

Astérisque

MICHEL RAYNAUD

« *p*-torsion » du schéma de Picard

Astérisque, tome 64 (1979), p. 87-148

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__64__87_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

"p-TORSION" DU SCHEMA DE PICARD

par

Michel RAYNAUD

(Orsay *)

--:--:--

0. Soient R un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique 0, de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, π un générateur de l'idéal maximal de R , v la valuation de R normalisée par $v(\pi) = 1$ et $e = v(p)$ l'indice de ramification absolue de R . Rappelons que πR est un idéal à puissances divisées dès que $e \leq p-1$ et que la série exponentielle $\exp(x)$, $x \in \pi R$, converge dès que $v(x) \geq p-1$.

Soient X un R -schéma propre et lisse, X_K sa fibre générique, $\bar{X}$ sa fibre fermée, $P = \underline{\text{Pic}}_{X/R}$ le foncteur de Picard relatif de X sur R qui se trouve être un schéma en groupes ([14] 3.3.1), P^τ le sous-schéma en groupes ouvert de P associé aux faisceaux inversibles numériquement équivalents à zéro qui est un schéma en groupes propre (cf. SGA 6 XIII). Pour tout entier $n \geq 0$, notons ${}_nP$ le noyau de l'élévation à la puissance p^n dans P ; ${}_nP$ est un schéma en groupes

* Equipe de recherche associée au CNRS n° 653.

fini.

Nous allons établir les résultats suivants :

Théorème 1. Supposons $e < p-1$. Alors :

- i) $\forall n > 0$, ${}_n P$ est plat sur R ;
- ii) P^τ est plat sur R ;
- iii) il existe une suite exacte de R -schémas en groupes :

$$0 \rightarrow A \rightarrow P^\tau \rightarrow T \rightarrow 0$$

où A est un R -schéma abélien qui a pour fibres les composantes
neutres réduites des fibres de P et où T est un R -schéma en
groupes fini et plat, qui a pour fibres la torsion des fibres de P/A
(y compris la torsion radicielle qui mesure le défaut de lissité de
 $\bar{P} = \underline{\text{Pic}}_{\bar{X}/k}$).

En fait, compte tenu des propriétés de rigidité des schémas en groupes finis et plats lorsque $e < p-1$ ([15] 3.3.6), on voit facilement que les conditions i), ii) et iii) ci-dessus sont équivalentes.

Bien sûr, la partie de torsion de $\bar{P}$, d'ordre premier à p , ainsi que la partie de p -torsion de $\bar{P}$ qui est de type multiplicatif, se relèvent dans P , sans restriction sur R , vu leur interprétation en terme de revêtement étale de $\bar{X}$. Le théorème 1 exprime donc, essentiellement, une propriété de relèvement de la p -torsion unipotente de $\bar{P}$, lorsque $e < p-1$. Celle-ci entraîne la propriété de relèvement suivante des points de p -torsion à valeur dans k :

Corollaire 1. Soit $\bar{L}$ un faisceau inversible sur $\bar{X}$ d'ordre p^n . Alors, quitte à remplacer R par R' , anneau d'entiers d'une
extension finie convenable de K et X par $X' = X \times_R R'$, on peut
relever $\bar{L}$ en un faisceau inversible L' sur X' , d'ordre p^n .

Une partie du théorème 1 peut être sauvée dans le cas limite $e = p-1$.

Théorème 1'. Supposons $e = p-1$. Alors :

- i) $\forall n \gg 0$, ${}_n P$ est plat le long de la section unité ;
- ii) P^τ est plat le long de la section unité.

Cette dernière condition signifie que P^τ contient un plus grand R -sous-schéma en groupes ouvert Q , plat sur R ; Q est nécessairement égal à l'adhérence schématique dans P^τ de la fibre générique P_K^τ . Le quotient P^τ/Q est alors un schéma en groupes net (i.e. non ramifié), à fibre générique nulle, qui mesure le défaut de relèvement de la partie étale de la p -torsion de $\bar{P}/(\bar{P})^O$. Par ailleurs, dans le cas $e = p-1$, on ne prétend plus qu'il existe un R -schéma abélien A ayant pour fibres les composantes neutres réduites des fibres de P (cf. 4.3).

La démonstration comprend deux étapes :

a) Reprenant les constructions de B. Mazur et M. Artin [1], on obtient un complexe de R -groupes formels lisses :

$$0 \rightarrow G^0 \rightarrow G^1 \rightarrow \dots \rightarrow G^d \rightarrow 0, \quad d = \dim(X/R),$$

dont la cohomologie donne "universellement" la cohomologie du groupe multiplicatif formel sur X . On utilise pour ce faire, la linéarisation des groupes formels de Cartier.

b) Un critère de platitude de noyau :

Théorème 2. Soient $u : G \rightarrow H$ un morphisme de R -groupes formels lisses et $N = \text{Ker}(u)$. On suppose que N est équidimensionnel (i.e. la fibre générique N_K a même dimension que la fibre spéciale $\bar{N}$) et que $e \leq p-1$. Alors N est plat.

La démonstration proposée ici utilise la théorie des relèvements de k à R des groupes p -divisibles.

Plan

1. Un cas élémentaire.

2. La théorie de Cartier.

- 2.1 Le groupe formel $\hat{W}$ et son anneau d'endomorphismes.
- 2.2 Les foncteurs α et θ .
- 2.3 Présentation des E -modules de $\mathcal{M}^0$.
- 2.4 Changement d'anneaux.
- 2.5 V -finitude et V -platitude.
- 2.6 Modification de complexes.
- 2.7 Cohomologie d'un groupe formel lisse.

3. Un critère de platitude.

- 3.1 Cas des groupes p -divisibles.
- 3.2 Image schématique formelle.
- 3.3 Critère de platitude, cas général.

4. Applications.

- 4.0 Rappels sur le foncteur de Picard.
- 4.1 Platitude de P^τ .
- 4.2 Un exemple où Pic^τ n'est pas plat ($e \gg p-1$).
- 4.3 Un exemple où Pic ne contient pas de sous-schéma abélien ($e \gg p-1$).
- 4.4 Application à l'image directe d'un groupe formel.
- 4.5 Application au "vanishing" de Kodaira.

1. Un cas élémentaire.

C'est celui où P est lisse le long de la section unité, c'est-à-dire celui où $h^1(X_K) = h^1(\bar{X})$ (où $h^i(X_K) = \dim_K H^i(X_K, O_K)$, $h^i(\bar{X}) = \dim_K H^i(\bar{X}, O_{\bar{X}})$). Prouvons alors l'assertion iii) du théorème 1. On dispose déjà du schéma abélien A : la composante neutre P^0 de P , qui existe, puisque P est lisse le long de la section unité (SGA 3 VI_B 3.10). On doit alors montrer que P^τ est lisse et il suffit de montrer que tout élément de p -torsion de $P(k)$ se relève en un élément de $P(R)$. Soit donc $\bar{L}$ un faisceau inversible sur $\bar{X}$ de p -torsion. Notons $\hat{X}$ le schéma formel complété de X le long de $\bar{X}$. Il revient au même de relever $\bar{L}$ en un faisceau inversible sur X ou sur $\hat{X}$ (EGA III 5.1.6). Considérons la suite exacte de faisceaux d'unités sur $\hat{X}$:

$$0 \rightarrow U_1 \rightarrow O_{\hat{X}}^* \rightarrow O_{\bar{X}}^* \rightarrow 0.$$

L'obstruction à relever $\bar{L} \in H^1(\bar{X}, O_{\bar{X}}^*)$ est un élément de p -torsion de $H^2(\bar{X}, U_1)$. Comme $e < p-1$, le logarithme fournit un isomorphisme $U_1 \xrightarrow{\sim} \pi O_{\hat{X}}$. Donc $H^2(\bar{X}, U_1) \simeq H^2(\bar{X}, \pi O_{\hat{X}}) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \pi O_X) \xrightarrow{\sim} H^2(X, O_X)$. Mais $h^1(X_K) = h^1(X_K)$, de sorte que H^2 est exact à gauche (EGA III 7.8) et en particulier, $H^2(X, O_X)$ est un R -module libre, donc sans p -torsion et l'obstruction à relever $\bar{L}$ est nulle.

2. La théorie de Cartier.

Commençons par rappeler l'essentiel de la théorie de Cartier des groupes formels. Le lecteur pourra consulter [2] et [9].

2.1 Le groupe formel $\hat{W}$ et son anneau d'endomorphismes.

Dans la suite de cet exposé, R est une algèbre commutative sur l'anneau $\mathbb{Z}$ localisé en l'idéal premier $p\mathbb{Z}$. A partir du §3, R

sera un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques.

On note :

- $\text{Nil}(R)$ la catégorie des R -algèbres commutatives à éléments nilpotents.
- Pour tout entier $n \geq 0$, $\text{Nil}(R, n)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Nil}(R)$ formée des R -algèbres A telles que :

$$\forall x_1, \dots, x_{n+1} \in A, \text{ on a } x_1 \dots x_{n+1} = 0.$$

Les variétés formelles sur R sont certains foncteurs covariants:

$$\text{Nil}(R) \rightarrow \text{Ens}.$$

Ainsi, la droite formelle est le foncteur $\underline{D}$:

$$A \in \text{Nil}(R) \mapsto A \in \text{Ens}.$$

Pour tout ensemble I , $\underline{D}^{(I)}$ est le foncteur :

$$A \in \text{Nil}(R) \mapsto A^{(I)} \in \text{Ens}.$$

On note :

- $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R .
- $\underline{W}$ le foncteur "pseudo-anneau de Witt" sur $\text{Nil}(R)$: $A \mapsto W(A)$. C'est un foncteur en $W(R)$ -algèbres.
- $\hat{\underline{W}}$ le groupe de Witt formel. C'est le sous-foncteur en groupes de $\underline{W}$ tel que :

$$\hat{\underline{W}}(A) = \{(a_0, \dots, a_n, \dots) \in W(A), \text{ avec } a_i = 0 \text{ pour presque tout } i\}.$$

Alors $\hat{\underline{W}}$ est une variété formelle de dimension infinie isomorphe à $\underline{D}^{(\mathbb{N})}$.

On note E_R l'anneau d'endomorphismes de $\hat{\underline{W}}$ que l'on fait opérer à droite sur $\hat{\underline{W}}$. L'anneau E_R contient :

- Le sous-anneau $W(R)$ des homothéties. Pour tout $c \in R$, on note $[c]$ la multiplication par le représentant multiplicatif $(c, 0, \dots)$.

$$\text{On a } (x_0, \dots, x_n, \dots)[c] = (x_0 c, \dots, x_n c^{p^n}, \dots).$$

- L'opérateur de décalage, noté $F : (x_0, x_1, \dots)F = (0, x_0, x_1) \cdot$

- Un opérateur, noté V , qui, sur les coordonnées fantômes

$y_i = x_0^{p^i} + \dots + p^i x_i$ est le décalage vers la gauche :

$$(y_0, y_1, \dots)V = (y_1, \dots) \cdot$$

On a $(x_0, x_1, \dots)V = (x'_0, x'_1, \dots)$ avec $x'_i = x_i^p + p(x_{i+1} + Q_i(x_0, \dots, x_i))$, où Q_i est un polynôme. En particulier, si R est de caractéristique p , V est le Frobenius usuel. En général on a $(x, 0, \dots)V = (x^p, 0, \dots)$.

Proposition 2.1.1.

i) Tout élément de E_R s'écrit de manière unique :

$$\sum_{m, n \geq 0} V^m [c_{m, n}] F^n \quad \text{avec la condition : } \forall m, c_{m, n} = 0$$

pour presque tout n .

ii) On a dans E_R les relations suivantes :

$$(1) [c][c'] = [cc'] \cdot$$

$$(2) [c] + [c'] = \sum_{n=0} V^n [s_n(c, c')] F^n, \quad \text{où les } s_n \text{ sont}$$

des polynômes définis par les identités :

$$\forall n \geq 0, \quad x^{p^n} + y^{p^n} = s_0(X, Y)^{p^n} + p s_1(X, Y)^{p^{n-1}} + \dots + p^n s_n(X, Y) \cdot$$

$$(3) F[c] = [c^p] F \cdot$$

$$(4) [c]V = V[c^p]$$

$$(5) FV = p \cdot$$

(6) Dans le plongement de $W(R)$ dans E_R , l'action du décalage F sur $W(R)$ est $w \mapsto VwF$.

2.2 Les foncteurs α et β .

Un foncteur en groupes formels (commutatif) sur R est un foncteur covariant :

$$G : \text{Nil}(R) \rightarrow \text{Ab} \cdot$$

On note $\mathcal{G}_R$ la catégorie abélienne des foncteurs en groupes formels et $\mathcal{M}_R$ la catégorie des E_R -modules à gauche.

Lorsqu'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on écrit $E, \mathcal{M}, \mathcal{G}$, au lieu de $E_R, \mathcal{M}_R, \mathcal{G}_R$.

Soit $G \in \mathcal{G}$. Posons $\alpha(G) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(\hat{W}, G)$, considéré comme E -module à gauche, grâce à l'action de E sur $\hat{W}$. On définit ainsi un foncteur covariant exact à gauche :

$$\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}.$$

Soit $M \in \mathcal{M}$. On lui associe le foncteur en groupes formels exact à droite :

$$\begin{aligned} \beta(M) : \text{Nil}(R) &\rightarrow \text{Ab} \\ A &\mapsto \hat{W}(A) \otimes_E M. \end{aligned}$$

On écrira aussi $\beta(M) = \hat{W} \otimes_E M$. D'où un foncteur

$$\beta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}$$

qui est exact à droite.

On a des morphismes canoniques fonctoriels

$$\hat{W} \otimes_E \text{Hom}(\hat{W}, G) \rightarrow G, \quad \forall G \in \mathcal{G}$$

et

$$M \rightarrow \text{Hom}(\hat{W}, \hat{W} \otimes_E M), \quad \forall M \in \mathcal{M}$$

d'où des morphismes de foncteurs $i : \beta \circ \alpha \rightarrow \text{id}_{\mathcal{G}}$

$$j : \text{id}_{\mathcal{M}} \rightarrow \alpha \circ \beta.$$

Remarque 2.2.0. Si $\hat{M}$ est le séparé complété d'un E -module M pour la topologie V -adique, $\hat{M}$ est canoniquement un E -module (les opérateurs $[c]$, F et V étant continus) et le morphisme canonique $\hat{W} \otimes_E M \rightarrow \hat{W} \otimes_E \hat{M}$ est un isomorphisme : en effet si $A \in \text{Nil}(R)$ et si $w = \sum_{i=1}^N [a_i] F^i \in \hat{W}(A)$ est tel que $a_i^{p^N} = 0$ pour $i = 0, \dots, N$, alors $w V^{2N} = 0$.

Soit $G \in \mathcal{G}$. Le foncteur $\text{Lie}(G)$ est par définition la restriction de G à $\text{Nil}(R, 1)$ (R -algèbres de carré nul).

Notons que si M est un E -module, $\bar{M} = M/VM$ est canoniquement un R -module en posant $c\bar{m} = [\bar{c}]\bar{m}$, $\forall m \in M$, $\forall c \in R$.

Proposition 2.2.1. Soit $M \in \mathcal{M}$, alors $\text{Lie}(\hat{W}^{\otimes_E} M)$ est canoniquement isomorphe au foncteur en R -modules :

$$\begin{aligned} \text{Nil}(R, 1) &\rightarrow R\text{-Modules} \\ A &\mapsto A \otimes_R (M/VM) . \end{aligned}$$

En effet, on a des bijections de R -modules, réciproques l'une de l'autre :

$$\begin{aligned} A \otimes_R (M/VM) &\rightarrow \hat{W}(A) \otimes_E M \\ a \otimes \bar{m} &\mapsto [a] \otimes m \\ \hat{W}(A) \otimes_E M &\rightarrow A \otimes_R M/VM \\ (a_0, a_1, \dots) \otimes m &\mapsto \sum_i a_i \otimes \overline{F^i(m)} . \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{G}^0$ la sous-catégorie de $\mathcal{G}$ formée des foncteurs en groupes formels représentables par des modèles $\underline{D}^{(I)}$. Soit $\mathcal{M}^0$ la sous-catégorie des E -modules M tels que i) M/VM est un R -module libre, ii) V est injectif, iii) M est séparé et complet pour la filtration V -adique.

Théorème 2.2.2 (Cartier [2]). Les foncteurs α et β induisent des équivalences réciproques l'une de l'autre entre les catégories $\mathcal{G}^0$ et $\mathcal{M}^0$ (plus précisément, les restrictions de i à $\mathcal{G}^0$ et de j à $\mathcal{M}^0$ sont des isomorphismes).

2.3 Présentation des E -modules de $\mathcal{M}^0$.

Soient $M \in \mathcal{M}^0$ et e_i , $i \in I$, des éléments de M qui relèvent une base $\bar{e}_i$ du R -module libre $\bar{M} = M/VM$. Notons $\varphi : E^{(I)} \rightarrow M$

le morphisme E -linéaire qui envoie la base canonique (ε_i) , $i \in I$, sur (e_i) .

Pour tout $\underline{c} = (c_i)$, $i \in I$, de $R^{(I)}$, posons

$$\begin{aligned} [\underline{c}]_{\underline{e}} &= \sum_i [c_i] \varepsilon_i \in E^{(I)} \\ [\underline{c}]_{\underline{e}} &= \sum_i [c_i] e_i \in M. \end{aligned}$$

La projection canonique $M \rightarrow \bar{M}$ induit donc une bijection de l'ensemble des éléments de la forme $[\underline{c}]_{\underline{e}}$ sur les éléments de $\bar{M}$. Du fait que V est injectif dans M et que M est séparé et complet pour la filtration V -adique, tout élément de M s'écrit de manière unique

$$\sum_{m \geq 0} V^m [\underline{c}_m]_{\underline{e}}.$$

En particulier, le choix des e_i détermine uniquement une famille $(\underline{c}_{m,i})$ ($m \in \mathbb{N}$, $i \in I$) d'éléments de $R^{(I)}$, telle que

$$(*) \quad \forall i \in I, F(e_i) = \sum_{m \geq 0} V^m [\underline{c}_{m,i}]_{\underline{e}}.$$

Soit $\hat{\varphi} : E^{(\hat{I})} \rightarrow M$ le complété V -adique de φ . Alors $\hat{\varphi}$ est surjectif et $\text{Ker}(\hat{\varphi})$ contient les éléments

$$(**) \quad g_i = F(\varepsilon_i) - \sum_{m \geq 0} V^m [\underline{c}_{m,i}]_{\underline{e}}.$$

Soit $\psi : E^{(I)} \rightarrow E^{(\hat{I})}$ l'application E -linéaire telle que $\psi(\varepsilon_i) = g_i$.

Proposition 2.3.1. 1) La suite de E -modules :

$$0 \rightarrow E^{(\hat{I})} \xrightarrow{\hat{\psi}} E^{(\hat{I})} \xrightarrow{\hat{\varphi}} M \rightarrow 0$$

est exacte.

2) Réciproquement, étant donnée une famille $(c_{m,i})$, $(m,i) \in \mathbb{N} \times I$ d'éléments de $R^{(I)}$, définissons les éléments g_i de $E^{(\hat{I})}$ par les formules $(**)$ et l'application $\psi : E^{(I)} \rightarrow E^{(\hat{I})}$ par $\psi(\varepsilon_i) = g_i$. Alors $\hat{\psi}$ est injective, son conoyau M est dans $\mathfrak{m}^0$, les images e_i des ε_i dans M relèvent une base du R -module M/VM

et vérifient (*).

Pour établir ce résultat, il suffit de montrer que si $\psi : E^{(I)} \rightarrow \widehat{E^{(I)}}$ est un morphisme défini par des éléments (g_i) du type (**), alors $\text{mod}(V)$, on obtient un morphisme de R -modules :

$$\bar{\psi} : \bar{E}^{(I)} \rightarrow \bar{E}^{(I)}$$

qui est injectif avec pour image un supplémentaire de $\bigoplus_i R\bar{e}_i$, ce qui est immédiat.

Définitions 2.3.2. Soit $M \in \mathcal{M}^0$.

1) Une suite exacte de E -modules, du type considéré dans 2.3.1, est une V -présentation de M .

2) Par tensorisation d'une V -présentation de M avec $\hat{W}$, on obtient une suite exacte de variétés formelles en groupes :

$$0 \rightarrow \hat{W}^{(I)} \rightarrow \hat{W}^{(I)} \rightarrow \hat{W} \otimes_E M \rightarrow 0$$

appelée une V -présentation de $\hat{W} \otimes_E M$.

2.4 Changement d'anneaux.

Soient $u : R \rightarrow R'$ un morphisme unitaire d'anneaux commutatifs, et $\tilde{u} : \text{Spec}(R') \rightarrow \text{Spec}(R)$ le morphisme de schémas associé. Notons $\hat{W}'$ le groupe de Witt formel sur R' et E' son anneau d'endomorphismes. On a un morphisme canonique d'anneaux unitaires $E \rightarrow E'$ qui respecte V et F et envoie $[c]$ sur $[u(c)]$.

A la restriction naturelle $\text{Nil}(R') \rightarrow \text{Nil}(R)$ correspond un foncteur

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G' = G_{R'} \\ G &\mapsto u^*(G) = G \times_{R'} R' \end{aligned}$$

défini par $(G \times_{R'} R')(A') = G(A')$ pour tout $A' \in \text{Nil}(R')$.

Proposition 2.4.1. Soit M un E -module. On a un isomorphisme canonique

$$(\hat{W} \otimes_E M) \times_R R' \xrightarrow{\sim} \hat{W}' \otimes_{E'} M' \quad \text{avec} \quad M' = E' \otimes_E M.$$

En effet, soit $A' \in \text{Nil}(R')$. On a

$$\hat{W}(A') \otimes_E M = \hat{W}'(A') \otimes_{E'} M = \hat{W}'(A') \otimes_{E'} E' \otimes_E M.$$

Soit maintenant $G' \in \mathfrak{G}'$. On définit son image directe

$\tilde{u}_*(G') = G \in \mathfrak{G}$ par la formule :

$$G(A) = G'(A \otimes_R R'), \quad \text{pour tout} \quad A \in \text{Nil}(R).$$

Proposition 2.4.2. Soit M' un E' -module. On a un isomorphisme canonique $\tilde{u}_*(\hat{W}' \otimes_{E'} M') \xrightarrow{\sim} \hat{W} \otimes_E M$, où M est le E -module déduit de M' par restriction d'anneaux de E' à E .

Il suffit d'établir le lemme suivant :

Lemme 2.4.3. Soit $A \in \text{Nil}(R)$. L'application canonique :

$$u : \hat{W}(A) \otimes_{E'} E' \rightarrow \hat{W}(A \otimes_R R')$$

est un isomorphisme.

Considérant R' comme quotient d'une R -algèbre de polynômes, il suffit de traiter le cas où R' est plat sur R et le cas où R' est quotient de R par un idéal I . Dans ce dernier cas, E' est quotient de E et l'application canonique u est surjective ; d'autre part, il est immédiat que les éléments de $\hat{W}(A)$, à coordonnées dans IA donnent zéro dans $\hat{W}(A) \otimes_{E'} E'$, d'où le lemme dans ce cas.

Supposons maintenant R' plat sur R . Le lemme est évident lorsque $A \in \text{Nil}(R, 1)$, les deux membres étant isomorphes au R -module $A \otimes_R E' / VE'$. Dans le cas général, par passage à la limite inductive, on se ramène au cas où $A \in \text{Nil}(R, n)$. Il existe alors une suite exacte :

$0 \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow \bar{A} \rightarrow 0$, avec $\bar{A} \in \text{Nil}(R, n-1)$ et $J \in \text{Nil}(R, 1)$. Supposons le lemme démontré pour $\bar{A}$, on conclut qu'il est vrai pour A , en contemplant le diagramme suivant, donc les lignes sont exactes (la deuxième du fait que R' est plat sur R) :

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{W}(J) \otimes_E E' & \rightarrow & \hat{W}(A) \otimes_E E' & \rightarrow & \hat{W}(\bar{A}) \otimes_E E' & \rightarrow & 0 \\ \Downarrow & & \downarrow & & \Downarrow & & \\ 0 \rightarrow \hat{W}(J \otimes_R R') & \rightarrow & \hat{W}(A \otimes_R R') & \rightarrow & \hat{W}(\bar{A} \otimes_R R') & \rightarrow & 0 \end{array}$$

2.5 V-finitude et V-platitude.

Définitions 2.5.1. Soit M un E -module.

- 1) M est sans V-torsion si $\forall m \in M$, $V(m) = 0 \implies m = 0$.
- 2) M est V-plat si M est sans V-torsion et si M/VM est un R -module plat.
- 3) M est V-libre (resp. V-libre de type fini, resp. V-projectif de type fini) si M est séparé et complet pour la topologie V-adique, sans V-torsion et si M/VM est un R -module libre (resp. libre de type fini, resp. projectif de type fini). Une famille d'éléments de M qui relève une base du R -module M/VM est une V-base de M .

Notons que le foncteur $M \mapsto \hat{W} \otimes_E M$ établit une équivalence entre la catégorie des E -modules V -projectifs de type fini et la catégorie des groupes formels lisses.

Proposition 2.5.2. Soit M un E -module séparé et complet pour la topologie V-adique et soit e_i , $i \in I$, des éléments de M qui relèvent des générateurs du R -module $\bar{M} = M/VM$. Alors il existe un E -module V-libre N , de V-base ε_i , $i \in I$, et un morphisme surjectif de E -modules $u : N \rightarrow M$ tel que $u(\varepsilon_i) = e_i$ pour tout i .

Reprenons les notations de 2.3. Si $\underline{c} = (c_i) \in R^{(I)}$, posons $[\underline{c}]_{\underline{e}} = \sum_i [c_i] e_i$. Comme M est séparé et complet, tout élément de M s'écrit, d'au moins une manière $\sum_m V^m [\underline{c}_m]_{\underline{e}}$. En particulier, il existe une famille $\underline{c}_{m,i}$, $(m,i) \in \mathbb{N} \times I$, d'éléments de $R^{(I)}$, telle que

$$F(e_i) = \sum_m V^m [\underline{c}_{m,i}]_{\underline{e}}, \quad i \in I.$$

Il suffit alors de prendre pour N le E -module V -libre, de V -base ϵ_i , $i \in I$, défini par les équations (**):

$$F(\epsilon_i) = \sum_m V^m [\underline{c}_{m,i}]_{\underline{e}}, \quad i \in I, \quad (\text{considérées dans 2.3}).$$

Corollaire 2.5.3. Soit M un E -module séparé pour la topologie V -adique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) M/VM est un R -module de type fini.
- 2) M est quotient d'un E -module V -libre de type fini.
- 3) $\hat{W} \otimes_E M$ est quotient (au sens naïf) d'un R -groupe formel lisse.

En effet, 1) $\implies$ 2) d'après 2.5.2, et 2) $\implies$ 3) est évident. Enfin 3) $\implies$ 1) se voit en prenant les valeurs de $\hat{W} \otimes_E M$ sur ${}^e R$, algèbre des nombres duaux relative à R .

Proposition 2.5.4. Soit M un E -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) M est V -plat (2.5.1).
- 2) $\text{Tor}_1^E(\hat{W}, M) = 0$ (i.e. $\text{Tor}_1^E(\hat{W}(A), M) = 0 \quad \forall A \in \text{Nil}(R)$).

Soit $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ une suite exacte de E -modules, avec L libre. Supposons M V -plat. Pour voir que $\text{Tor}_1^E(\hat{W}(A), M) = 0$, on se ramène, par passage à la limite inductive, au cas où $A \in \text{Nil}(R, n)$, puis, par dévissage, au cas où $A \in \text{Nil}(R, 1)$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \text{Tor}_1^E(\hat{W}(A), M) &= \text{Ker}\{\hat{W}(A) \otimes_E N \rightarrow \hat{W}(A) \otimes_E L\} \\
 &= \text{Ker}\{A \otimes_R N / VN \rightarrow A \otimes_R L / VL\} \\
 &= \text{Tor}_1^R(A, M / VM) \quad (\text{car } M \text{ est sans } V\text{-torsion}) \\
 &= 0, \text{ car } M / VM \text{ est } R\text{-plat.}
 \end{aligned}$$

La réciproque se prouve de façon analogue par restriction à $\text{Nil}(R, 1)$.

Définition 2.5.5. Un E-module M est de V-type fini (resp. de V-présentation finie) si M est le quotient d'un E-module V-libre de type fini (resp. s'il existe une suite exacte de E-modules $L^1 \rightarrow L^0 \rightarrow M \rightarrow 0$, avec L^i V-libre de type fini pour $i = 0, 1$).

Notons que les propriétés pour un E-module d'être de V-type fini (resp. de V-présentation finie) sont conservées par un changement d'anneaux $R \rightarrow R'$.

Terminons ce numéro par une variante de 2.5.2.

Soit R' un quotient de R par un idéal I contenu dans le radical. Posons $E' = E_R$, qui est un quotient de E . Pour tout E-module M , notons M' le E' -module $E' \otimes_E M$.

Proposition 2.5.6. Soient M un E-module séparé de V-présentation finie et $u' : N' \rightarrow M'$ une flèche surjective de E'-modules, avec N' V-libre de type fini. Alors, il existe un E-module N , V-libre de type fini qui relève N' et une flèche surjective $u : N \rightarrow M$ qui relève u' .

Considérons le diagramme cartésien de E-modules :

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{v} & M \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 N' & \xrightarrow{u'} & M'
 \end{array}$$

Posons $J = \text{Ker}\{E \rightarrow E'\}$. On a $\text{Ker}\{P \rightarrow N'\} \simeq \text{Ker}\{M \rightarrow M'\} = JM$. Par ailleurs N' est annulé par J , donc $\text{Ker}\{P \rightarrow N'\} \supset JP$. Comme $P \rightarrow M$ est surjectif, on en déduit que l'application canonique $P' \rightarrow N'$ est un isomorphisme. Par hypothèse M est un E -module de V -présentation finie, donc M' est un E' -module de V -présentation finie et $S' = \text{Ker}\{N' \rightarrow M'\}$ est de V -type fini. Mais $\text{Ker}\{P \rightarrow M\} \simeq S'$, donc P est un E -module de V -type fini. De plus P est séparé, car contenu dans le produit $N' \times M$ de deux E -modules séparés. Soit alors e_i^1 , $i \in I$, une V -base de N' et soit e_i un relèvement de e_i^1 dans P . Comme P/VP est un R -module de type fini, tel que $(P/VP) \otimes_R R' \simeq N'/VN'$ et que I est dans le radical de R , les images des e_i dans P/VP engendrent ce R -module. D'après 2.5.2, il existe un E -module V -libre N , de V -base ε_i , $i \in I$, et un E -morphisme surjectif $u: N \rightarrow P$, tel que $u(\varepsilon_i) = e_i$. Comme $P' \xrightarrow{\sim} N'$, et que N' est un E' -module V -libre, de V -base e_i^1 , u est bien un relèvement de u' .

Remarque 2.5.7. Si l'on ne suppose plus que I est contenu dans le radical de R , on peut seulement conclure que les images des e_i dans P/VP engendrent ce R -module au-dessus d'un voisinage ouvert dans $\text{Spec}(R)$ du fermé défini par I . On en déduit que quitte à remplacer R par R_f , pour f convenable dans $1+I$ et M par $E_{R_f} \otimes_E M$, on peut trouver un E -module V -libre, de type fini N , qui relève N' et un morphisme surjectif $u: N \rightarrow M$ qui relève u' .

2.6 Modification de complexes.

On note $C^-(\text{Ab})$, (resp. $C^-(R)$, resp. $C^-(E)$, resp. $C^-(\mathcal{G})$) la catégorie des complexes bornés à droite :

$$\dots \rightarrow A^i \rightarrow A^{i+1} \rightarrow 0$$

de groupes abéliens (resp. de R -modules, resp. de E -modules, resp.

d'objets de $\mathcal{Q}$ (2.2)) et on désigne par $D^-(\text{Ab})$ (resp...) la catégorie dérivée associée.

Tout objet de $D^-(E)$ se résout dans $C^-(E)$ par un complexe de E -modules libres, en particulier V -plats (2.5.1). On dispose de foncteurs exacts :

- 1) $M^* \mapsto \hat{W} \otimes_E^{\mathbb{L}} M^*$ qui va de $D^-(E)$ dans $D^-(\mathcal{Q})$;
- 2) $M^* \mapsto E/V^n E \otimes_E^{\mathbb{L}} M^*$ qui va de $D^-(E)$ dans $D^-(\text{Ab})$. Pour $n=1$, on obtient en fait un foncteur $M^* \mapsto E/VE \otimes_E^{\mathbb{L}} M^*$ à valeurs dans $D^-(R)$ noté $M^* \mapsto \text{Lie}(M^*)$.

Tous ces foncteurs se calculent par produit tensoriel terme à terme sur une résolution V -plate de M^* . La connaissance de $\text{Lie}(M^*)$ équivaut à la connaissance de $\hat{W} \otimes_E^{\mathbb{L}} M^*$, en restriction à $\text{Nil}(R,1)$; plus précisément :

$$A \otimes_R^{\mathbb{L}} \text{Lie}(M^*) \simeq \hat{W}(A) \otimes_E^{\mathbb{L}} M^* \text{ dans } D^-(R), \text{ pour } A \in \text{Nil}(R,1).$$

En fait $\hat{W} \otimes_E^{\mathbb{L}} M^*$ ne dépend que du Pro-objet $\varprojlim_n E/V^n E \otimes_E^{\mathbb{L}} M^*$ dans le sens suivant :

Lemme 2.6.1. Soit $u: M'^* \rightarrow M^*$ un morphisme dans $C^-(E)$, tel que, pour tout n $E/V^n E \otimes_E^{\mathbb{L}} u: E/V^n E \otimes_E^{\mathbb{L}} M'^* \rightarrow E/V^n E \otimes_E^{\mathbb{L}} M^*$ soit un quasi-isomorphisme dans $D^-(\text{Ab})$. Alors $\hat{W} \otimes_E^{\mathbb{L}} u: \hat{W} \otimes_E^{\mathbb{L}} M'^* \rightarrow \hat{W} \otimes_E^{\mathbb{L}} M^*$ est un quasi-isomorphisme dans $D^-(\mathcal{Q})$.

Démonstration : En introduisant le mapping cône de u , on est ramené à montrer que si $M^* \in C^-(E)$ est tel que $E/V^n E \otimes_E^{\mathbb{L}} M^*$ est acyclique pour tout n , alors $\hat{W} \otimes_E^{\mathbb{L}} M^*$ est acyclique. Quitte à résoudre M^* par des E -modules libres, on se ramène au cas où $M^*/V^n M^*$ est acyclique pour tout n .

Si $\hat{M}^*$ est le séparé complété de M^* pour la topologie V -adique, le morphisme $\hat{W} \otimes_E^{\mathbb{L}} M^* \rightarrow \hat{W} \otimes_E^{\mathbb{L}} \hat{M}^*$ est un isomorphisme d'après 2.2.0. On peut donc supposer M^* complet et il suffit de voir

qu'alors M^* est acyclique.

Notons B_n^i (resp. Z_n^i) les bords (resp. les cycles) de degré i de $M^*/V^n M^*$ et B^i et Z^i les bords et cycles de M^* . On a alors un système projectif de suites exactes :

$$0 \rightarrow B_n^{i-1} \rightarrow M_n^{i-1} \rightarrow Z_n^i \rightarrow 0$$

dans lequel les morphismes de transition $B_{n+1}^{i-1} \rightarrow B_n^{i-1}$ sont surjectifs.

D'où une suite exacte :

$$0 \rightarrow \varprojlim_n B_n^{i-1} \rightarrow M^{i-1} \rightarrow \varprojlim_n Z_n^i \rightarrow 0.$$

Mais $\varprojlim_n Z_n^i = Z^i$, donc M^* est acyclique.

Définition 2.6.2. Une flèche u dans $C^-(E)$, du type considéré dans 2.6.1 sera appelée un pro-quasi-isomorphisme.

Essayons de justifier les constructions techniques qui vont suivre. Partons de $M^* \in C^-(E)$ et de $L^* \in C^-(R)$ résolution libre de $\text{Lie}(M^*)$. On cherche $N^* \in C^-(E)$, à objets V -libres, tel que $N^*/VN^* \xrightarrow{\sim} L^*$ dans $C^-(R)$, et tel que N^* et M^* aient même image dans $D^-(E)$. Le principe d'une telle démonstration repose sur les étapes suivantes :

1) Résoudre M^* par un (gros) complexe de E -modules topologiquement libres.

2) Ecrire $H^i(M^*)$ comme quotient d'un (petit)-module V -libre (2.5.2).

3) Simplifier le gros-complexe de E -modules libres et se ramener à un complexe de petits E -modules V -libres en utilisant le fait que les modules V -libres se comportent comme des E -modules de dimension projective 1 (2.3.1).

Malheureusement, faute de disposer a priori de séparation sur les $H^i(M^*)$, on ne peut pas directement appliquer 2.5.2. Il se trouve que

dans le cas où p est nilpotent dans R , on peut néanmoins encore construire N^* grâce à une variante de 2.5.2 (cf. 2.6.8). Enfin, dans le cas où R est complet pour la topologie p -adique, on obtient seulement une forme affaiblie de l'énoncé espéré, mais suffisante pour les applications en vue.

2.6.3. Notations. Nous désignons par $p\text{-Nil}(R)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Nil}(R)$ formée des R -algèbres nilpotentes annulées par une puissance de p . On note $p\text{-}\mathcal{G}$ la catégorie des foncteurs en groupes abéliens $p\text{-Nil}(R) \rightarrow \text{Ab}$ et $C^-(p\text{-}\mathcal{G})$ (resp. $D^-(p\text{-}\mathcal{G})$) la catégorie de complexes (resp. La catégorie dérivée) associée.

Théorème 2.6.4. Supposons R séparé et complet pour la topologie p -adique. Soient $M^* \in C^-(E)$ et $L^* \in C^-(R)$ une résolution de $\text{Lie}(M^*)$ par des R -modules libres de type fini (i.e. $\text{Lie}(M^*)$ est pseudo-cohérent dans la terminologie de SGA 6 - Exp. I). Alors il existe un complexe $G^* \in C^-(\mathcal{G})$ de R -groupes formels lisses vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) Le complexe de R -modules $\text{Lie}(G^*)$, formé terme à terme des algèbres de Lie des objets de G^* , est isomorphe à L^* dans $C^-(R)$.

ii) L'image de G^* dans $D^-(p\text{-}\mathcal{G})$ est isomorphe à celle de $\hat{W}_E^{\mathbb{L}} \otimes_E M^*$.

Exemples 2.6.5. Sous les hypothèses de 2.6.4.

i) Supposons R local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et $\text{Lie}(M^*)$ pseudo-cohérent. Prenons pour L^* une résolution libre minimale de $\text{Lie}(M^*)$. Alors G^* est un complexe de R -groupes formels lisses, dont le complexe des algèbres de Lie est nul modulo $\mathfrak{m}$.

ii) Supposons que $\text{Lie}(M^*)$ soit parfait, c'est-à-dire réalisable dans $C^-(R)$ par un complexe L^* de la forme :

$$0 \rightarrow P \rightarrow L^{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow L^n \rightarrow 0$$

où les L^i sont libres de type fini et P est projectif de type fini. Alors, il existe un complexe borné $G^\bullet$ de R -groupes formels lisses, de complexe d'algèbres de Lie $L^\bullet$, qui a même image que $\hat{W}^L \otimes_E M^\bullet$ dans $D^-(p\text{-}\mathcal{G})$.

iii) Lorsque p est nilpotent dans R , on a $p\text{-Nil}(R) = \text{Nil}(R)$ et le complexe $G^\bullet$ a alors même image que $\hat{W}^L \otimes_E M^\bullet$ dans $D^-(\mathcal{G})$.

Démonstration de 2.6.4 : Pour M un E -module, on note $\bar{M}$ le R -module M/VM . Si $M^\bullet \in C^-(E)$ est un complexe de E -modules V -plats, $\bar{M}^\bullet \in C^-(R)$ est le complexe déduit de $M^\bullet$ en appliquant $E/VE \otimes_E$ terme à terme. L'image de $\bar{M}^\bullet$ dans $D^-(R)$ est donc égale à $\text{Lie}(M^\bullet)$.

L'étape essentielle est la démonstration de la proposition suivante :

Proposition 2.6.6. Supposons R séparé et complet pour la topologie p -adique. Soient $M^\bullet \in C^-(E)$ et $L^\bullet \in C^-(R)$ une résolution libre de $\text{Lie}(M^\bullet)$. Alors il existe $N^\bullet \in C^-(E)$ ayant les propriétés suivantes :

1) Chaque objet de $N^\bullet$ est V -plat et isomorphe au conovau d'une flèche injective $r : E^{(I)} \rightarrow E^{(J)}$, telle que $\bar{r} : \bar{E}^{(I)} \rightarrow \bar{E}^{(J)}$ soit universellement injectif.

2) Il existe un morphisme $u : N^\bullet \rightarrow L^\bullet$ dans $C^-(R)$ qui devient un isomorphisme par réduction mod. p^m pour tout $m \gg 0$.

3) $M^\bullet$ et $N^\bullet$ ont des images isomorphes dans $D^-(E)$.

Montrons d'abord comment 2.6.6 entraîne 2.6.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $R_n = R/p^n R$, $E_n = E_{R_n}$.

Soient $M^\bullet$ et $L^\bullet$ comme dans 2.6.4. Il leur correspond un $N^\bullet \in C^-(E)$ ayant les propriétés décrites dans 2.6.6. Soient N et L les objets de $N^\bullet$ et $L^\bullet$ correspondant à un certain degré. On a donc des suites exactes

$$(1) \quad 0 \rightarrow E^{(I)} \xrightarrow{r} E^{(J)} \rightarrow N \rightarrow 0$$

et
$$(2) \quad 0 \rightarrow \bar{E}^{(I)} \xrightarrow{\bar{r}} \bar{E}^{(J)} \rightarrow \bar{N} \rightarrow 0$$

avec $\bar{r}$ universellement injectif. En tensorisant (1) avec E_n on obtient une suite exacte de E_n -modules :

$$(3) \quad E_n^{(I)} \xrightarrow{r_n} E_n^{(J)} \rightarrow E_n \otimes_E N \rightarrow 0.$$

Tensoriser (3) par E_n/VE_n équivaut à réduire (2) mod. p^n donc donne une suite exacte :

$$0 \rightarrow (\bar{E}/p^n \bar{E})^{(I)} \xrightarrow{\bar{r}_n} (\bar{E}/p^n \bar{E})^{(J)} \rightarrow \bar{N}/p^n \bar{N} \rightarrow 0.$$

On en déduit que $E_n \otimes_E N$ est sans V -torsion et que r_n est injectif. Par ailleurs d'après la condition 2) de 2.6.6

$\bar{N}/p^n \bar{N} \xrightarrow{\sim} L/p^n L$ et sous les hypothèses de 2.6.4, L est un R -module libre de type fini. Bref, le V -complété $E_n \hat{\otimes}_E N$ de $E_n \otimes_E N$ est un E_n -module V -libre de type fini.

Soit alors $\tilde{N} = \varprojlim_n E_n \hat{\otimes}_E N$ et $v: N \rightarrow \tilde{N}$ le morphisme de E -modules canonique. Si e_λ , $\lambda \in \Lambda$, est une famille finie d'éléments de N dont les images dans L par $N \rightarrow \bar{N} \rightarrow L$, donnent une R -base de L , il est immédiat que $\tilde{N}$ est V -libre de V -base les $v(e_\lambda)$. En particulier $\tilde{N} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \bar{N}/p^n \bar{N} \xrightarrow{\sim} L$.

Soit $\tilde{N}^\bullet \in C^-(E)$ le complexe d'objets V -libres de type fini, déduit de $N^\bullet$ par l'application $N \rightarrow \tilde{N}$ en chaque degré. On a maintenant un isomorphisme $\tilde{u}: \tilde{N}^\bullet \rightarrow L^\bullet$ dans $C^-(R)$.

La condition 3) de 2.6.6 entraîne que $\hat{W} \otimes_E M^\bullet$ et $\hat{W} \otimes_E N^\bullet$ sont isomorphes dans $D^-(\mathbb{Q})$. Pour achever de prouver 2.6.4, il suffit donc de prouver que $\hat{W} \otimes_E N \rightarrow \hat{W} \otimes_E \tilde{N}$ est un isomorphisme en restriction aux

algèbres $A \in \text{Nil}(R)$, où p est nilpotent. Or si $p^n A = 0$, on a

$$\hat{W}(A) \otimes_E N = \hat{W}(A) \otimes_{E_n} E_n \otimes_E N \simeq \hat{W}(A) \otimes_{E_n} E_n \hat{\otimes}_E N \quad (2.2.0)$$

$$\hat{W}(A) \otimes_E \tilde{N} = \hat{W}(A) \otimes_{E_n} E_n \otimes_E \tilde{N} \quad \text{et} \quad E_n \otimes_E \tilde{N} \simeq E_n \hat{\otimes}_E N, \quad \text{donc} \quad \hat{W}(A) \otimes_E N \xrightarrow{\sim} \hat{W}(A) \otimes_E \tilde{N}.$$

Démonstration de 2.6.6 : Disons qu'un E -module N est de V -dimension projective ≤ 1 s'il existe une suite exacte :

$$0 \rightarrow E^{(I)} \xrightarrow{r} E^{(J)} \rightarrow N \rightarrow 0$$

telle que $\bar{r} : \bar{E}^{(I)} \rightarrow \bar{E}^{(J)}$ soit universellement injectif. Notons qu'alors N est sans V -torsion et que $\text{Coker}(\bar{r}) = \bar{N}$ est R -plat, donc N est V -plat.

La proposition 2.6.6 ; va résulter, par récurrence décroissante sur n , du lemme suivant :

Lemme 2.6.7. Supposons R -séparé et complet pour la topologie p -adique. Soit n un entier et soient $M^* \in C^-(E)$ un complexe à objets V -plats, L^* une résolution V -libre de $\text{Lie}(M^*)$ et $u : \bar{M}^* \rightarrow L^*$ un quasi-isomorphisme. On suppose :

- i) Les objets de M^* sont de V -dimension projective ≤ 1 en degrés $> n$.
- ii) En degrés $> n$, u est un isomorphisme mod. p^m pour tout m .

Alors il existe un diagramme dans $C^-(E)$ de complexes V -plats :

$$\begin{array}{ccc} & M'^* & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ M^* & & N^* \end{array}$$

et un quasi-isomorphisme $v : \bar{N}^* \rightarrow L^*$ possédant les propriétés suivantes :

- i) α et β sont des quasi-isomorphismes et des isomorphismes en degrés $> n$.

- ii) N^n est de V -dimension projective ≤ 1 .
- iii) $v^n: \bar{N}^n \rightarrow L^n$ est un isomorphisme mod. p^m pour tout m .
- iv) v coïncide avec u en degrés $> n$, c'est-à-dire le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bar{M}^{>n} & & \\
 & \swarrow \bar{\alpha}^{>n} & & \searrow \bar{\beta}^{>n} & \\
 \bar{M}^{>n} & & & & \bar{N}^n \\
 & \searrow u^{>n} & & \swarrow v^{>n} & \\
 & & L^{>n} & &
 \end{array}$$

est commutatif.

Pour voir que 2.6.7 entraîne 2.6.6, il suffit de montrer que l'on peut amorcer la récurrence. Or dans 2.6.6, on peut résoudre M^* par des E -modules libres, donc supposer M^* à objets E -libres. Alors $\bar{M}^*$ est un complexe de R -modules libres. Comme $\bar{M}^*$ et L^* sont isomorphes dans $D^-(R)$, il existe un quasi-isomorphisme $u: \bar{M}^* \rightarrow L^*$. Les complexes considérés étant bornés à droite, les conditions de 2.6.7 sont satisfaites pour $n \gg 0$.

Démonstration de 2.6.7 : Posons $P = \text{Coker}\{M^{n-1} \rightarrow M^n\}$, $Q = \text{Coker}\{L^{n-1} \rightarrow L^n\}$. On obtient un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bar{M}^{n-1} & \rightarrow & \bar{M}^n & \rightarrow & \bar{P} & \rightarrow & 0 \\
 u^{n-1} \downarrow & & u^n \downarrow & & \downarrow h & & \\
 \bar{L}^{n-1} & \rightarrow & \bar{L}^n & \rightarrow & Q & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

D'où par réduction mod. p^m un autre diagramme à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bar{M}^{n-1}/p^m \bar{M}^{n-1} & \rightarrow & \bar{M}^n/p^m \bar{M}^n & \rightarrow & \bar{P}/p^m \bar{P} & \rightarrow & 0 \\
 u_m^{n-1} \downarrow & & u_m^n \downarrow & & h_m \downarrow & & \\
 L^{n-1}/p^m L^{n-1} & \rightarrow & L^n/p^m L^n & \rightarrow & Q/p^m Q & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

Comme u est un quasi-isomorphisme et un isomorphisme mod. p^m en degrés $> n$, h_m est un isomorphisme.

Soit e_i , $i \in I$, une base du R -module L^n . Quitte à résoudre M^* par des E -modules libres en degrés $\gg n$, on peut supposer que $M^n = E^{(J)}$. Comme h_1 est surjectif, $\forall i \in I$, $\exists m_i \in M^n$ et $\ell_i \in L^{n-1}$ tels que

$$e_i = u^n(m_i) + d(\ell_i) \pmod{pL^n}.$$

Modifions le complexe M^* en lui ajoutant le facteur trivial $E^{(I)} \xrightarrow{\text{id}} E^{(I)}$, concentré en degrés $(n-1, n)$, et modifions u en u' tel que $u'^{n-1}(\varepsilon_i) = \ell_i$. Après un changement de base triangulaire sur $M^n = E^{(I)} \otimes E^{(J)}$, on est ramené au cas où $u(\varepsilon_i) = e_i \pmod{pL^n}$ $\forall i \in I$.

Lemme 2.6.8. Soient $M = E^{(I)} \oplus E^{(J)}$, ε_i , $i \in I$, la base canonique du facteur $E^{(I)}$, $s: M \rightarrow P$ un morphisme surjectif de E -modules, $\eta_i = s(\varepsilon_i)$. On suppose que les images des η_i dans $\bar{P}/p\bar{P}$ engendrent ce R -module. Alors il existe un diagramme commutatif de E -modules

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s} & P \\ w \downarrow & \nearrow t & \\ N & & \end{array}$$

tel que :

- i) w est surjectif ; $S = \text{Ker}(w)$ est libre et $\bar{S} \rightarrow \bar{M}$ est universellement injectif (donc N est de V -dimension projective ≤ 1).
- ii) Pour tout m , $\bar{N}/p^m\bar{N}$ est libre sur R/p^mR , de base les images des ε_i .

Admettons un instant ce lemme et achevons de démontrer 2.6.7.

Appliquons 2.6.8 au morphisme surjectif canonique s :

$M^n = E^{(I)} \otimes E^{(J)} \rightarrow P$. On obtient une factorisation de s :

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{s} & P \\ w \downarrow & \nearrow t & \\ N^n & & \end{array}$$

ayant les propriétés suivantes : w est surjectif, $S = \text{Ker}(w)$ est libre, $\bar{S} \rightarrow \bar{M}^n$ est universellement injectif et pour tout m les images des ε_i dans $\bar{N}^n/p^m \bar{N}^n$ forment une base de ce $R/p^m R$ -module.

Comme S est libre, contenu dans $\text{Ker}(s) = \text{Im}\{M^{n-1} \rightarrow M^n\}$, S se relève dans M^{n-1} . Donc $M^\bullet$ contient un sous-complexe trivial $S \xrightarrow{\text{id}} S$ en degrés $(n-1, n)$. Soit $N'^\bullet$ le complexe quotient et soit $N^\bullet$ le complexe quasi-isomorphe à $N'^\bullet$ obtenu en remplaçant N'^{n-1} par M^{n-1} et $N'^{n-2} = M^{n-2}$ par le produit cartésien de M^{n-2} et de M^{n-1} au-dessus de N'^{n-1} (on a donc une suite exacte de complexes : $0 \rightarrow (S^{n-2} \xrightarrow{\text{id}} S^{n-1}) \rightarrow N^\bullet \rightarrow N'^\bullet \rightarrow 0$). Alors $N^\bullet$ a même image que $M^\bullet$ dans $D^-(E)$. Enfin, quitte à modifier le quasi-isomorphisme $u: \bar{M}^\bullet \rightarrow L^\bullet$ par une homotopie en degré n , on peut supposer que u^n passe au quotient à travers $\bar{N}^n$, donc fournit un quasi-isomorphisme $v: \bar{N}^\bullet \rightarrow L^\bullet$ qui est un isomorphisme en degré n , mod. p^m , pour tout m .

Démonstration de 2.6.8 : Soit P' le séparé complété, pour la topologie V -adique, de $E_{R/pR} \otimes_E P$. Alors $\bar{P}'$ est le R -module $\bar{P}/p\bar{P}$, donc est engendré par les images des η_i , $i \in I$. Il résulte alors de (2.5.2) qu'il existe un E -module V -libre N' , de V -base f'_i , $i \in I$, et un morphisme surjectif $t': N' \rightarrow P'$, tel que $t'(f'_i)$ soit l'image de η_i . On choisit un morphisme $w': \hat{M} \rightarrow N'$, tel que $w(\varepsilon_i) = f'_i$ qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s} & P \\ \downarrow \hat{} & & \downarrow \\ \hat{M} & & P' \\ w' \downarrow & \xrightarrow{t'} & \\ N' & & P' \end{array}$$

Il résulte de 2.3.1 que $S' = \text{Ker}(w')$ est topologiquement libre (isomorphe à $\widehat{E^{(I)}} \oplus \widehat{E^{(J)}}$) et que $\bar{S}'$ est facteur direct dans $\bar{M}$, supplémentaire du R -module libre $\bigoplus_{i \in I} R\bar{\varepsilon}_i$.

Soient $A = \text{Ker } s$ et $A' = \text{Ker}\{M \rightarrow P'\}$. Par réduction mod. V , on obtient des suites exactes de R -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{A} & \rightarrow & \bar{M} & \rightarrow & \bar{P} & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \\ \bar{A}' & \rightarrow & \bar{M} & \rightarrow & \bar{P}/p\bar{P} & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Par suite $\text{Im}\{\bar{A}' \rightarrow \bar{M}\} = \text{Im}\{\bar{A} \rightarrow \bar{M}\} + p\bar{M}$. Par ailleurs, vu la factorisation à travers N' , $\text{Im}\{\bar{A}' \rightarrow \bar{M}\}$ contient $\bar{S}'$. Si donc τ'_λ , $\lambda \in \Lambda$, est une base topologique de S' , on peut trouver une famille τ_λ , $\lambda \in \Lambda$, d'éléments de A telles que les images de τ_λ et τ'_λ , dans $\bar{M}$ soient égales mod. $p\bar{M}$. Soit $r: E^{(\Lambda)} \rightarrow A \rightarrow M$ le morphisme défini par la famille τ_λ d'où $\bar{r}: \bar{E}^{(\Lambda)} \rightarrow \bar{M}$. Soit de même $r': E^{(\Lambda)} \rightarrow \hat{M}$ le morphisme défini par la famille τ'_λ , d'où $\bar{r}': \bar{E} \rightarrow \bar{M}$.

Posons $E_1 = E_{R/pR}$ et $M_1 = E_1 \otimes_E M$. Par tensorisation de r et r' avec E_1 , on obtient $r_1: E_1^{(\Lambda)} \rightarrow M_1$ et $r'_1: E_1^{(\Lambda)} \rightarrow \hat{M}_1$. Vu le choix de τ_λ la base canonique de $E_1^{(\Lambda)}$ a même image dans $\bar{M}_1 = \bar{M}/p\bar{M}$ par r_1 et r'_1 . Comme R_1 est de caractéristique p , on a $E_1 V \subset V E_1$ et par suite $\bar{r}_1 = \bar{r}'_1$. En particulier, $\bar{r}_1$ est injectif, d'image un supplémentaire de $\bigoplus_{i \in I} (R/pR)\bar{\varepsilon}_i$. Le lemme de Nakayama nilpotent (Bourb. AC II §3 n° 2) entraîne alors que pour tout $m > 0$, $\bar{r}: \bar{E} \rightarrow \bar{M}$ est injectif mod. p^m d'image un facteur direct de $\bar{M}/p^m \bar{M}$, supplémentaire de $\bigoplus_{i \in I} (R/p^m R)\bar{\varepsilon}_i$. Mais R est séparé pour la topologie p -adique, donc $\bar{r}$ est injectif. En fait $\bar{r}$ est même universellement injectif, comme limite inductive filtrante d'injections scindables $R^n \rightarrow \bar{M}$.

Finalement, E étant séparé pour la topologie V -adique, r est injectif. L'image S de r est contenue dans $A = \text{Ker } s$, donc s

se factorise à travers $N=M/S$ et cette factorisation a les propriétés requises.

Proposition 2.6.9. Supposons R -complet pour la topologie p -adique et soient I un idéal de R contenu dans le radical, $R'=R/I$ et $E'=E_{R'}$. Soient $M^* \in D^-(E)$ tel que $\text{Lie}(M^*)$ soit pseudo-cohérent et $M'^* = E' \otimes_E M^* \in D^-(E')$ déduit de M^* par le changement d'anneaux $E \rightarrow E'$. Soit G'^* un complexe de R' -groupes formels lisses qui représente $\hat{W}_{E, M'^*}^{\mathbb{L}}$. Alors il existe un complexe G^* de R -groupes formels lisses, qui relève G'^* et qui représente $\hat{W}_{E, M^*}^{\mathbb{L}}$ en restriction à $D^-(p-R)$.

La démonstration est analogue à celle de 2.6.4. Notons simplement que pour établir 2.6.4, nous avons utilisé 2.6.8 comme substitut à 2.5.2. Pour prouver 2.6.7, on a besoin du lemme suivant, comme substitut à 2.5.6 :

Lemme 2.6.10. Supposons R complet pour la topologie p -adique et soit I un idéal du radical de R . Posons $R'=R/I$, $E'=E_{R'}$. Soient $s:M \rightarrow P$ un morphisme surjectif de E -modules. On suppose :

- i) P est de V -présentation finie.
- ii) M est libre sur E et e_j , $j \in J$, est une partie finie d'une base de M .
- iii) Il existe une factorisation de $s' = E' \otimes_E s$:

$$\begin{array}{ccc} E' \otimes_E M & \xrightarrow{s'} & E' \otimes_E P \\ w' \searrow & & \nearrow t' \\ & N' & \end{array}$$

avec N' E' -module V -libre de V -base $w'(e_j)$, $j \in J$.

Alors s admet une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s} & P \\ w \downarrow & \nearrow t & \\ N & & \end{array}$$

qui relève la factorisation de s' et possède les propriétés suivantes :

- i) w est surjectif.
- ii) $S = \text{Ker}(w)$ est libre et $\bar{S} \rightarrow \bar{M}$ est universellement injectif.
- iii) Pour tout m , les images des e_j dans $\bar{N}/p^m \bar{N}$ forment une base de ce $R/p^m R$ -module.

Voici une application de 2.6.9 :

Proposition 2.6.11. Supposons R local noethérien, complet pour la topologie définie par son idéal maximal, à corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. Soit $M^* \in D^-(E)$ tel que $\text{Lie}(M^*)$ soit pseudo-cohérent. Alors il existe un complexe $G^* \in C^-(\mathcal{G})$ de R -groupes formels lisses, ayant même image que $\hat{W}_E^{\mathbb{L}} \otimes_E M^*$ dans $D^-(p-R)$ et possédant en outre la propriété suivante : si $\bar{G}^*$ est la fibre spéciale de G^* , pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'image fppf du morphisme $\bar{G}^i \rightarrow \bar{G}^{i+1}$ est un groupe p -divisible.

Prouvons d'abord un lemme :

Lemme 2.6.12. Supposons que R soit un corps parfait k de caractéristique $p > 0$ et soit M un E -module de V -type fini. Alors il existe une suite exacte de E -modules :

$$0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow 0$$

où N est V -libre de type fini et N' est un $W(k)$ -module libre de type fini.

En effet, il existe une suite exacte de E -modules :

$$(1) \quad 0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

avec M' V -libre de type fini et M'' de longueur finie sur $W(k)$ (on peut prendre pour M' le sous- E -module $V^n(M)$ pour $n \gg 0$). Par ailleurs, M'' est quotient d'un E -module P qui est un $W(k)$ -module libre de type fini. On obtient le module cherché N en poussant l'extension (1) de M'' à P .

Corollaire 2.6.13. Supposons que R soit un corps parfait k et soit $M^* \in C^-(E)$ un complexe à objets V -libre de type fini. Alors M^* est isomorphe dans $D^-(E)$ à la classe d'un complexe $N^* \in C^-(E)$ ayant les propriétés suivantes :

- 1) N^i est V -libre de type fini pour tout i .
- 2) $\text{Im}\{N^i \rightarrow N^{i+1}\}$ est, pour tout i , un $W(k)$ -module

libre de type fini.

Le corollaire est formel à partir de 2.6.12 et du fait que tout E -module V -libre, de type fini est de dimension projective 1 (2.3.1).

Prouvons maintenant 2.6.11. Posons $\bar{E} = E_k$, $\bar{W} = W(k)$. Soit $\bar{M}^* = \hat{\bar{W}} \otimes_{\bar{E}}^{\mathbb{L}} M^* \in D^-(\bar{E})$. D'après 2.6.4 $\hat{\bar{W}} \otimes_{\bar{E}}^{\mathbb{L}} \bar{M}^*$ est représentable dans $C^-(\mathcal{G}_k)$ par un complexe $\bar{G}^*$ de k -groupes formels lisses. Celui-ci provient par application du foncteur $\hat{\bar{W}} \otimes_{\bar{E}}$ d'un complexe $\bar{N}^* \in C^-(\bar{E})$ de $\bar{E}$ -modules V -libres de type fini (2.2.2). Remplaçons $\bar{N}^*$ par un complexe $\tilde{N}^*$, ayant même image dans $D^-(\bar{E})$ et vérifiant les conditions 1) et 2) de 2.6.13. Alors $\bar{G}^* = \hat{\bar{W}} \otimes_{\bar{E}}^{\mathbb{L}} \tilde{N}^*$ représente $\hat{\bar{W}} \otimes_{\bar{E}}^{\mathbb{L}} \bar{M}^*$ et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'image fppf du morphisme $\bar{G}^i \rightarrow \bar{G}^{i+1}$ est un k -groupe formel p -divisible. D'après 2.6.9, on peut relever $\bar{G}^*$ en un complexe G^* de R groupes formels lisses, qui représente $\hat{\bar{W}} \otimes_{\bar{E}}^{\mathbb{L}} M^*$ en restriction à $\text{Nil}(p-R)$.

Corollaire 2.6.14. Gardons les notations et hypothèses de 2.6.11 et soit $i \in \mathbb{Z}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) G^i est un R -groupe formel p -divisible.
- 2) $H^i(\bar{E} \otimes_{\bar{E}}^{\mathbb{L}} M')$ est un $W(k)$ -module de type fini.

2.7 Cohomologie d'un groupe formel lisse.

Soit X un schéma. On note $\text{Nil}(X)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -algèbres quasi-cohérentes $\mathcal{G}$ à sections locales nilpotentes. Soit alors G un groupe formel lisse, sur X . Pour tout $\mathcal{G} \in \text{Nil}(X)$, on a un faisceau sur X pour la topologie de Zariski :

$$U \mapsto (G|U)(\mathcal{G}|U)$$

que l'on note $G[\mathcal{G}]$, d'où des groupes de cohomologie $H^i(X, G[\mathcal{G}])$.

Lemme 2.7.1. Supposons X affine. Alors, pour tout $\mathcal{G} \in \text{Nil}(X)$, on a $H^i(X, G[\mathcal{G}]) = 0$ pour $i > 0$.

Soit $X = \text{Spec}(R)$ et supposons que $\mathcal{G}$ soit associée à $A \in \text{Nil}(R)$. Si $A \in \text{Nil}(R, 1)$, $G[\mathcal{G}]$ est le faisceau quasi-cohérent sur X associé au R -module $A \otimes_R \text{Lie}(G)$. Dans le cas général, par passage à la limite inductive, on se ramène au cas où $A \in \text{Nil}(R, n)$. Comme G est lisse, $A \mapsto G(A)$ est un foncteur exact. Par dévissage de A en éléments de $\text{Nil}(R, 1)$, on trouve que G admet une suite de composition finie dont le gradué associé est un faisceau quasi-cohérent, d'où le lemme.

Supposons X séparé et soit U_i , $i \in I$, un recouvrement affine de X . Pour toute multiintersection finie U_α d'ouverts U_i , d'anneau R_α , notons $\hat{W}_\alpha$ le groupe de Witt formel sur R_α et E_α son anneau d'endomorphismes. Posons $G_\alpha = G|_{U_\alpha}$, $M_\alpha = \text{Hom}(\hat{W}_\alpha, G_\alpha)$. On déduit alors de 2.7.1 et 2.2.2 la proposition suivante :

Proposition 2.7.2. On a dans $D(\text{Ab})$ (catégorie dérivée des groupes abéliens) un isomorphisme canonique, fonctoriel en $G \in \text{Nil}(X)$, entre $H^*(X, G[G])$ d'une part, et la classe du complexe de Čech $U_\alpha \mapsto \hat{W}_\alpha(G|U_\alpha) \otimes_{E_\alpha} M_\alpha$, d'autre part.

Supposons maintenant que X est un R -schéma séparé et quasi-compact ; soit $f : X \rightarrow R$ le morphisme structural. Pour $A \in \text{Nil}(R)$, si $\tilde{A}$ est le faisceau quasi-cohérent sur $\text{Spec}(R)$ associé, on note $f^*(A)$ le faisceau $f^*(\tilde{A}) \in \text{Nil}(X)$. On a un foncteur

$$\begin{aligned} \text{Nil}(R) &\rightarrow D(\text{ab}) \\ A &\mapsto H^*(X, G[f^*(A)]) \end{aligned}$$

que l'on note abusivement $R^*f_*(G)$ (sans se préoccuper des questions de faisceau associé). En particulier $R^if_*(G)$ est l'élément de $\mathcal{G}$:

$$A \mapsto H^i(X, G[f^*(A)]) .$$

Reprenons le recouvrement affine U_i ci-dessus et soit $C^*(U, M)$ le complexe de Čech $U_\alpha \mapsto M_\alpha$. C'est un complexe de E -modules séparés et complets, borné (on prend les cochaînes alternées). Alors pour tout α , le morphisme canonique :

$$\hat{W}(A) \otimes_{E_\alpha} M_\alpha \rightarrow \hat{W}(f^*(A)|U_\alpha) \otimes_{E_\alpha} M_\alpha$$

est un isomorphisme (2.4.3), fonctoriel en A et compatible avec les restrictions d'ouverts $U_\alpha \rightarrow U_\beta$. On en déduit un isomorphisme canonique dans $D^-(\text{Ab})$ entre $R^*f_*(G)$ et la classe du complexe de Čech $U_\alpha \mapsto \hat{W}_\alpha \otimes_{E_\alpha} M_\alpha$. Supposons de plus que f est plat, propre et de présentation finie. Alors $\text{Lie } G$, qui est un $\mathcal{O}_X$ -Module localement libre, est plat sur R et par suite chacun des E -modules M_α est V -plat (2.5.1). Notons $\hat{W}_E \otimes_{\mathbb{L}} C(U^*, M)$ le complexe de Čech $U_\alpha \mapsto \hat{W}_\alpha \otimes_{E_\alpha} M_\alpha$; il a donc pour image dans $D^-(\mathcal{G})$ ce que nous avons noté $\hat{W}_E \otimes_{\mathbb{L}} C(U^*, M)$ dans 2.6. Par ailleurs on a dans $D^-(R) : \text{Lie } C(U^*, M) = H^*(X, \text{Lie } G)$ qui

est représentable dans $C^-(R)$ par un complexe parfait d'amplitude $[0, n]$ où $n = \dim X/R$ (EGA III §7 ou [11] th. p. 46). On peut donc appliquer les résultats de 2.6.4 et de 2.6.5 ii).

Théorème 2.7.3. Soient R un anneau complet pour la topologie p -adique, $f: X \rightarrow \text{Spec}(R)$ un morphisme plat, propre et de présentation finie, G un groupe formel lisse sur X , $L^* \in C^-(R)$ un complexe parfait qui représente $H^*(X, \text{Lie } G)$. Alors il existe un complexe parfait P^* de R -groupes formels lisses ayant les propriétés suivantes :

1) $\text{Lie } P^* \simeq L^*$ dans $C^-(R)$.

2) P^* et $R^*f_*(G)$ ont même image dans $D^-(p-R)$, catégorie dérivée des foncteurs en groupes définis sur les R -algèbres nilpotentes, annulées par une puissance de p .

Remarques 2.7.4. L'isomorphisme $R^*f_*(G^*) \xrightarrow{\sim} P^*$ dans $D^-(p-Q)$ est compatible avec les changements d'anneaux $R \rightarrow R'$.

Le théorème 2.7.3 permet de retrouver et de préciser les questions de pro-représentabilité abordées dans ([1] II). En effet, gardons les hypothèses et notations de 2.7.3 et supposons R noethérien pour simplifier. On obtient la proposition suivante :

Proposition 2.7.5. Supposons R local noethérien complet, à corps résiduel k de caractéristique $p > 0$.

1) La restriction de $R^*f_*(G)$ aux R -algèbres nilpotentes de longueur finie admet une enveloppe $\mathcal{S}$ au sens de Schlessinger [16]. De plus, on peut choisir pour $\mathcal{S}$ un R -groupe formel de présentation finie et pour flèche canonique $\mathcal{S} \rightarrow R^*f_*(G)$ un morphisme de foncteurs en groupes.

2) Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) La restriction de $R^i f_*(G)$ aux R -algèbres nilpotentes artiniennes est représentable par un R -groupe formel de présentation finie.

ii) $Z^{i-1} = \text{Ker}\{P^{i-1} \rightarrow P^i\}$ est un R -groupe formel lisse.

iii) $R^{i-1} f^*(G)$, restreint aux R -algèbres nilpotentes de longueur finie est exact à droite.

3) Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le faisceau associé, pour la topologie fppf , à la restriction de $R^i f_*(G)$ aux R -algèbres nilpotentes de longueur finie est représentable par un R -groupe formel de présentation finie.

ii) $Z^{i-1} = \text{Ker}\{P^{i-1} \rightarrow P^i\}$ est un R -groupe formel plat (condition en particulier vérifiée si $R=k$).

La démonstration de 2.7.5 est facile à partir du complexe P' . Notons simplement que si le complexe des algèbres de Lie des objets de P' est une résolution minimale de $\text{Lie}(G)$ (2.6.5 i)), on peut prendre pour enveloppe de Schlessinger $\mathcal{S}$ de $R^i f_*(G)$, le groupe formel $Z^i = \text{Ker}\{P^i \rightarrow P^{i+1}\}$.

3. Un critère de platitude.

3.0 A partir de maintenant, R est un anneau de valuation discrète complet, à corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, à corps des fractions K de caractéristique 0 , π est une uniformisante de R . L'anneau R contient le sous-anneau $W=W(k)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k ; le rang de R sur W est l'indice de ramification absolu e de R égal encore à $v(p)$, où v est la valuation normalisée par $v(\pi)=1$.

Soit M un W -module (resp. un R -module). On note $\text{rg}(M)$ son rang et $\bar{M}$ le k -vectoriel M/pM (resp. $M/\pi M$).

Nous allons démontrer le théorème 2 de l'introduction par réduction au cas des groupes p -divisibles que nous allons d'abord traiter.

3.1 Cas des groupes p -divisibles.

Dans ce numéro on pose $E = E_k$.

Définition 3.1.1. i) Un cristal est un E -module M qui est un W -module libre de type fini ; donc M est le module de Cartier d'un groupe formel p -divisible.

ii) Une filtration d'un cristal M (relative à R) est la donnée d'un sous- R -module L de $R \otimes_W M$ tel que, par réduction mod. π , on obtienne une bijection $\bar{L} \xrightarrow{\sim} V\bar{M}$.

Rappelons que l'intérêt de ces notions provient de la théorie des relèvements des groupes p -divisibles :

Rappel 3.1.2. Soient $\bar{G}$ un k -groupe formel p -divisible et M son module de Cartier. Supposons $e \nless p-1$. Il y a une bijection canonique fonctorielle entre les classes d'isomorphismes de R -groupe formels lisses G qui relèvent $\bar{G}$ et les filtrations L de M relatives à R .

La correspondance est décrite dans [9] lorsque $e = 1$, elle s'étend au cas $e \nless p-1$ (cf. [3] chap. IV).

Si M est un cristal on note $d'(M)$ la dimension du k -vectoriel $V\bar{M}$ (si M est le module de Cartier d'un k -groupe p -divisible G , $d'(M)$ est la dimension du dual de Cartier de G). Soit :

$$(1) \quad 0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

une suite exacte de cristaux. On en déduit une suite exacte de

R-modules :

$$(2) \quad 0 \rightarrow M' \otimes_W R \rightarrow M \otimes_W R \rightarrow M'' \otimes_W R \rightarrow 0 .$$

Soit $L \hookrightarrow M \otimes_W R$ une filtration du cristal M . Posons $L' = L \cap M' \otimes_W R$; soit L'' l'image de L dans $M'' \otimes_W R$ et L''' le saturé de L'' dans $M'' \otimes_W R$ (i.e. L'''/L'' est de p -torsion et $M'' \otimes_W R/L'''$ est sans p -torsion).

Lemme 3.1.3. i) On a $\text{rg}(L') \leq d'(M') ;$

$$\text{rg}(L'') = \text{rg}(L''') \geq d'(M'') .$$

ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) L' est une filtration du cristal M' .
- b) $\text{rg}(L') = d'(M') .$
- c) L'' est une filtration du cristal M'' .
- d) $\text{rg}(L'') = d'(M'') .$
- e) $L'' = L''' .$

Démonstration : Par réduction de (1) mod. p on obtient la suite exacte

$$(3) \quad 0 \rightarrow \bar{M}' \rightarrow \bar{M} \rightarrow \bar{M}'' \rightarrow 0 .$$

Notons que $VM \supset pM$ de sorte que $M/VM \cong \bar{M}/V\bar{M}$. Par réduction de (1) mod. V , on obtient donc la suite exacte :

$$(4) \quad 0 \rightarrow \bar{M}/V\bar{M}' \rightarrow \bar{M}/V\bar{M} \rightarrow \bar{M}''/V\bar{M}'' \rightarrow 0 .$$

De (3) et (4), on déduit la suite exacte :

$$(5) \quad 0 \rightarrow V\bar{M}' \rightarrow V\bar{M} \rightarrow V\bar{M}'' \rightarrow 0 .$$

Considérons le diagramme commutatif de R-modules, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & R \otimes_W M' & \longrightarrow & R \otimes_W M & \longrightarrow & R \otimes_W M'' \longrightarrow 0 \end{array} .$$

Par réduction modulo π , on obtient le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$(6) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bar{L}' & \longrightarrow & \bar{L} & \longrightarrow & \bar{L}'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \scriptstyle \text{VM} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bar{M}' & \longrightarrow & \bar{M} & \longrightarrow & \bar{M}'' \longrightarrow 0 \end{array} .$$

D'après (4) $V\bar{M} \cap \bar{M}' = V\bar{M}'$ de sorte que l'injection $\bar{L}' \rightarrow \bar{M}'$ se factorise à travers $V\bar{M}'$ d'où $\text{rg}(L') \leq d'(M')$. Par ailleurs, par réduction modulo π du diagramme

$$\begin{array}{ccc} L'' & \longrightarrow & L''' \\ & \searrow & \swarrow \\ & R \otimes_W M & \end{array}$$

on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{L}'' & \longrightarrow & \bar{L}''' \\ \downarrow & & \swarrow \\ V\bar{M}'' & & \bar{M}'' \end{array}$$

avec $\bar{L}'' \rightarrow V\bar{M}''$ surjectif et $\bar{L}''' \rightarrow \bar{M}''$ injectif.

D'où la deuxième assertion de i) et les équivalences de ii).

Proposition 3.1.4. Soit $(M^0, L^0) \rightarrow (M^1, L^1)$ un morphisme de cristaux filtrés c'est-à-dire la donnée d'un morphisme de cristaux $u: M^0 \rightarrow M^1$, tel que $(u \otimes_W R)(L^0) \subset L^1$. Soient $N' = \text{Ker}(u)$, $N'' = \text{Im}(u)$ et N''' le saturé de N'' dans M^1 . Soient $L' = L^0 \cap N' \otimes_W R$, L'' l'image de L^0 dans $N'' \otimes_W R$ et $L''' = L^1 \cap N''' \otimes_W R$. Alors L' , L'' et L''' induisent respectivement des filtrations des cristaux N', N'', N''' .

Notons que $N'' \rightarrow N'''$ est injectif de conoyau de longueur finie ; par suite $d'(N'') = d'(N''')$.

D'après 3.1.3 i), on a

$$\operatorname{rg}(L'') \geq d'(N'') \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(L''') \leq d'(N''') .$$

Comme $(u \otimes_{\mathbb{W}} R)(L^{\circ}) \subset L^1$, on a $L'' \subset L'''$. Par suite les inégalités ci-dessus sont des égalités et on conclut grâce à 3.1.3 ii).

Corollaire 3.1.5. Soit $u : G^{\circ} \rightarrow G^1$ un morphisme de R -groupes formels p -divisibles et supposons $e \nmid p-1$. Alors $\operatorname{Ker}(u)$ est plat extension d'un groupe fini et plat H par un groupe p -divisible G' qui relève la composante neutre réduite de la fibre spéciale de $\operatorname{Ker} u$. L'image fppf de u est un sous-groupe p -divisible G''' de G^1 .

Notons $\bar{G}$ la fibre spéciale d'un R -groupe formel G .

D'après 3.1.2, le morphisme u correspond à un morphisme de cristaux filtrés $(M^{\circ}, L^{\circ}) \rightarrow (M^1, L^1)$. Reprenons les notations de 3.1.4. Le groupe formel réduit $(\operatorname{Ker}(\bar{u}))_{\text{red}} = \bar{G}'$ est lisse et a pour module de Cartier M' ; le groupe quotient $\bar{G}^{\circ}/\bar{G}' = \bar{G}''$ a pour module de Cartier M'' ; l'image fppf de $\bar{G}^{\circ}$ dans $\bar{G}^1$ est un sous-groupe $\bar{G}'''$ de $\bar{G}^1$ qui a M''' pour module de Cartier.

D'après 3.1.4 et le dictionnaire 3.1.2 les flèches :

$$\bar{G}' \rightarrow \bar{G}^{\circ} \rightarrow \bar{G}'' \rightarrow \bar{G}''' \rightarrow \bar{G}^1$$

se relèvent en des flèches de R -groupes p -divisibles :

$$G' \rightarrow G^{\circ} \rightarrow G'' \rightarrow G''' \rightarrow G^1 .$$

Alors G' est un sous-groupe de G° , G''' est un sous-groupe de G^1 ; $G^{\circ} \rightarrow G''$ est plat de noyau G' et $G'' \rightarrow G'''$ est plat de noyau fini H . Il en résulte que u est plat, d'image fppf G''' et que $\operatorname{Ker}(u)$ est plat extension de H par G' .

Le corollaire 3.1.5 fournit une démonstration du théorème 2 de l'introduction dans le cas où les groupes lisses G et H sont

p -divisibles (l'hypothèse $\text{Ker}(u)$ équidimensionnel étant automatique). Dans les paragraphes suivants, nous allons établir le théorème 2 en général par réduction au cas p -divisible.

3.2 Image schématique formelle.

Faute de références sur les "images schématiques" dans le cadre formel, nous allons faire un peu d'algèbre commutative.

Soient $A \rightarrow B$ et $A \rightarrow C$ des morphismes locaux d'anneaux locaux noethériens à extension résiduelle triviale et complets pour la topologie définie par leurs idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{m}_A$, $\mathfrak{m}_B$, $\mathfrak{m}_C$. Soit $D = B \hat{\otimes}_A C$, l'anneau local noethérien, complété de $B \otimes_A C$ pour la topologie définie par l'idéal maximal $\mathfrak{m}_B \otimes C + B \otimes \mathfrak{m}_C$.

Lemme 3.2.1. Soit M un B -module de type fini et A -plat. Alors il existe un entier n , un morphisme local de R -algèbres $\varphi : A[[T_1, \dots, T_n]] \rightarrow B$, tel que le $A[[T_1, \dots, T_n]]$ -module M_φ , déduit de M par restriction des scalaires, possède une suite de composition de sous-modules : $0 \subset M_n \subset \dots \subset M_0 = M_\varphi$, ayant les propriétés suivantes : pour $i = 0, \dots, n$, M_i/M_{i+1} est annihilé par $T_{i+1}, \dots, T_n$ et, considéré comme $A[[T_1, \dots, T_i]]$ -module par passage au quotient, est libre de type fini.

La démonstration est analogue à celle donnée dans ([7] §2) lorsque B est une A -algèbre de type fini.

Corollaire 3.2.2. 1) Si M est un B -module de type fini A -plat et si N est un C -module de type fini A -plat, le produit tensoriel complété $M \hat{\otimes}_A N$ est un D -module de type fini et A -plat.

2) Si B et C sont A -plats et si $u : B \rightarrow C$ est un R -morphisme local injectif, $u \hat{\otimes}_R u : B \hat{\otimes}_A B \rightarrow C \hat{\otimes}_A C$ est injectif.

Grâce au lemme 3.2.1, 1) se ramène par dévissage à constater que $A[[\underline{T}]] \hat{\otimes}_A A[[\underline{U}]] = A[[\underline{T}, \underline{U}]]$ est plat sur A , tandis que 2) se ramène au fait que si $B \rightarrow C$ est injectif, il en est de même $B[[\underline{T}]] \rightarrow C[[\underline{T}]]$.

Soit de nouveau R un anneau de valuation discrète complet.

Corollaire 3.2.3. Soit $u : G \rightarrow H$ un morphisme de R -groupes formels de présentation finie, correspondant à un morphisme de R -algèbres $a : A \rightarrow B$. Soit $I = \text{Ker}(a)$ et $A' = A/I$. Supposons G plat sur R (i.e. B plat sur R). Alors A' est l'algèbre d'un sous-groupe formel H' de H , plat sur R , appelé l'image schématique de u .

En effet, A' étant contenu dans B est sans π -torsion, donc R -plat. Il résulte de 3.2.2 que la flèche canonique $A' \hat{\otimes}_R A' \rightarrow B \hat{\otimes}_R B$ est injective ; on en déduit formellement que la co-multiplication $A \rightarrow A \hat{\otimes}_R A$ passe au quotient en $A' \rightarrow A' \hat{\otimes}_R A'$, d'où le fait que A' est l'algèbre d'un sous-groupe formel de H .

Corollaire 3.2.4. Soient G un R -groupe formel de présentation finie d'algèbre A . Le quotient A' de A par son idéal de π -torsion est l'algèbre d'un sous-groupe formel G' de G , plat sur R , appelé adhérence schématique dans G de "la fibre générique".

Cela résulte du fait que $A' \hat{\otimes}_R A'$ est R -plat (3.2.2).

3.3 Critère de platitude, cas général.

Nous allons établir le théorème 2 de l'introduction sous la forme suivante :

Théorème 3.3.1. Soit $u : G \rightarrow H$ un morphisme de R -groupes formels, plats, de présentation finie. On suppose que G et H sont des sous-groupes de R -groupes formels lisses (condition sans doute

toujours réalisée) et que $\text{Ker}(u)$ est équidimensionnel (i.e. fibre générique et fibre spéciale ont même dimension). Alors, si $e \ll p-1$, $\text{Ker}(u)$ est plat.

Démonstration : a) Réduction au cas où G et H sont lisses.

Par hypothèse, H se plonge dans un groupe formel lisse ; on peut donc supposer H lisse. On suppose également que G est un sous-groupe d'un groupe formel lisse L^0 . Soit L^1 le quotient fppf L^0/G qui est représentable par un R -groupe lisse. En poussant l'extension $0 \rightarrow G \rightarrow L^0 \rightarrow L^1 \rightarrow 0$ par la flèche $G \rightarrow H$ on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & G & \rightarrow & L^0 & \rightarrow & L^1 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H & \rightarrow & L & \rightarrow & L^1 \rightarrow 0 \end{array}$$

où L , extension de deux lisses, est lisse. Comme

$\text{Ker}(u) \simeq \text{Ker}\{L^0 \rightarrow L\}$, on est ramené au cas où G et H sont lisses.

b) Réduction au cas p -divisible.

Posons $N = \text{ker}(u)$. Soit $N' \hookrightarrow N$ l'adhérence schématique dans N de sa fibre générique (3.2.4). Il nous faut montrer que $N = N'$. L'hypothèse sur la dimension des fibres de N entraîne que le groupe formel quotient fppf N/N' est fini et, bien sûr, à fibre générique nulle. Quitte alors à passer au quotient dans G par N' , on se ramène au cas où N est fini, à fibre générique nulle, et il nous faut montrer que $N = 0$.

Soit $H' \hookrightarrow H$ l'image schématique de u dans H (3.2.3). C'est un sous-groupe formel plat de H . Soient A, B, B' les algèbres respectives de G, H, H' . Comme $\text{Ker}(u)$ est fini, A est finie sur B donc sur son quotient B' . D'autre part, vu la définition de l'image schématique, $B' \rightarrow A$ est injectif. Il en résulte que A et B' ont même dimension, donc G et H' ont même dimension relative.

Soit H'' le quotient fppf H/H' .

Considérons le complexe de R -groupes lisses :

$$G^* \quad 0 \rightarrow G \xrightarrow{u} H \rightarrow H'' \rightarrow 0 .$$

Il provient, par application du foncteur $\hat{W}_E^{\otimes}$ d'un complexe de E -modules V -libres de type fini (2.2.2) :

$$M^* \quad 0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0 .$$

La fibre spéciale $\bar{G}^*$ de G^* a des groupes de cohomologie fppf qui sont des schémas en groupes finis sur k . Il en résulte que $E_k^{\otimes} M^*$ a des groupes de cohomologie qui sont des $W(k)$ -modules de longueur finie. D'après 2.6.14 on peut trouver un complexe de R -groupes formels p -divisibles :

$$G'^* \quad 0 \rightarrow P' \xrightarrow{u'} P \rightarrow P'' \rightarrow 0$$

ayant même image que G^* dans $D^-(p\text{-}\mathcal{G})$. En particulier, $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u')$ sont des R -groupes formels de présentation finie dont les restrictions aux R -algèbres nilpotentes de longueur finie définissent des foncteurs isomorphes. Il en résulte que $\text{Ker}(u) \simeq \text{Ker}(u')$ (car R étant noethérien complet, les algèbres de $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u')$ pro-représentent la restriction des foncteurs aux R -algèbres de longueur finie). D'après 3.1.5, $\text{Ker}(u')$ est plat sur R , donc $\text{Ker}(u)$ est plat sur R . Ayant une fibre générique nulle, $\text{Ker}(u)$ est nul, ce qui achève la démonstration de 3.3.1.

Remarque 3.3.2. Dans le séminaire de Géométrie Algébrique d'Orsay 76-78 (qui sera peut-être publié un jour!) on propose une démonstration de 3.3.1 (ou du moins de l'analogue de 3.3.1 pour les schémas en groupes (cf. 3.3.5)) indépendante de la théorie des groupes p -divisibles.

Corollaire 3.3.3. Soit G^* un complexe de R -groupes formels lisses et notons $\bar{G}^*$ (resp. G_K^*) le complexe fibre spéciale (resp.

fibre générique) de $G^\bullet$. Supposons $e \leq p-1$ et soit i un entier, tel que les groupes de cohomologie fppf $H^i(\bar{G}^\bullet)$ et $H^i(G_K^\bullet)$ aient même dimension. Alors les groupes de cycles de $G^\bullet$, Z^{i-1} et Z^i sont plats sur R ; $H^i(G^\bullet)$ et $H^{i+1}(G^\bullet)$, faisceaux de cohomologie fppf de $G^\bullet$, sont représentables et $H^i(G^\bullet)$ est plat sur R .

Notons B^j le faisceau fppf $\text{Im}\{G^{j-1} \rightarrow G^j\}$. On a $\dim \bar{Z}^j \gg \dim Z_K^j$ et par suite $\dim \bar{B}^{j+1} \ll \dim B_K^{j+1}$. L'hypothèse entraîne donc que Z^i et Z^{i-1} sont équidimensionnels, donc plats sur R (3.3.1). Alors B^i et B^{i+1} sont représentables par des R -groupes formels lisses. Par suite H^i et H^{i+1} sont représentables. Enfin $H^i = \text{Ker}\{G^i/B^i \rightarrow G^{i+1}\}$, étant supposé équidimensionnel, est plat, toujours d'après 3.3.1.

Corollaire 3.3.4. Supposons $e \leq p-1$ et soit G un R -groupe formel plat, dont la fibre spéciale réduite est p -divisible. Supposons que G se plonge dans un R -groupe lisse (condition, dans le cas présent, toujours réalisable). Alors G est extension d'un groupe fini et plat par un groupe formel p -divisible.

En effet, grâce encore à 2.6.11, on peut plonger G dans un R -groupe p -divisible et on applique 3.1.5.

Voici l'analogie de 3.3.1 pour les schémas en groupes.

Proposition 3.3.5. Soit $u: G \rightarrow H$ un morphisme de R -schémas en groupes plats, de présentation finie. On suppose que les complétés formels de G et H le long de la section unité se plongent dans des groupes formels lisses, que $N = \text{Ker}(u)$ est équidimensionnel et que H est séparé. Alors :

i) Si $e \leq p-1$, N est plat.

ii) Si $e=p-1$, N est plat le long de la section unité et plus précisément, il existe une suite exacte fppf :

$$0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0 .$$

Où N' est un sous-groupe ouvert plat de N , adhérence schématique dans N de sa fibre générique et N'' est un schéma en groupes fini et net (i.e. non ramifié) sur R , prolongement par zéro sur $\text{Spec}(R)$ de sa fibre spéciale $\bar{N}''$, qui est un k -groupe étale annulé par p .

Par complétion le long de la section unité, on obtient une suite exacte de groupes formels :

$$0 \rightarrow \hat{N} \rightarrow \hat{G} \xrightarrow{\hat{u}} \hat{H}$$

et il résulte de 3.3.1 que $\hat{N}$ est plat si $e \ll p-1$. Alors N est plat le long de la section unité, et l'adhérence schématique N' de la fibre générique N_K de N , dans N , est un sous-groupe ouvert et fermé de N , plat sur R . Comme H est séparé, N est fermé dans G et N' est aussi fermé dans G . Quitte à passer au quotient par N' ([14] Th. 3.3.1), on se ramène au cas où N est fini, net, à fibre générique nulle.

Soit $\hat{\hat{G}}$ le complété formel de G le long de la fibre fermée $\bar{N}$ de N . Alors $\hat{\hat{G}}$ est un groupe formel (non nécessairement connexe) et l'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \hat{G} \rightarrow \hat{\hat{G}} \rightarrow \tilde{N} \rightarrow 0$$

où $\tilde{N}$ est un groupe fini étale, de fibre spéciale $\bar{N}$. Par complétion $\hat{u}$ donne un morphisme $\hat{\hat{u}}: \hat{\hat{G}} \rightarrow \hat{H}$, de noyau N , qui est une immersion en restriction à $\hat{\hat{G}}$. Passant au quotient par $\hat{G}$, on obtient une suite exacte :

$$0 \rightarrow N \rightarrow \tilde{N} \xrightarrow{w} \hat{H}/\hat{G} = \hat{H}''$$

où la fibre spéciale $\bar{w}$ de w est nulle. On peut remplacer $\hat{H}''$ par

l'image schématique de w qui est un groupe fini, plat, à fibre spéciale connexe. Alors w est un isomorphisme sur la fibre générique. La proposition résulte alors du lemme suivant :

Lemme 3.3.6. Soit $w : Y \rightarrow Z$ un morphisme de R -schémas en groupes finis et plats tel que w_K soit un isomorphisme.

1) Si $e < p-1$, w est un isomorphisme.

2) Si $e = p-1$ et si $\bar{w}$ est nul, Y est étale, Z est de type multiplicatif, Y et Z sont annulés par p ; le complémentaire de la section nulle de $\text{Ker}(w)$ est un k -schéma.

Le lemme résulte facilement de [15]. En effet, 1) est conséquence de 3.3.6 de loc. cit.. Le fait que dans 2), Y soit étale et Z de type multiplicatif, résulte, par dévissage de 3.3.2 3). Comme les racines p^2 -èmes de 1 sont ramifiées sur R , Y et Z sont nécessairement annulés par p . Enfin, la dernière assertion résulte du fait que les points non nuls de $\mu_p(R)$ ne sont pas nuls mod. π^2 .

4. Applications au foncteur de Picard.

4.0 Rappels sur le foncteur de Picard.

Soit $f : X \rightarrow R$ un morphisme de schémas propre et plat de dimension relative n . On note $\bar{X}$ la fibre spéciale et, d'une manière générale, on note avec une $-$ des objets définis sur k . Soit P le foncteur de Picard relatif de X sur R . On fait les hypothèses suivantes :

(*) $\mathcal{O}_X$ est cohomologiquement plat en dimension 0 (i.e. la formation de $f_*(\mathcal{O}_X)$ commute au changement de base $R \rightarrow k$). Cette hypothèse est en particulier vérifiée si $\bar{X}$ est réduit (EGA III §7) et elle assure que P est représentable par un espace algébrique localement de présentation finie ([14] 1.5.1). Si de plus P est

séparé, ou contient un sous-groupe ouvert séparé, P est un schéma en groupes ([14] 3.3.6). Cette condition est en particulier réalisée si $\bar{X}$ est intègre. On note P^τ le sous-espace algébrique en groupes ouvert de P qui représente le foncteur des faisceaux inversibles numériquement équivalents à zéro. L'espace P^τ est de présentation finie sur R (SGA 6 XIII 4.7).

(**) On suppose que P est équidimensionnel (i.e. P_K et $\bar{P}$ ont même dimension). Cette condition est réalisée si $\bar{P}^\tau$ est de rang unipotent nul et en particulier si $\bar{X}$ est normal, auquel cas $(\bar{P}^0)_{\text{red}}$ est une variété abélienne ([5] Exp. VI cor. au Th. 2.5).

On note $(P^\tau)'$ (resp. P') l'adhérence schématique de P_K^τ dans P^τ (resp. de P_K dans P). Les schémas en groupes séparés $T = P^\tau / (P^\tau)'$ et $N = P / P'$ mesurent le défaut de platitude de P^τ et de P .

4.1 Platitude de P^τ

Notons $\hat{G}_m$ le groupe multiplicatif formel, complété du groupe multiplicatif G_m le long de la section unité. Son module de Cartier sur une R -algèbre R' est le groupe de Witt $W(R')$. Appliquons alors les considérations de 2.7 et 2.6 en prenant pour groupe G le groupe multiplicatif formel sur X . On obtient le résultat suivant :

Proposition 4.1.1. Soit X un R -schéma propre et plat.

1) Soit $L^\bullet$ un complexe parfait de R -modules qui représente $H^*(X, \mathcal{O}_X) \in D^-(R)$. Alors il existe un complexe $G^\bullet$ de R -groupes formels lisses, dont le complexe des algèbres de Lie est isomorphe à $L^\bullet$ dans $C^-(R)$ et qui représente $R^* f_*(\hat{G}_m)$, en restriction aux R -algèbres nilpotentes de longueur finie.

2) Soit $G^\bullet$ comme dans 1), provenant par application du foncteur $\hat{W}_E^\otimes$ d'un complexe $N^\bullet \in C^-(E)$ de E -modules V -libres de

type fini (2.2.2). Soit $n \in \mathbb{N}$ et posons $R_n = R/\pi^n R$, $X_n = X \otimes_{R_n} R_n$, $E_n = E_{R_n}$ et soit W_{X_n} le faisceau des vecteurs de Witt sur X_n . Alors $E_n \otimes_{E_n} N^*$ et $R^* f_*(W_{X_n})$ ont même image dans $D^-(E_n)$.

Etant donné un morphisme $A \rightarrow B$ dans $\text{Nil}(R)$, disons qu'il est fidèlement plat de présentation finie, si le morphisme d'algèbres unitaires associées $A \oplus R \rightarrow B \oplus R$ est fidèlement plat de présentation finie. Ceci étant, si G est un foncteur en groupes sur les R -algèbres nilpotentes de longueur finie, il lui correspond un faisceau fppf associé noté $\tilde{G}$. Si G est représentable par un R -groupes formel de présentation finie, G est déjà un faisceau pour la topologie fppf.

Interprétons les faisceaux fppf $\widetilde{R^1 f_*}(\hat{G}_m)$. Soit $G \in \text{Nil}(X)$. Vu les dévissages de 2.7.1, le faisceau $\hat{G}_m[G]$ sur X a même cohomologie pour la topologie de Zariski sur X et pour la topologie étale. Il en résulte que les faisceaux étales sur $\text{Spec}(R)$ $\Phi(X/R, \hat{G}_m)$ introduits dans [1] ne sont autres que les faisceaux étales associés aux préfaisceaux $R^1 f_*(\hat{G}_m)$. Comme R est strictement hensélien, ces deux faisceaux prennent les mêmes valeurs sur les R -algèbres nilpotentes de longueur finie. En bas degrés, $R^0 f_*(\hat{G}_m)$, est le complété $\hat{U}$, le long de la section unité, du schéma en groupes U qui représente le foncteur des unités de $0_X : S \in \text{Sch}/R \mapsto \Gamma(X_S, 0_{X_S})^*$. Lorsque X vérifie (*) (4.0), U est lisse et $\widetilde{R^1 f_*}(\hat{G}_m)$ est le complété $\hat{P}$, le long de la section unité, de l'espace algébrique $P = \text{Pic}_{X/R}$.

Théorème 4.1.2. Soit $f : X \rightarrow R$ un morphisme de schémas propre et plat vérifiant (*) et (**) (4.0).

1) Si $e < p-1$, P^τ est plat sur R ; le schéma en groupes N (4.0) est net sur R et $N(k)$ est sans torsion; le faisceau fppf $\widetilde{R^2 f_*}(\hat{G}_m)$ est représentable par un groupe formel de présentation

finie.

2) Si $e = p-1$, P^τ est plat le long de la section unité. Plus précisément, T (4.0) est un R -schéma en groupes net, annulé par p tandis que N (4.0) est un R -schéma en groupes net, dont la torsion est annulée par p . Enfin $\widetilde{R^2 f_*}(\hat{G}_m)$ est représentable par un groupe formel de présentation finie.

Démonstration : Supposons $e < p-1$ et soit $G^\bullet$ le complexe de R -groupes formels lisses introduit dans 4.1.1. L'hypothèse $(**)$ et 3.3.3 entraînent que $R^1 f_*(\hat{G}_m) = \hat{P}$ est plat sur R et que $\widetilde{R^2 f_*}(\hat{G}_m)$ est représentable par un R -groupe formel de présentation finie. Il en résulte déjà que P^τ et P sont plats le long de la section unité et donc que les schémas en groupes T et N sont nets sur R . Notons B le groupe formel qui représente $\widetilde{R^2 f_*}(\hat{G}_m)$.

Soit $\bar{a}$ un élément de $T(k)$ ou un élément de torsion de $N(k)$. Comme k est algébriquement clos, $\bar{a}$ se relève en un élément a de $P(k)$ représentable par un faisceau inversible $\bar{L}$. Pour étudier le relèvement de $\bar{L}$ en un faisceau inversible sur X , on peut remplacer X par son complété formel $\mathcal{X}$ le long de $\bar{X}$ et on trouve une obstruction ξ dans $H^2(\mathcal{X}, \hat{G}_m) = R^2 f_*(\hat{G}_m)(\pi R)$. Soit $\eta \in B(\pi R)$ son image dans le faisceau fppf associé. C'est un élément de torsion, donc nul si $e < p-1$, (resp. annulé par p si $e = p-1$) d'après 3.3.6. Par suite, il existe R' fini et plat sur R tel que $\bar{L}$ (resp. $\bar{L}^{\otimes p}$) se relève en un faisceau inversible sur $X \times_R R'$, d'où les autres assertions de 4.1.2.

Théorème 4.1.3. Supposons la fibre spéciale $\bar{X}$ de X normale.

1) Si $e < p-1$, le complété formel $\hat{P}$ de P le long de la section unité est extension d'un groupe formel fini et plat par un groupe formel p -divisible.

2) Si $e < p-1$, P^τ est extension d'un schéma en groupes quasi-fini et plat par un schéma abélien.

3) Si $e = p-1$ et si A est le R-schéma abélien, modèle de Néron de la variété abélienne P_K^O , on a un morphisme canonique de schémas en groupes $A \rightarrow P^\tau$, net, de noyau annulé par p .

Notons que ce théorème joint au fait que Pic^τ est propre si X est lisse, entraîne les théorèmes 1 et 1' de l'introduction.

Démonstration : L'hypothèse $\bar{X}$ normal entraîne que $\bar{P}_{\text{red}}^O$ est une variété abélienne (4.0). Supposons $e < p-1$. D'après 4.1.1 et 3.3.1, $\hat{P}$ est un groupe formel plat qui se plonge dans un groupe formel lisse. L'assertion 1) résulte donc de 3.3.4.

Soit A' le R-schéma en groupes plat, adhérence schématique de la variété abélienne P_K^O dans P . Alors A' est propre sur R et contenu dans P^τ . Soit $h: A \rightarrow A'$ une lissification de A' ([13], Prop. 1.3). Comme $\bar{A}'$ possède un ensemble schématiquement dense de points par lesquels passent des sections de A' sur R (à savoir les points d'ordre fini) h est surjectif et par suite A est un schéma abélien (h étant simplement le morphisme de normalisation). Bien sûr, A est le modèle de Néron de P_K^O sur R . Il résulte alors de 3.3.6 que $\text{Ker } h$ est nul si $e < p-1$, et un groupe net annulé par p si $e = p-1$. Dans le cas où h est un monomorphisme, h étant propre, c'est une immersion fermée donc un isomorphisme. Alors P^τ est extension du schéma en groupes quasi-fini et plat P^τ/A' par le schéma abélien A' .

Remarque 4.1.4. 1) B. Mazur a récemment ([10] Prop. 1.2) utilisé les arguments ci-dessus pour vérifier que certains sous-schémas en groupes plats de R-schémas abéliens étaient des schémas abéliens.

2) Dans le cas $\bar{X}$ normal et $e < p-1$, on a donc mis en évidence un sous-schéma abélien de P qui, fibre à fibre, fournit la composante neutre réduite des fibres de P . C'est là un élément de réponse à une question posée autrefois par Grothendieck ([5] Exp. VI remarque 3.4). Nous verrons sur un exemple que lorsque $e \geq p-1$, un tel sous-schéma abélien n'existe pas nécessairement, même lorsque X est lisse sur R .

3) Sous les seules hypothèses i) $\bar{P}_{\text{red}}^0$ est de rang unipotent nul, ii) P est séparé, iii) $e < p-1$, on peut montrer que P^τ est extension d'un schéma en groupes quasi-fini et plat, par un schéma en groupes lisse, à fibres connexes, extension d'une variété abélienne par un tore.

4.2 Un exemple où $\text{Pic}^\tau(X)$ n'est pas plat.

Dans ce numéro, les schémas en groupes considérés ne sont pas nécessairement commutatifs.

Lemme 4.2.1. Supposons $e \geq p-1$. Alors il existe un R -schéma en groupes G fini et plat, à fibre générique non commutative et à fibre spéciale commutative.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie $2d$ sur le corps premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée. On lui associe un groupe de Heisenberg non commutatif E , extension centrale de V par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Notons $\underline{E}$ le R -schéma en groupes constant associé à E .

Comme $e \geq p-1$, il existe un R -schéma en groupes fini et plat H , de rang p , et un R -morphisme $u: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow H$, qui est un isomorphisme sur la fibre générique et qui est nul sur la fibre spéciale : si $X^p - X = 0$ est l'équation canonique du schéma en groupes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, celle de H est $Y^p - \pi^{p-1}Y = 0$ et u envoie Y sur πX ; comme

π^{p-1} divise p , on peut effectivement munir H d'une structure de schéma en groupes, pour laquelle u est un morphisme [12] ; si $e = p-1$, on a $H \cong \mu_p$, si $e > p-1$, la fibre spéciale de H est isomorphe à α_p .

Il suffit alors de prendre pour G le R -schéma en groupes extension de $\underline{V}$ par H , déduit de $\underline{E}$ par u .

Nous allons reprendre, dans le cadre des schémas en groupes non nécessairement étales, la construction due à Serre, d'une surface lisse possédant un "revêtement" de groupe G fini donné qui soit une intersection complète [17].

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et G un k -schéma en groupes fini d'ordre $n = p^r n'$, $(p, n') = 1$, et soit $\ell < r$ la dimension de l'algèbre de Lie de G . Considérons la représentation de G sur sa bigèbre A par translations à gauche. Soit D une droite de A , dont le stabilisateur G_D dans G n'est pas nul. Alors G_D contient un sous-groupe élémentaire H du type $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, α_p , μ_m (m premier). Soit $B = A^H$ l'algèbre de l'espace homogène G/H qui est de dimension $n/\text{rang}(H)$. Si $H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou α_p , H laisse fixe D point par point, donc $D \subseteq B$. Si $H = \mu_m$, on a une décomposition de A en $\bigoplus_{i=1}^m A^i$ suivant les caractères de μ_m , où chacun des A^i est un B -module libre de rang 1 (SGA 3 Exp. VIII.4). Alors D est contenu dans l'un des A^i . Notons par ailleurs que G ne contient qu'un nombre fini de sous-groupes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et μ_m ($(m, p) = 1$), tandis que les sous-groupes α_p et μ_p correspondent à certaines droites de $\text{Lie}(G)$ donc dépendent au plus de $\ell-1$ paramètres. Il en résulte que les droites D de A , pour lesquelles $G_D \neq 1$, forment un fermé algébrique de dimension au plus égale à maximum $(\frac{n}{2}-1, \frac{n}{p}-1+\ell-1)$ donc est de codimension ≥ 1 dans l'espace des droites de A (en fait il est de codimension ≥ 3 dès que n est assez grand). On en déduit

que, dans la représentation de G , $A \oplus A \oplus A$, les droites D pour lesquelles $G_D \neq 1$, forment un espace de codimension ≥ 3 dans l'espace de toutes les droites.

Passant de là à une situation relative et des droites aux hyperplans, on obtient le résultat suivant.

Lemme 4.2.2. Soient S un schéma, G un S -schéma en groupes fini et plat, A la bigèbre de G sur laquelle G opère par translations à gauche, A' la représentation contraagrédiente, $B = A'^3$, $P = \text{Proj}(B)$, U le plus grand ouvert de P sur lequel G opère librement et $T = P - U$. Alors T est de codimension ≥ 3 sur chacune des fibres de P .

Proposition 4.2.3 (cf. [17] n° 20). Soient S un schéma local et G un S -schéma en groupes fini et plat. Il existe un espace projectif P sur S , muni d'une action linéaire de G , qui contient une S -surface Y , intersection complète relative dans P , qui est stable par G et telle que i) G opère librement sur Y , ii) $X = Y/G$ est lisse sur S .

Par passage à la limite, on peut supposer S local noethérien. Soit alors P comme dans 4.2.2 et soit Q le schéma quotient P/G . Alors $u: P \rightarrow Q$ est fini, Q est projectif sur S , équidimensionnel, avec pour faisceau ample $L = \text{Norm}_{P/Q}(O_P(1))$ et $u^*(L) = O_P(d)$ où d est le rang de G . De plus $V = u(U)$ est un ouvert de Q et V est le quotient fppf de U (SGA 3 Exp. V, 5), en particulier $U \rightarrow V$ est un torseur sous G . Enfin $Z = u(\Sigma)$ est de codimension ≥ 3 sur la fibre spéciale de Q .

Soit $n = \dim P/S$. Par un choix général de $n-2$ sections d'un multiple de L , on définit alors un sous-schéma X de Q contenu dans V qui est une surface lisse et projective sur S . Alors

$Y = u^*(X)$ est une intersection complète relative dans P et un torseur sous G au-dessus de X (bien sûr, en général on ne pourra pas choisir X de façon que Y soit lisse sur S).

Venons-en à l'exemple qui motive ce paragraphe.

Proposition 4.2.4. Soit G un R -schéma en groupes fini et plat, à fibre générique non commutative et à fibre spéciale commutative (un tel G existe pour $e \gg p-1$ d'après 4.2.1) et soit X une R -surface projective et lisse qui admet un torseur sous $G : Y \rightarrow X$ tel que Y soit intersection complète relative dans un espace projectif (4.2.3). Alors $\text{Pic}^\tau(X)$ est fini sur R et n'est pas plat sur R .

Comme $\bar{X}$ est lisse sur k , $\text{Pic}^0(\bar{X})_{\text{red}}$ est une variété abélienne (4.0). Par ailleurs $\bar{Y}$ étant une surface intersection complète, $H^1(\bar{Y}, \mathcal{O}_{\bar{Y}})$ est nul, donc $\text{Pic}^0(\bar{Y})$ est nul. Le noyau de la flèche $\text{Pic } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{Y}$ étant annulé par le rang de G , il en résulte d'abord que $\text{Pic}(\bar{X})$ est de dimension 0 et donc que $\text{Pic}^\tau(X)$ est fini sur R .

Par ailleurs, soit $\bar{G}$ la fibre spéciale de G et $\bar{G}'$ son dual de Cartier. Au torseur $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ sous $\bar{G}$ correspond canoniquement un morphisme

$$\bar{v} : \bar{G}' \rightarrow \text{Pic}(\bar{X}) \quad ([14] \text{ 6.2.3}).$$

Lemme 4.2.5. Le morphisme $\bar{v}$ est injectif.

Soit $\bar{H}' = \text{Ker}(\bar{v})$ et soit $\bar{H}$ le dual de Cartier de $\bar{H}'$. Alors $\bar{H}$ est un quotient de $\bar{G}$. Par extension de groupes, le torseur $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ sous $\bar{G}$ donne un torseur $\bar{Z} \rightarrow \bar{X}$ sous $\bar{H}$. Vu la définition de $\bar{H}'$, ce torseur est trivial et donc $H^0(\bar{Z}, \mathcal{O}_{\bar{Z}}) \xrightarrow{\sim} H^0(\bar{H}, \mathcal{O}_{\bar{H}})$. Par ailleurs, $\bar{Y}$ étant une intersection complète, on a $H^0(\bar{Y}, \mathcal{O}_{\bar{Y}}) = k$ et a fortiori, il en est de même de $H^0(\bar{Z}, \mathcal{O}_{\bar{Z}})$, d'où le lemme.

Il résulte du lemme que l'on a $\text{rang Pic}^\tau(\bar{X}) \gg \text{rang}(G)$. Examinons maintenant la fibre générique géométrique $X_{\bar{K}}$ qui est en caractéristique 0. L'intersection complète $Y_{\bar{K}}$ est simplement connexe et donc, le groupe fondamental de $X_{\bar{K}}$ est isomorphe à $G(\bar{K})$. On en déduit que $\text{Pic}^\tau(X_{\bar{K}})$ a même ordre que le plus grand quotient commutatif de $G(\bar{K})$. Vu le choix de G , ce dernier est strictement plus petit que le rang de G , d'où le fait que $\text{Pic}^\tau(X)$ n'est pas plat.

Remarques 4.2.6. i) Il est facile de montrer que $\bar{v}: \bar{G}' \rightarrow \text{Pic}(\bar{X})$ est en fait un isomorphisme. Ainsi, si $e=p-1$ et si on prend pour G le groupe considéré dans 4.2.1 avec $V = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on trouve que $\text{Pic}^\tau(X)$ contient un plus grand sous-schéma en groupes plat isomorphe à $\mu_p \times \mu_p$, tandis que sa fibre spéciale est $\mu_p \times \mu_p \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

ii) Il résulte formellement de 4.1.3 et de 4.2.4 que si G est un R -schéma en groupes fini et plat, à fibre générique non commutative et à fibre spéciale commutative, on a $e \gg p-1$. Exercice : donner une démonstration directe de ce fait.

iii) Il existe des variantes de 4.2.1 et 4.2.4 en égale caractéristique p , ce qui permet de construire sur $k[[t]]$, une surface propre et lisse pour laquelle la dimension de H_{DR}^1 (cohomologie de De Rham) n'est pas la même sur la fibre générique et sur la fibre spéciale.

4.3 Un exemple de R -schéma propre et lisse X tel que $\text{Pic}_{X/R}$ ne contient pas de sous-schéma abélien de même dimension que $\text{Pic}_{X/R}$ (autrement dit l'adhérence schématique dans $\text{Pic}_{X/R}$ de la composante neutre de $\text{Pic}_{X_K/K}$ est plate, mais n'est pas lisse).

D'après 4.1.3 ceci n'est possible que pour $e \gg p-1$. Soit donc $e \gg p-1$ et reprenons le morphisme de R -schémas en groupes $u: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow H$ introduit dans la démonstration de 4.2.1.

Lemme 4.3.1. Il existe une R-courbe elliptique E qui contient H comme sous-schéma en groupes.

Si $e = p-1$, $H = \mu_p$ et n'importe quelle courbe elliptique ordinaire convient.

Supposons $e \geq p-1$ de sorte que $\bar{H} = \alpha_p$. Soit $\bar{E}$ une courbe elliptique sur k supersingulière de sorte que $\bar{E} \supset \bar{H}$ et il en est de même du complété formel $\bar{G}$ de $\bar{E}$ à l'origine. Il résulte par exemple de 2.5.6 qu'il existe un R-groupe formel lisse G qui relève $\bar{G}$ et qui contient H . Comme il y a équivalence entre relèvements de $\bar{G}$ et relèvement de la courbe elliptique $\bar{E}$ on a prouvé le lemme.

Lemme 4.3.2. Il existe une courbe Y propre et lisse sur R et un schéma abélien B sur Y ayant les propriétés suivantes :

- i) La partie fixe de B est nulle.
- ii) B contient H_Y comme sous-schéma en groupes.

Soit E comme dans 4.3.1 et notons F le produit de p -copies de E .

Posons $\Gamma = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ que l'on fait opérer sur F par une permutation circulaire des facteurs. Soit d'autre part Y une R-courbe propre et lisse munie d'un revêtement étale galoisien $Y' \rightarrow Y$ de groupe Γ . Faisons opérer Γ sur $Y' \times F$ par son action sur les deux facteurs. On obtient ainsi par descente galoisienne un Y-schéma abélien B_1 .

Considérons E comme plongée dans F par l'application diagonale. Alors E est fixe sous Γ et donne par descente un sous-schéma abélien de B_1 canoniquement isomorphe à E_Y . Soit B le Y-schéma abélien quotient B_1/E_Y . Notons que E est la partie fixe de B_1 (de sorte que B est sans partie fixe) : en effet, il suffit de le voir sur la fibre générique et de noter que $H^0(Y, \text{Lie } B)$ s'identifie à la partie fixe sous Γ de $\text{Lie}(A/E)$ donc est nulle.

p-TORSION DU SCHÉMA DE PICARD

Considérons maintenant l'action de Γ sur $H^p \subset E^p = F$. Comme H et Γ sont d'ordre p , il existe une filtration $0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_{p-1} \subset H_p = H^p$ par des R -sous-schémas en groupes plats, stables par Γ , tels que H_i/H_{i-1} soit isomorphe à H avec action triviale de Γ . Par descente, on en déduit que B contient un sous-schéma en groupes isomorphe à H_Y (et correspondant au quotient H_2/H_1 de F/E). D'où le lemme.

Soit A un R -schéma abélien pour lequel il existe une immersion de schémas en groupes $j: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow A$ (par exemple, on peut prendre pour A le relèvement canonique sur R d'une courbe elliptique ordinaire). Soit $i: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow A \times H$, l'immersion de composantes j et u et soit A' le schéma en groupes quotient $A \times H / \text{Im}(i)$. Alors A' est plat sur R de fibre générique isomorphe à A_K mais n'est pas lisse sur R .

Soient Y et B comme dans 4.3.2. Utilisant l'immersion

$$i_Y: (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_Y \hookrightarrow (A \times H)_Y \subset A_Y \times_Y B$$

et passant au quotient par $\text{Im}(i_Y)$, on trouve un schéma abélien C sur Y qui contient comme sous-schéma en groupes A'_Y . De plus, comme B n'a pas de partie fixe, la partie fixe de C est aussi celle de A'_Y , c'est-à-dire A .

Finalement soient X le Y -schéma abélien dual de C et $f: Y \rightarrow R$ le morphisme canonique.

On a une suite exacte de R -schémas en groupes :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \underline{\text{Pic}}_{Y/R} \rightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/R} \rightarrow f_*(\underline{\text{Pic}}_{X/Y}) \rightarrow 0$$

où le dernier terme est le foncteur :

$$T \in \text{Sch}/R \rightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/Y}(Y \times_R T) = \text{Pic}(X_T) / \text{Pic}(Y_T)$$

(noter que $X \rightarrow Y$ a une section).

On a $\text{Pic}_{X/Y}^\tau = C$, de sorte qu'on déduit de (1) une suite exacte de schémas en groupes

$$(2) \quad 0 \rightarrow J \rightarrow \text{Pic}_{X/R}^\tau \rightarrow \underline{f}_*(C)^\tau \rightarrow 0$$

où J est la jacobienne de Y/R .

Comme A'_Y est un sous-schéma en groupes de C , on a un morphisme canonique $v: A' \rightarrow \underline{f}_*(C)$. Du fait que C et A'_Y ont même partie fixe, v_K est un isomorphisme sur les composantes neutres. Enfin, soit D' le R -schéma en groupes extension de A' par J déduit de (2) par v . Alors D' est propre et plat, non lisse, à fibre générique connexe et l'on a un morphisme $w: D' \rightarrow \text{Pic}_{X/R}$, qui induit un isomorphisme sur les composantes neutres des fibres génériques. Comme D' majore l'adhérence schématique D'' de $\text{Pic}_{X_K}^O$ dans $\text{Pic}_{X/R}$, D'' ne peut pas être lisse.

4.4 Application à l'image directe d'un groupe formel.

Soient $f: X \rightarrow R$ un morphisme de schémas propre et plat et G un groupe formel lisse sur X . L'image directe $f_*(G)$ de G est le foncteur en groupes sur $\text{Nil}(R): A \mapsto G(X \times_R A)$. L'image directe est la "partie fixe" du groupe formel (variable) G . Cette notion est à rapprocher de celle de "trace" introduite dans ([8] chap. VIII). En général le noyau du morphisme d'adjonction $f^*(f_*(G)) \rightarrow G$ n'est pas nul (ce qui introduit certaines isogénies radicielles dans le cas des traces de variétés abéliennes). Nous allons montrer que ces phénomènes ne se produisent pas lorsque G est p -divisible et $e \nmid p-1$.

Définition 4.4.1. Un groupe formel G lisse sur un R -schéma X est p -divisible si pour tout $x \in X$, la fibre de G sur le corps résiduel $k(x)$ est un groupe formel p -divisible au sens habituel.

En fait, il suffit de vérifier la condition ci-dessus aux points fermés de X et elle est vide si $k(x)$ est de caractéristique 0. Un groupe p -divisible classique, défini comme limite inductive de X -schémas en groupes finis G_n , donne un groupe formel au sens ci-dessus. On prendra garde que la réciproque n'est pas vraie (sauf si X est le spectre d'un anneau local complet). Par exemple, le complété le long de la section unité d'un schéma en groupes lisses, dont les fibres sont de rang unipotent nul est un groupe p -divisible au sens de 4.4.1, mais ne donne pas de groupe p -divisible au sens de Tate si la partie de type multiplicatif des fibres n'est pas de dimension constante.

Théorème 4.4.2. Soient $f : X \rightarrow R$ un morphisme propre et plat et G un X -groupe formel lisse.

1) La restriction G' de $f_*(G)$ aux R -algèbres nilpotentes de longueur finie est représentable par un R -groupe formel de présentation finie, noyau d'un morphisme de R -groupes formels lisses.

Supposons maintenant que G est p -divisible (4.4.1) et que les fibres de f sont géométriquement réduites.

2) Le groupe formel G' est équidimensionnel et le noyau de l'élévation à la puissance p dans G' est un groupe formel fini.

3) Supposons de plus $e \nless p-1$, alors G' est plat sur R .

4) Enfin, si $e \nless p-1$ et si f est lisse à fibres géométriquement connexes, le morphisme d'adjonction $u : f^*(G') \rightarrow G$ est une immersion.

Démonstration : L'assertion 1) est un cas particulier de 2.7.3. Prouvons 2).

Notons ${}_pH$ le noyau de l'élévation à la puissance p dans un groupe formel H . Comme R est complet, pour voir que ${}_pG'$ est

fini, il suffit de montrer que sa fibre spéciale ${}_p\bar{G}'$ est finie. Or ${}_p\bar{G}' = \bar{f}_*({}_p\bar{G})$, ce qui nous ramène à un problème sur $\bar{X}$. Soient $X' = \bar{X} \times_{\text{Spec}(k[[T]])}$ et I l'idéal maximal de $k[[T]]$. Pour voir que ${}_p\bar{G}'$ est fini, il suffit de montrer que ${}_p\bar{G}'(I)$ est fini, c'est-à-dire que ${}_pG(\bar{X} \times_k I)$ est fini. Mais cela résulte facilement de l'hypothèse faite sur les fibres de G et du fait que le complété formel $\hat{X}'$ de X' le long de sa fibre fermée est réduit.

Ceci étant, G' est équidimensionnel comme il résulte, plus généralement du lemme suivant (qui se démontre par exemple à l'aide du foncteur de Greenberg) :

Lemme 4.4.3. Soit $u : G^O \rightarrow G^1$ un morphisme de R -groupes formels lisses. Supposons ${}_p\text{Ker}(u)$ fini, alors $\text{Ker}(u)$ est équidimensionnel.

Compte tenu de 1) et 2), l'assertion 3) résulte de 3.3.1.

Prouvons 4). Soit $N = \text{Ker } f^*(G') \rightarrow G$. Pour voir que $N = 0$, il suffit de montrer que ${}_pN = 0$ et finalement il suffit de montrer que ${}_p u : f^*({}_pG') \rightarrow {}_pG$ est un monomorphisme.

Par passage à la limite projective, étendons les valeurs de G' aux R -algèbres finies. Alors ${}_pG'$ devient représentable par un R -schéma en groupes fini et plat. Soit R' une R -algèbre finie qui est un anneau de valuation discrète de corps des fractions K' , telle que ${}_pG' \times_R K'$ soit un groupe constant. On a des isomorphismes naturels $({}_pG')(K') \cong ({}_pG')(R') = {}_pG(X \times_R R')$. L'image réciproque de $f^*({}_pG')$ sur $X_{K'}$ est donc le groupe constant associé à ${}_pG(X \times_R R')$. Or si $\sigma \in {}_pG(X \times_R R')$, l'ensemble des points de $X_{K'}$ où σ est nulle est à la fois ouvert et fermé. Comme $X_{K'}$ est connexe, on en déduit que ${}_pN$ est nul sur $X_{K'}$, donc sur X_K . Finalement pour voir que ${}_pN = 0$, il suffit de montrer que ${}_pN$ est nul en tout point fermé x

de $\bar{X}$. Comme X est supposé lisse sur R , il passe par x une section s . Par restriction de p^u à s , on obtient un morphisme $p^*G' \rightarrow s^*(G)$, de noyau $s^*(N)$. On vient de voir que $s^*(N)$ a une fibre générique nulle, donc $s^*(N)$ est nul (3.3.6).

Signalons aussi la variante "schéma en groupes" de 4.4.2 4) :

Théorème 4.4.4. Soient $f: X \rightarrow R$ un morphisme propre et lisse, à fibres géométriques connexes et soit G un X -schéma en groupes lisse, séparé, à fibres de rang unipotent nul. Alors $G' = f_*(G)$ est représentable par un R -schéma en groupes séparé, équidimensionnel, à fibres de rang unipotent nul. Si $e \leq p-1$ (resp. $e \leq p-1$), G'^T est plat sur R (resp. G'^T est plat le long de la section unité) et le morphisme d'adjonction $f^*(G'^T) \rightarrow G$ est une immersion.

4.5 Application au "vanishing" de Kodaira.

Soit L un faisceau inversible ample sur une variété propre et lisse X de dimension ≥ 2 , définie sur un corps c . Si c est de caractéristique 0, il résulte du théorème de Kodaira que l'on a $H^1(X, L^{-1}) = 0$. Si c est de caractéristique $p > 0$, on peut avoir $H^1(X, L^{-1}) \neq 0$ (cf. l'exposé de Szpiro, ce volume). Toutefois, si X et L se relèvent sur un anneau de valuation discrète R , pas trop ramifié ($e \leq p-1$), nous allons montrer que l'on a encore $H^1(X, L^{-1}) = 0$.

Théorème 4.5.1. Soit X un R -schéma propre et lisse, de dimension relative ≥ 2 et soit L un faisceau inversible sur X , R -ample. Alors, si $e \leq p-1$, on a $H^1(\bar{X}, \bar{L}^{-1}) = 0$.

i) Réduction au cas où L possède une section lisse sur R . Pour $n \gg 0$, $H^1(\bar{X}, \bar{L}^n) = 0$ et $H^0(X, L^n)$ commute au passage aux fibres. On peut donc trouver $n > 0$, $(n, p) = 1$, et une section $s \in H^0(X, L^n)$ telle que $V(s)$ soit une section hyperplane Σ de X , lisse sur R .

Considérons la $\mathcal{O}_X$ -algèbre $\sum_{i=0}^{n-1} L^{-i}$, munie de la multiplication définie par s . Il lui correspond un revêtement $u: X' \rightarrow X$, de degré n , ramifié le long de Σ . De plus, X' est lisse sur R et $L' = u^*(L)$ possède une section s' , avec $V(s') \simeq \Sigma$. Comme $\bar{L}^{-1}$ est facteur direct dans $\bar{u}_*(\bar{L}'^{-1})$, il suffit d'établir que $H^1(\bar{X}', \bar{L}'^{-1}) = 0$, d'où la première réduction.

ii) Soit donc $L = \mathcal{O}_X(\Sigma)$, où Σ est une section hyperplane de X lisse sur R . De la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(-\bar{\Sigma}) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{\Sigma}} \rightarrow 0$$

on déduit que $H^1(\bar{X}, \bar{L}^{-1}) \simeq \text{Ker}\{H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) \rightarrow H^1(\bar{\Sigma}, \mathcal{O}_{\bar{\Sigma}})\}$ s'identifie à l'algèbre de Lie de $\text{Ker}\{\underline{\text{Pic}}_{\bar{X}} \rightarrow \underline{\text{Pic}}_{\bar{\Sigma}}\}$. Il nous suffit donc de montrer que $N = \text{Ker } \underline{\text{Pic}}_X \rightarrow \underline{\text{Pic}}_{\Sigma}$ est net sur R , ou encore que $\hat{N} = \text{Ker } \widehat{\underline{\text{Pic}}}_X \rightarrow \text{Ker } \widehat{\underline{\text{Pic}}}_{\Sigma}$ est nul.

Or X étant lisse, $\underline{\text{Pic}}^0(\bar{X})_{\text{red}}$ est une variété abélienne. Par ailleurs, d'après le théorème de Lefschetz, $\bar{N}$ ne contient pas de points d'ordre ℓ premier à p . Il en résulte que $\bar{N}$ est de dimension 0, donc N est équidimensionnel. D'après 4.1.3 $\widehat{\underline{\text{Pic}}}_X$ et $\widehat{\underline{\text{Pic}}}_{\Sigma}$ sont plats sur R et se plongent dans des groupes formels lisses. Il résulte alors de 3.3.1 que $\hat{N}$ est plat, donc fini et plat. Enfin, il résulte encore de Lefschetz, appliqué cette fois à la fibre générique géométrique, qui est en caractéristique 0, et avec $\ell = p$, que $N_K = 0$ donc $\hat{N} = 0$.

Remarque 4.5.2. Avec un peu plus de fatigue, on peut montrer que le théorème 4.5.1 reste encore vrai si, au lieu de supposer L ample, on suppose seulement L numériquement positif.

Bibliographie

- [1] M. ARTIN and B. MAZUR.- Formal groups arising from algebraic varieties. Annales Sc. ENS, t. 10, p. 87-132 (1977).
- [2] P. CARTIER.- Modules associés à un groupe formel commutatif. C. R. Acad. Sc., t. 265, p. 129-132 (1967).
- [3] J.-M. FONTAINE.- Groupes p -divisibles sur les corps locaux. Astérisque n° 47-48 (1977).
- [4] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE'.- Eléments de Géométrie Algébrique (cité EGA). Pub. IHES n° 4, 8, etc... .
- [5] A. GROTHENDIECK.- Fondements de la Géométrie Algébrique. Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-62, Secrétariat mathématique IHP.
- [6] A. GROTHENDIECK.- Séminaire de Géométrie Algébrique de l'IHES (cité SGA). Lecture notes n°s 151-152-225, Springer Verlag.
- [7] L. GRUSON et M. RAYNAUD.- Critères de platitude et de projectivité. Invent. Math. 13, p. 1-89 (1971).
- [8] S. LANG.- Abelian varieties. Interscience Publishers.
- [9] M. LAZARD.- Commutative formal groups. Lecture Notes n° 443, Springer Verlag.
- [10] B. MAZUR.- Rational isogenies of prime degree. Invent. Math., vol. 44, fasc. 2 (1978).
- [11] D. MUMFORD.- Abelian Varieties. Oxford University Press (1970).
- [12] F. OORT and J. TATE.- Group schemes of prime order. Ann. Sc. ENS, t. 3, p. 1-21 (1970).
- [13] M. RAYNAUD.- Modèle de Néron. C. R. Acad. Sc., t. 262, p. 413-416 (1966).
- [14] M. RAYNAUD.- Spécialisation du foncteur de Picard. Pub. IHES n° 38 (1970).
- [15] M. RAYNAUD.- Schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$. Bul. S.M.F., t. 102, p. 241-280 (1974).

- [16] SCHLESSINGER.- Functors on Artin Rings. Transactions A.M.S.,
vol. 130 (1968).
- [17] J.-P. SERRE.- Sur la topologie des variétés algébriques en
caractéristique p . Symposium Internacional de Topologia
Algebraica, Mexico (1956).

Michel RAYNAUD
Université de Paris-Sud
Mathématique, bât. 425
91405 ORSAY (France)