux représentations semi-spinorielles. Leurs degrés sont :

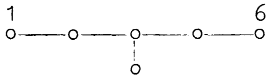
$$d(\varpi_1) = 2n, \quad d(\varpi_{n-1}) = 2^{n-1} \quad \text{et} \quad d(\varpi_n) = 2^{n-1}.$$

Les couples minuscules de hauteur 1 sont

pour $n = 4$: $(\varpi_i, \varpi_j^\vee)$ avec $i, j \in \{1, 3, 4\}$ et $i \neq j$

pour $n \geqq 5$: $(\varpi_1, \varpi_{n-1}^\vee)$, $(\varpi_1, \varpi_n^\vee)$, $(\varpi_{n-1}, \varpi_1^\vee)$ et $(\varpi_n, \varpi_1^\vee)$.

Type E_6

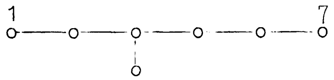


Il y a quatre couples minuscules :

$$(\varpi_1, \varpi_1^\vee), \ (\varpi_1, \varpi_6^\vee), \ (\varpi_6, \varpi_1^\vee) \ \text{et} \ (\varpi_6, \varpi_6^\vee).$$

Ils sont de hauteur 2.

Type E_7



Il y a un seul couple minuscule : $(\varpi_7, \varpi_7^\vee)$. Il est de hauteur 3.

Types G_2, F_4, E_8

Il n'y a pas de poids minuscule.

* * *

Bibliographie

[1] A. BOREL - Linear Algebraic Groups, Notes by Hyman Bass, Benjamin, New York, 1969.

[2] J-M. FONTAINE - Modules galoisiens, modules filtrés, et anneaux de Barsotti-Tate, ce volume.

[3] N. SAAVEDRA RIVANO - Catégories Tannakiennes, Lect. Notes in Math. 265, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.

[4] S. SEN - Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Math. 97 (1973), 160-170.

[5] J-P. SERRE - Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles, Proc. Conf. Local Fields (T.A. Springer edit.), Springer-Verlag, Heidelberg, 1967, 118-131.

[6] —— - Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves, Benjamin, New York, 1968.

[7] —— - Résumé des cours de 1967-1968, Annuaire du Collège de France (1968-1969), 45-50.

[8] T.A. SPRINGER - Jordan Algebras and Algebraic Groups, Ergebn. der Math. 75, Springer-Verlag, Heidelberg, 1973.

[9] J. TATE - p-divisible groups, Proc. Conf. Local Fields (T.A. Springer edit.), Springer-Verlag, Heidelberg, 1967, 158-183.

[10] J.G. THOMPSON - Quadratic Pairs, Congrès Intern. Math. Nice, 1970, tome I, 375-376.

[11] J. TITS - Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, J. reine ang. Math. 247 (1971), 196-220.

SGA 3 III M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK - Schémas en groupes III, Lect. Notes in Math. 153, Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.

SGA 7 I A. GROTHENDIECK - Groupes de monodromie en géométrie algébrique, Lect. Notes in Math. 288, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.

Collège de France
75231 PARIS Cedex 05

Errata et Compléments

à

[6] Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves

- I-12. La question 3 est trop optimiste. Il est facile de faire des contre-exemples en prenant des représentations à image finie d'indice de Schur > 1 .

- I-13, ℓ. 8-9. Le "problème des groupes de congruence" pour les variétés abéliennes a une réponse positive (cf. Izv. Akad. Nauk CCCP, 35 (1971), 731-737).

- I-17, ℓ. 19-20. L'existence des représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires a été prouvée par Deligne (Sém. Bourbaki 1968/69, exposé 355).

- I-29, ℓ. 8. Remplacer "$c_X + o(n)$" par "$c_X n + o(n)$" .

- II-12, ℓ. -4. Remplacer "$U_{\ell,m}$" par "$\pi_\ell(U_{\ell,m})$" .

- II-20, ℓ. 13. Remplacer "Assertion a)" par "Assertion 3)".

- II-25, ℓ. -8. Remplacer "$\epsilon(I)$" par "$e(I)$" .

- III-13, ℓ. -4. Remplacer "Bambaki" par "Bourbaki".

- III-36, ℓ. -6. Remplacer "in Q" par "is Q" .

- III-37, ℓ. 5 ; III-38, ℓ. 7,11 ; III-51, ℓ. -4. L'espace $H^1(G, C)$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur K , et non sur C .

- IV-14, ℓ.4. Ajouter l'hypothèse que C est semi-simple.

- IV-18, ℓ.8. Remplacer "Gal(K/K)" par "Gal($\bar{K}$/K)" .

- IV-21, ℓ. -7, -8. La conjecture faite dans cette Remarque a été démontrée (cf. Invent. math. 15 (1972), 259-331).

- IV-28, ℓ. 8. Remplacer "order 2" par "order 4" .

- IV-28, ℓ. 9. Remplacer "order 6" par "order 12" .

- IV-28, ℓ. 11. Remplacer "an isomorphism" par "a homomorphism with a kernel of order 2" .

- IV-41, ℓ. 13. Supprimer "in the near future". Ajouter "A different proof has been published by W. Messing (Lect. Notes in Math. 264, Springer-Verlag, 1972)".

- B-2, [17].Remplacer "89" par "81" .

- B-3, [32].Supprimer "and applications". Remplacer "In preparation " par "Ann. of Math. 88 (1968), 492-517".
