

Astérisque

ROGER APÉRY

Irrationalité de ζ_2 et ζ_3

Astérisque, tome 61 (1979), p. 11-13

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__61__11_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

IRRATIONALITÉ DE ζ_2 ET ζ_3

par

Roger APÉRY

-:-:-:-

Notre méthode de démonstration de l'irrationalité d'un réel α défini par les sommes partielles σ_n d'une série de rationnels, comporte les étapes suivantes :

1. Remplacer la suite $\sigma_n = u_{0,n}$ par une suite de rationnels à deux indices $u_{k,n}$ avec $0 \leq k \leq n$ telle que pour chaque k la suite $u_{k,n}$ converge plus rapidement vers α que la suite $u_{k-1,n}$.

2. Poser $u_{k,n} = \frac{t_{k,n}}{\binom{n+k}{k}}$.

3. Majorer, en fonction de n exclusivement, le dénominateur de $t_{k,n}$ c'est-à-dire montrer qu'il existe une suite d'entiers p_n tels que $p_n t_{k,n}$ soit entier et que $p_n \leq \mu^{n+\epsilon}$.

4. Effectuer une même combinaison linéaire (dépendant de n) à coefficients entiers positifs sur la colonne n du tableau des $t_{k,n}$ et du tableau des $\binom{n+k}{h}$.

5. On obtient ainsi une suite $\frac{v_n}{u_n}$ de fractions de numérateur rationnel et de dénominateur entier. On détermine la limite commune λ de $\sqrt[n]{v_n}$ et de $\sqrt[n]{u_n}$.

6. Si on a de la chance, $\lambda > \mu$: on peut conclure l'irrationalité. On peut aussi déduire une mesure d'irrationalité : quels que soient les entiers p, q ,

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > \frac{1}{q^{\gamma+\epsilon}}$$

avec
$$\gamma = \frac{2 \log \lambda}{\log \lambda - \log \mu}$$

Pour la construction des $u_{n,k}$, nous utilisons le développement suivant :
 étant donnée une suite de réels a_1, a_2, \dots, a_k , toute fonction analytique $f(x)$ par rapport à la variable $\frac{1}{x}$ qui tend vers 0 avec $\frac{1}{x}$ admet un développement (unique) de la forme

$$f(x) \equiv \sum_{k \geq 1} \frac{C_k}{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)}$$

(Nous écrivons \equiv au lieu de $=$ pour tenir compte des répugnances des mathématiciens qui considèrent avec Abel, Cauchy et d'Alembert les séries divergentes comme une invention du diable ; en fait, nous n'utilisons jamais qu'une somme finie de termes, mais le nombre de termes croît avec x).

Pour étudier ζ_2 , nous posons :

$$\frac{1}{n^2} \equiv \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{(-1)^{k-1} k!}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)} + \dots$$

$t_{k,n}$ appartient au module

$$\mathbb{Z}(1, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n})$$

D'après un résultat classique sur le p.p.c.m. des n premiers entiers, μ est égal à e^2 .

La suite u_n s'écrit $(1, 3, 19, 147, 1251, 11253, \dots)$

La suite v_n s'écrit $(0, 5, \frac{125}{4}, \dots)$

Elles vérifient la récurrence

$$(n+1)^2 u_{n+1} - (11n^2 + 11n + 3)u_n - (n-1)^2 u_{n-1} = 0$$

$$\lambda = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$$

L'irrationalité de $\zeta_2 = \frac{\pi^2}{6}$ est connue depuis Euler, mais notre méthode donne une mesure d'irrationalité de π^2 .

Pour étudier ζ_3 , nous posons :

$$\frac{1}{n^3} \equiv \frac{1}{n(n^2-1)} - \frac{1}{n(n^2-1)(n^2-4)} + \dots + \frac{(-1)^k (k!)^2}{n(n^2-1)\dots(n^2-(k+1)^2)} + \dots$$

L'utilisation de la diagonale $u_{n,n}$ donne la série

$$\zeta_3 = \frac{5}{2} \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}$$

qui à défaut de prouver immédiatement l'irrationalité de ζ_3 converge mieux que $\sum \frac{1}{n^3}$.

$2.t_{k,n}$ appartient au module

$$\mathbb{Z}(1, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{n^3}, \dots)$$

μ est égal à e^3 .

La suite u_n s'écrit (1, 5, 73, 1445, 33001, ...)

La suite v_n s'écrit (0, 6, $\frac{351}{4}$, $\frac{62531}{36}$, ...)

Les deux suites vérifient la relation de récurrence

$$(n+1)^3 u_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)u_n + n^3 u_{n-1} = 0$$

$$\lambda = 17 + 12\sqrt{2}$$

Roger APERY
 Département de Mathématiques
 Esplanade de la Paix
 14032 CAEN CEDEX