Astérisque

JOSEPH OESTERLÉ

Versions effectives du théorème de Chebotarev sous l'hypothèse de Riemann généralisée

Astérisque, tome 61 (1979), p. 165-167

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__61__165_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 61 (1979) p. 165-167

VERSIONS EFFECTIVES DU THÉORÈME DE CHEBOTAREV SOUS L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN GÉNÉRALISÉE.

par

Joseph OESTERLÉ

Dans [1], Lagarias et Odlyzko démontrent une version du théorème de Chebotarev avec terme d'erreur. Le but de cet article est d'expliciter les constantes numériques intervenant dans ce terme d'erreur, sous l'hypothèse de Riemann généralisée. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats; les démonstrations seront publiées ultérieurement.

Soit E/K une extension galoisienne finie de corps de nombres, de groupe de Galois G. Notons n_E et n_K (resp. d_E et d_K) les degrés absolus (resp. les discriminants absolus) de E et K. Soit χ le caractère d'une représentation complexe de dimension finie τ de G. Notons $n(\chi)$ l'entier $n_K\chi(1)$, $\delta(\chi)$ le nombre de fois qu'intervient dans τ la représentation unité de G , et $A(\chi)$ l'entier $d_K N_{K/\mathbf{Q}}(f(\chi))$ où $f(\chi)$ est le conducteur de χ .

Si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de E au-dessus d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de K , notons $D_{\mathfrak{P}}$ et $I_{\mathfrak{P}}$ ses groupes de décomposition et d'inertie, et $\sigma_{\mathfrak{P}} \in D_{\mathfrak{P}}/I_{\mathfrak{P}}$ l'élément de Frobenius associé à $\mathfrak{P}$. Si $m \in \mathbf{N}$, et si ε est une fonction centrale sur G , la valeur moyenne de ε sur $\sigma_{\mathfrak{P}}^m$ ne dépend que de $\mathfrak{p}$ et est notée $\varepsilon(\sigma_{\mathfrak{p}}^m)$. Soit $L(s,\chi)$ la série L d'Artin associée à χ . On a:

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum \chi(\sigma_{\mathfrak{p}}^{m}) N\mathfrak{p}^{-ms} \mathrm{Log}(N\mathfrak{p}) \ ,$$

où $\mathfrak{p}$ décrit les idéaux premiers de K et m les entiers $\geqslant 1$.

Si ε est une fonction centrale sur G , posons, pour $x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$:

$$\psi_{\varepsilon}(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqslant x, m \geqslant 1} \varepsilon(\sigma_{\mathfrak{p}}^{m}) \mathrm{Log}(N\mathfrak{p}) \ .$$

THÉORÈME 1.- Supposons que $L(s,\chi)$ vérifie A.C. (Conjecture d'Artin) et G.R.H. (Hypothèse de Riemann généralisée). Dans ce cas, on a:

$$\forall x \geqslant 1 \ , \quad \left|\psi_{\chi}(x) - \delta(\chi)x\right| \leqslant \sqrt{x}\left[\mathrm{Log}A(\chi)\left(\frac{\mathrm{Log}\ x}{\pi} + 2\right) + n(\chi)\left(\frac{\mathrm{Log}^2 x}{2\pi} + 2\right)\right] .$$

THÉORÈME 2.- Soit C une partie de G stable par conjugaison et ε sa fonction caractéristique. Supposons que la fonction ζ_E vérifie G.R.H. et notons $|C|$ et $|G|$ les cardinaux de C et G . On a:

$$\forall x \geqslant 1 \ , \quad \left|\psi_{\varepsilon}(x) - \frac{|C|}{|G|}x\right| \leqslant \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\left[\mathrm{Log}\ d_E \left(\frac{\mathrm{Log}\ x}{\pi} + 2\right) + n_E\left(\frac{\mathrm{Log}^2 x}{2\pi} + 2\right)\right] .$$

THÉORÈME 3.- Sous les hypothèses du théorème 2 , soit $\pi_C(x)$ le nombre d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de K, non ramifiés dans E , vérifiant $N\mathfrak{p} \leqslant x$, et tels que la classe de conjugaison des substitutions de Frobenius associées à $\mathfrak{p}$ soit contenue dans C . Pour tout $x \geqslant 2$, on a:

$$\left|\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\int_2^x \frac{dt}{\mathrm{Log}\ t}\right| \leqslant \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\left[\mathrm{Log}\ d_E\left(\frac{1}{\pi} + \frac{5{,}3}{\mathrm{Log}\ x}\right) + n_E\left(\frac{\mathrm{Log}\ x}{2\pi} + 2\right)\right].$$

THÉORÈME 4.- Sous les hypothèses du théorème 3 , on a $\pi_C(x) \geqslant 1$ si $x \geqslant 70\ \mathrm{Log}^2(d_E)$ et $E \neq \mathbb{Q}$.

Sous les hypothèses des théorèmes 1 , 2 , et 3 respectivement, il est possible de donner des formes simplifiées des termes d'erreur, à savoir:

$$\forall x \geq 5 \ , \quad \left| \psi_\chi(x) - \delta(\chi)x \right| \leq \sqrt{x}\, \mathrm{Log}\, x\, (\mathrm{Log}\, A(\chi) + 0{,}3\; n(\chi) \mathrm{Log}\, x) \ .$$

$$\forall x \geq 5 \ , \quad \left| \psi_\varepsilon(x) - \frac{|C|}{|G|}\, x \right| \leq \frac{|C|}{|G|} \sqrt{x}\, \mathrm{Log}\, x\, (\mathrm{Log}\, d_E + 0{,}3\; n_E \mathrm{Log}\, x) \ .$$

$$\forall x \geq 2 \ , \quad \left| \pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|} \int_2^x \frac{dt}{\mathrm{Log}\, t} \right| \leq \frac{|C|}{|G|} \sqrt{x}\, (2\mathrm{Log}\, d_E + n_E\, \mathrm{Log}\, x) \ .$$

RÉFÉRENCE.- [1] J.C. Lagarias et A.M. Odlyzko, Effective versions of the Chebotarev density theorem, Algebraic number fields, Durham Symposium, Academic Press, 1977 .

Centre de mathématiques de
l'Ecole Normale Supérieure,
E.R.A. n° 07589,
45, rue d'Ulm,
75230 PARIS CEDEX 05