PETER DRAXL

Corps gauches à involution de deuxième espèce

Astérisque, tome 61 (1979), p. 63-72
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__61__63_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 61 (1979) p. 63-72

CORPS GAUCHES À INVOLUTION DE DEUXIÈME ESPÈCE

par Peter DRAXL

§ 1. INTRODUCTION

Soit A une algèbre simple de rang fini sur son centre K à involution I de deuxième espèce (la référence principale dans cette situation est [1],Ch.X). Notons

$$S_I(A) := \{a \in A \mid a^I = a\} \quad \text{et} \quad k := K \cap S_I(A) \qquad (^1),$$

alors K/k est une extension quadratique séparable à groupe de Galois $\{1, I|_K\}$, et $S_I(A)$ est un espace vectoriel de dimension $n^2 = |A:K|$ sur k. On définit (J une autre involution du même type)

$$I \sim J \text{ , si et seulement si } I|_K = J|_K \quad ,$$

et l'on montre facilement que $I \sim J$ équivaut à l'existence d'un élément $t \in S_I(A)$ tel que l'on ait

$$a^J = ta^It^{-1} \quad (a \in A).$$

Notons maintenant

$\Sigma_I(A)$:= sous-groupe du groupe multiplicatif A^* engendré par $S_I(A)$,

alors un calcul simple donne

$$\Sigma_I(A) = \Sigma_J(A) \text{ , si } I \sim J \quad .$$

(1) La notation := utilisée ici signifie "égale par définition".

En outre on note $\mathrm{Nrd}_{A/K}$ la norme réduite, et l'on démontre (voir p. ex. [7], Prop. 1 pour la première inclusion et [3], (3.3), p. 27 pour la seconde)

$$[A^*,A^*] \subseteq \Sigma_I(A) \subseteq \mathrm{Nrd}_{A/K}^{-1}(k^*) ,$$

donc le groupe

$$\mathrm{USK}_1(A,\tilde{I}) := \mathrm{Nrd}_{A/K}^{-1}(k^*)/\Sigma_I(A)$$

ne dépend que de la classe $\tilde{I}$ de l'involution I modulo la relation $\sim$, et il est appelé (voir [11])

<u>groupe réduit de Whitehead de</u> A <u>par rapport à</u> I .

C'est un analogue du groupe réduit de Whitehead de A

$$\mathrm{SK}_1(A) := \mathrm{Nrd}_{A/K}^{-1}(\{1\})/[A^*,A^*] ,$$

et les deux groupes sont liés par l'homomorphisme

$$\Omega:\ \mathrm{SK}_1(A) \longrightarrow \mathrm{USK}_1(A,\tilde{I}) \tag{1}$$

qui est induit par l'inclusion.

Quant aux groupes USK_1 les propriétés suivantes sont bien connues:

0° <u>En général on a</u> $\mathrm{USK}_1(A,\tilde{I}) \neq 1$ (voir [8], [5] et [6]) .

1° <u>Soit</u> l/k <u>une extension finie disjointe de</u> K/k, <u>et soit</u> $L := Kl$, <u>alors il existe des homomorphismes</u>

$$\mathrm{USK}_1(A,\tilde{I}) \underset{\pi_L}{\overset{\iota_L}{\rightleftarrows}} \mathrm{USK}_1(A \otimes_K L, \widetilde{I\otimes id})$$

<u>tels que l'on ait</u> $\pi_L \circ \iota_L = |L:K|\cdot id$ ([4], Lemma 4).

2° $\mathrm{USK}_1(A,\tilde{I})$ <u>est un groupe de torsion à exposant divisant l'indice</u> $i(A)$ <u>de</u> A (cela résulte de 1°) (2).

3° <u>Soit</u> K/k <u>une extension quadratique séparable, et soit</u> A

(2) $i(A) := \sqrt{|D:K|}$, où D est le corps gauche avec $A = M_r(D)$.

une algèbre simple de rang fini sur son centre K. Pour que A admette une involution I de deuxième espèce avec $K \cap S_I(A) = k$, il faut et il suffit que $\mathrm{cor}_{K/k}(A) = 0$ dans le groupe de Brauer de k (voir p. ex. [9],p.93).

Par conséquent, d'après 2^o et 3^o il n'est pas intéressant de parler de USK_1 sur un corps local (comme la corestriction est toujours injective là; voir p. ex. [10],Ch.XI,Prop.1 et Ch.XIII,Th.1).

4^o Soit $A = M_r(D)$ (D un corps gauche), alors il existe des involutions J de A et i de D telles que l'on ait $I \sim J$ et $(d_{\mu\nu})^J = (d^i_{\nu\mu})$. En outre le déterminant de Dieudonné induit un isomorphisme (voir [4],Lemma 3)

$$USK_1(A,\tilde{I}) \cong USK_1(D,\tilde{i}) \quad .$$

5^o Soit $A \cong A_1 \otimes_K A_2$ avec $\mathrm{pgcd}(i(A_1),i(A_2)) = 1$, alors il existe des involutions I_ν de A_ν telles que l'on ait $I \sim I_1 \otimes I_2$, et l'on a

$$USK_1(A,\tilde{I}) \cong USK_1(A_1,\tilde{I}_1) \times USK_1(A_2,\tilde{I}_2)$$

(c'est une conséquence de 1^o).

6^o Dans le cas "$i(A)$ impair" l'homomorphisme Ω dans (1) est surjectif (en fait, $\mathrm{Nrd}_{A/K}(a) = \mathrm{Nrd}_{A/K}(a)^I$ implique l'existence de $b \in \mathrm{Nrd}^{-1}_{A/K}(\{1\})$ avec $a = a^I b$, donc $a^2 = (aa^I)b$ avec $aa^I \in \Sigma_I(A)$; le reste est clair d'après 2^o).

Nous disons que k vérifie la

condition (∇) ,

lorsque les conditions suivantes sont verifiées:

quel que soit L/k extension finie séparable, quel que soit E corps gauche de rang fini sur son centre L, et si un groupe Γ des automorphismes de L sur k est, ou bien cyclique d'ordre premier impair, ou bien non-cyclique d'ordre 4 , et tel que $\mathrm{Nrd}_{E/L}(E^*)$ soit stable sous l'opération de Γ , alors

$$H^1(\Gamma, \mathrm{Nrd}_{E/L}(E^*)) = 0 .$$

Si un corps vérifie la condidion C_2^0 (voir p. ex. [4],p.373), alors il vérifie la condition (∇) d'après un théorème classique de Noether et Hilbert. En outre les corps globaux vérifient la condition (∇) d'après un théorème de M. Eichler en arithmétiques (voir [2],p.120,avant-dernière ligne).

Le but de cette conférence est de démontrer simultanément les deux résultats suivants:

THÉORÈME. Soit A une algèbre simple de rang fini sur son centre K à involution I de deuxième espèce, alors

(i) l'exposant de $USK_1(A,\tilde{I})$ divise $\frac{i(A)}{i(A)'}$, où on a noté $i(A)'$ le plus grand diviseur de $i(A)$ sans facteur carré;

(ii) $USK_1(A,\tilde{I}) = 1$, si k vérifie la condition (∇) .

Le résultat (i) est une amélioration de 2^o (voir aussi [6],2.8), tandis que le résultat (ii) est une généralisation simultanée d'un théorème de V. I. Jančevskiĭ ([4],Th.1) et d'un théorème de C.T.C. Wall ([12],Th.2). Comme on va prouver (i) et (ii) en même temps, et comme cette démonstration sera très courte (voir § 4.), je pense qu'il est intéressant de démontrer ici ce théorème bien que les résultats n'en soient pas complètement inattendus.

§ 2. SUR LE GROUPE DE KLEIN

Soit $\Gamma = \{1,\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2\}$ le groupe de Klein, c'est-à-dire $\sigma_0 = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ et $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$. Posons $\Gamma_i := \{1,\sigma_i\}$

($i = 0,1,2$), et soit M un Γ-module à droite. Si on note $\hat{H}^r(./.)$ ($r \in \mathbb{Z}$) les groupes de cohomologie au sens de Tate et $\mathfrak{N}: M \longrightarrow M^{\Gamma_0}$ (= sous-module des éléments invariants sous Γ_0) la norme, alors

PROPOSITION 1. <u>On a une suite exacte</u>

$$0 \longrightarrow M^{\Gamma_1} + M^{\Gamma_2} \longrightarrow \mathfrak{N}^{-1}(M^{\Gamma}) \xrightarrow{\alpha} \hat{H}^{-1}(\Gamma/\Gamma_1, M^{\Gamma_1}) \xrightarrow{\beta} \hat{H}^{-1}(\Gamma_2, M) \quad ,$$

<u>induit par</u> $\qquad m \longmapsto m^{(1-\sigma_2)} \qquad m \longmapsto m$.

En fait, à partir de l'identité

$$(2) \qquad (1+\sigma_0)(1-\sigma_1) = (1-\sigma_2)(1-\sigma_1) \quad \text{dans} \quad \mathbb{Z}[\Gamma]$$

on obtient - quel que soit $x \in \mathfrak{N}^{-1}(M^{\Gamma})$ -

$$0 = x^{(1+\sigma_0)(1-\sigma_1)} = x^{(1-\sigma_2)(1-\sigma_1)} ,$$

donc $x^{(1-\sigma_2)} \in M^{\Gamma_1}$ et $\mathfrak{N}_{\Gamma/\Gamma_1}(x^{(1-\sigma_2)}) := x^{(1-\sigma_2)(1+\sigma_2)} = 0$,

c'est-à-dire ceci permet de définir α comme ci-dessus, et l'on en tire immédiatement

$$\beta \circ \alpha = 0 .$$

Réciproquement, soit $\beta(\bar{y}) = \bar{0}$ (avec $y \in M^{\Gamma_1}$ tel que l'on ait $y^{(1+\sigma_2)} = \mathfrak{N}_{\Gamma/\Gamma_1}(y) = 0$), c'est-à-dire il existe $x \in M$ avec $y = x^{(1-\sigma_2)}$, donc - en utilisant (2) encore une fois -

$$0 = y^{(1-\sigma_1)} = x^{(1-\sigma_2)(1-\sigma_1)} = x^{(1+\sigma_0)(1-\sigma_1)} ,$$

ce qui veut dire

$$\bar{y} = \alpha(x) \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}(x) \in M^{\Gamma} .$$

Finalement soit $\alpha(x) = \bar{0}$; il existe donc $y \in M^{\Gamma_1}$ tel que $x^{(1-\sigma_2)} = y^{(1-\sigma_2)}$, par conséquent $x = y + z$ avec $z \in M^{\Gamma_2}$.

Ceci implique

$$\operatorname{Ker} \alpha = M^{\Gamma_1} + M^{\Gamma_2} ,$$

c.q.f.d..

Maintenant on regarde le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 0 \arrow[dr] & & \hat{H}^{-1}(\Gamma/\Gamma_1, M^{\Gamma_1}) \arrow[drr, "\beta"] & & \\
 & & & H^1(\Gamma/\Gamma_1, M^{\Gamma_1}) \arrow[ur, equal, "\sim"] \arrow[dr, "\inf"] & & & \hat{H}^{-1}(\Gamma_2, M) \arrow[dl, equal, "\sim"] \\
0 \arrow[r] & H^1(\Gamma/\Gamma_2, M^{\Gamma_2}) \arrow[rrr, "\inf"] & & & H^1(\Gamma, M) \arrow[r, "\mathrm{res}"] & H^1(\Gamma_2, M) \ . &
\end{tikzcd}$$

Le pentagone est commutatif et les deux suites sont exactes (voir p. ex. [10],Ch.VII,§6.). En utilisant convenablement la Prop. 1 ci-dessus on en déduit:

PROPOSITION 2. $\mathfrak{N}^{-1}(M^{\Gamma})/(M^{\Gamma_1}+M^{\Gamma_2}) \cong \operatorname{Ker}\beta \cong$

$$\cong \inf\left(H^1(\Gamma/\Gamma_1, M^{\Gamma_1})\right) \cap \inf\left(H^1(\Gamma/\Gamma_2, M^{\Gamma_2})\right) \subseteq H^1(\Gamma, M) \ .$$

COROLLAIRE. $H^1(\Gamma,M) = 0$ <u>implique</u> $\mathfrak{N}^{-1}(M^{\Gamma}) = M^{\Gamma_1}+M^{\Gamma_2}$.

EXEMPLES.

(A) Soit L/k une extension galoisienne à groupe de Galois Γ ; soient $K_i := L^{\Gamma_i}$ ($i = 0,1,2$), et soit $N := N_{L/K_0}$. Alors, d'après un théorème classique de Noether et Hilbert, le corollaire donne

$$N^{-1}(k^*) = K_1^* \cdot K_2^* \ .$$

(B) Soit L/k comme ci-dessus, et soit E un corps gauche de rang fini sur son centre L tel que $\mathrm{Nrd}_{E/L}(E^*)$ soit stable sous l'opération de Γ . Alors, si k vérifie la condition (∇), on obtient

$$N^{-1}(k^*) \cap \mathrm{Nrd}_{E/L}(E^*) = (K_1^* \cap \mathrm{Nrd}_{E/L}(E^*)) \cdot (K_2^* \cap \mathrm{Nrd}_{E/L}(E^*)) \ .$$

En fait, l'exemple (B) donne la motivation pour la notion "condition (∇)".

§ 3. QUELQUES SUITES EXACTES

Supposons $A = D =$ corps gauche avec $i(A) = i(D) = 2^r$, et supposons en sus

(3) <u>l'existence d'une extension quadratique séparable</u> l/k <u>telle que</u> $l \subseteq S_I(D)$, <u>donc</u> $l \not\subseteq K$.

Posons

$$L := Kl \quad \text{et} \quad E := Z_D(L) = \text{commutant de } L \text{ dans } D ,$$

alors L est le centre du corps gauche E avec $i(E) = 2^{r-1}$, et L/k est une extension galoisienne à groupe de Galois Γ (= le groupe de Klein, voir § 2.). Soient $\Gamma_0 = \{1, \sigma_0\} := \mathrm{Gal}(L/K)$ et $\Gamma_1 = \{1, \sigma_1\} := \mathrm{Gal}(L/l)$, alors on obtient $K_0 = K$ et $K_1 = l$ (au sens de l'exemple (A) dans § 2.). D'autre part notre involution I induit sur E une involution $i := I|_E$ de deuxième espèce avec $L \cap S_i(E) = l = K_1$, c'est-à-dire $\sigma_1 = i|_L$. Enfin le théorème de Skolem et Noether permet de trouver un élément

$$g \in D^* \quad \text{tel que} \quad \lambda^{\sigma_0} = g\lambda g^{-1} \quad (\lambda \in L \subseteq E \subset D) .$$

Maintenant la définition $d^{I_0} := gd^I g-1$

nous donne sur D une involution I_0 de deuxième espèce avec $I_0 \sim I$, et - par restriction - sur E une involution $i_0 := I_0|_E$ de deuxième espèce avec

$$i_0 \not\sim i \quad \text{et} \quad l_0 := L \cap S_{i_0}(E) = K_2 \quad \text{(au sens de l'exemple (A) dans § 2.)} ,$$

c'est-à-dire $\sigma_2 = \sigma_1\sigma_0 = \sigma_0\sigma_1 = i_0|_L$.

On va utiliser les abréviations suivantes:

$$NRD := \mathrm{Nrd}_{D/K} , \quad \mathrm{Nrd} := \mathrm{Nrd}_{E/L} \quad \text{et} \quad N := N_{L/K} .$$

À partir des formules

$NRD|_E = N \circ \mathrm{Nrd}$ (voir [3],p.28) - donc $\mathrm{Nrd}(E^* \cap NRD^{-1}(k^*)) =$

$\mathrm{Nrd}(\mathrm{Nrd}^{-1}(l_0^*)) = l_0^* \cap \mathrm{Nrd}(E^*) \subseteq N^{-1}(k^*) \cap \mathrm{Nrd}(E^*) =$ - ,

$\Sigma_{i_0}(E) \subseteq \Sigma_{I_0}(D) = \Sigma_I(D)$ (c'est clair) , et

$\mathrm{Nrd}(E^*)^{(1-\sigma_0)} \subseteq \mathrm{Nrd}(E^* \cap [D^*,D^*]) \subseteq \mathrm{Nrd}(E^* \cap \Sigma_I(D))$ (voir [3], p.50) ,

on obtient par un calcul simple les cinq suites exactes ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \hat{H}^{-1}(\Gamma_0, \mathrm{Nrd}(E^*)1^*/1^*) \arrow[d, "\gamma"] & 1 \\
USK_1(E,\tilde{i}) \arrow[r, "\varphi"] & \dfrac{E^* \cap NRD^{-1}(k^*)}{E^* \cap \Sigma_I(D)} \arrow[rr, "\psi"] & & \dfrac{\mathrm{Nrd}(E^* \cap NRD^{-1}(k^*))1^*}{\mathrm{Nrd}(E^* \cap \Sigma_I(D))1^*} \arrow[r] \arrow[r, bend right] \arrow[ur] & 1 \\
 & \dfrac{(N^{-1}(k^*) \cap \mathrm{Nrd}(E^*))1^*}{\mathrm{Nrd}(\Sigma_{i_0}(E))1^*} \arrow[urr, "\delta"] \arrow[d, dashed, "\xi"] & & \dfrac{\mathrm{Nrd}(\mathrm{Nrd}^{-1}(1^*_0))1^*}{\mathrm{Nrd}(\Sigma_{i_0}(E))1^*} \arrow[ll, "\zeta"'] \arrow[ur] & 1 \arrow[l] \\
1 & \dfrac{N^{-1}(k^*) \cap \mathrm{Nrd}(E^*)}{(1^* \cap \mathrm{Nrd}(E^*))(1^*_0 \cap \mathrm{Nrd}(E^*))} \arrow[l] & & USK_1(E,\tilde{i}_0) \arrow[u, "\epsilon"] &
\end{tikzcd}$$

avec: γ induit par l'identité — δ induit par l'identité

φ induit par l'inclusion — ζ induit par l'inclusion

ψ induit par Nrd modulo 1* — ϵ induit par Nrd modulo 1*

ξ induit par l'application $\nu\lambda \mapsto \nu$ ($\lambda \in 1^*$ et $\nu \in N^{-1}(k^*) \cap \mathrm{Nrd}(E^*)$) .

Comme application on en tire:

(4) <u>l'exposant de</u> $\dfrac{E^* \cap NRD^{-1}(k^*)}{E^* \cap \Sigma_I(D)}$ <u>divise le double de l'exposant de</u> $USK_1(E,\tilde{i})$;

(5) $i(A) = i(D) = 2$ (<u>c'est-à-dire</u> $r = 1$ <u>et</u> $E = L$) <u>implique</u> $E^* \cap NRD^{-1}(k^*) = E^* \cap \Sigma_I(D)$ (voir 2^o et l'exemple (A), § 2.);

(6) $USK_1(E,\tilde{i}) = USK_1(E,\tilde{i}_0) = 1$ <u>implique</u> $E^* \cap NRD^{-1}(k^*) = E^* \cap \Sigma_I(D)$, <u>si</u> k <u>vérifie la condition</u> (∇) (voir l'exemple (B) dans § 2.).

§ 4. LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

D'après $4^o, 5^o$ et 6^o dans § 1. on peut se restreindre au cas

$$A = D = \text{corps gauche avec } i(A) = i(D) = 2^r$$

(voir p. ex. (6.10),(6.11) et (6.12) dans [3],p.52/53 , et lignes 12 à 14 sur p.121 dans [2]).

Maintenant, en utilisant convenablement 1^o et 2^o, un résultat classique montre que pour démontrer le théorème il suffit de supposer (3) (voir § 3.) et de démontrer

(7) <u>l'exposant de</u> $\dfrac{E^* \cap NRD^{-1}(k^*)}{E^* \cap \Sigma_I(D)}$ <u>divise</u> 2^{r-1} ,

et

(8) $E^* \cap NRD^{-1}(k^*) = E^* \cap \Sigma_I(D)$, <u>si</u> k <u>vérifie la condition</u> (∇) .

Mais pour r = 1 les deux assertions sont vraies d'après (5), et pour r > 1 on utilise une récurrence sur r , ce qui donne (7) resp. (8) en utilisant (4) resp. (6), c.q.f.d..

RÉFÉRENCES

[1] A.A. ALBERT - <u>Structure of Algebras</u> - AMS Coll. Publ. <u>24</u>, New York (1939).

[2] P. DRAXL - SK_1 <u>über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen</u> - J. reine u. angew. Math. <u>293/294</u>, 116-142 (1977).

[3] P. DRAXL, M. KNESER (éditeurs) - SK_1 <u>von Schiefkörpern</u> - Seminar Bielefeld-Göttingen, SS 1976 (distribué par Math. Inst. d. Univ. Göttingen, Bunsenstr. 3/5, D-3400 Göttingen).

[4] V.I. JANČEVSKIĬ - <u>Simple Algebras with Involution, and Unitary Groups</u> - Math. USSR Sbornik <u>22</u>, 372-385 (1974).

[5] V.I. JANČEVSKIĬ - <u>On Reduced Unitary K-Theory</u> - Soviet Math.

Dokl. 17, 1220-1223 (1976).

[6] V.I. JANČEVSKIĬ - K-théorie réduite unitaire et corps gauches sur un corps valué henselien à valuation discrète (en russe) - Izv. Akad. Nauk SSSR 42, 879-918 (1978).

[7] V.P. PLATONOV, V.I. JANČEVSKIĬ - The Structure of Unitary Groups and the Commutator Group of a Simple Algebra over Global Fields - Soviet Math. Dokl. 14, 132-136 (1973).

[8] V.P. PLATONOV, V.I. JANČEVSKIĬ - On the Kneser-Tits Conjecture for Unitary Groups - Soviet Math. Dokl. 16, 1456-1460 (1975).

[9] C. RIEHM - The Corestriction of Algebraic Structures - Inventiones math. 11, 73-98 (1970).

[10] J.-P. SERRE - Corps locaux - Paris (1962).

[11] J. TITS - Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples sur un corps - Séminaire Bourbaki 505 (1976/77).

[12] C.T.C. WALL - On the Commutator Subgroups of Certain Unitary Groups - J. of Algebra 27, 306-310 (1973).

Peter DRAXL

Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik

Postfach 8640

D-4800 Bielefeld