

# *Astérisque*

ROGER APÉRY

## **Irrationalité de $\zeta_2$ et $\zeta_3$**

*Astérisque*, tome 61 (1979), p. 11-13

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1979\\_\\_61\\_\\_11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__61__11_0)>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

IRRATIONALITÉ DE  $\zeta_2$  ET  $\zeta_3$

par

Roger APÉRY

-:-:-:-

Notre méthode de démonstration de l'irrationalité d'un réel  $\alpha$  défini par les sommes partielles  $\sigma_n$  d'une série de rationnels, comporte les étapes suivantes :

1. Remplacer la suite  $\sigma_n = u_{0,n}$  par une suite de rationnels à deux indices  $u_{k,n}$  avec  $0 \leq k \leq n$  telle que pour chaque  $k$  la suite  $u_{k,n}$  converge plus rapidement vers  $\alpha$  que la suite  $u_{k-1,n}$ .

2. Poser  $u_{k,n} = \frac{t_{k,n}}{\binom{n+k}{k}}$ .

3. Majorer, en fonction de  $n$  exclusivement, le dénominateur de  $t_{k,n}$  c'est-à-dire montrer qu'il existe une suite d'entiers  $p_n$  tels que  $p_n t_{k,n}$  soit entier et que  $p_n \leq \mu^{n+\epsilon}$ .

4. Effectuer une même combinaison linéaire (dépendant de  $n$ ) à coefficients entiers positifs sur la colonne  $n$  du tableau des  $t_{k,n}$  et du tableau des  $\binom{n+k}{h}$ .

5. On obtient ainsi une suite  $\frac{v_n}{u_n}$  de fractions de numérateur rationnel et de dénominateur entier. On détermine la limite commune  $\lambda$  de  $\frac{n}{\sqrt[n]{v_n}}$  et de  $\frac{n}{\sqrt[n]{u_n}}$ .

6. Si on a de la chance,  $\lambda > \mu$  : on peut conclure l'irrationalité. On peut aussi déduire une mesure d'irrationalité : quels que soient les entiers  $p, q$ ,

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > \frac{1}{q^{\gamma+\epsilon}}$$

avec 
$$\gamma = \frac{2 \log \lambda}{\log \lambda - \log \mu}$$

Pour la construction des  $u_{n,k}$ , nous utilisons le développement suivant :  
 étant donnée une suite de réels  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , toute fonction analytique  $f(x)$  par rapport à la variable  $\frac{1}{x}$  qui tend vers 0 avec  $\frac{1}{x}$  admet un développement (unique) de la forme

$$f(x) \equiv \sum_{k \geq 1} \frac{C_k}{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)}$$

(Nous écrivons  $\equiv$  au lieu de  $=$  pour tenir compte des répugnances des mathématiciens qui considèrent avec Abel, Cauchy et d'Alembert les séries divergentes comme une invention du diable ; en fait, nous n'utilisons jamais qu'une somme finie de termes, mais le nombre de termes croît avec  $x$ ).

Pour étudier  $\zeta_2$ , nous posons :

$$\frac{1}{n^2} \equiv \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{(-1)^{k-1} k!}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)} + \dots$$

$t_{k,n}$  appartient au module

$$\mathbb{Z}(1, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n^2})$$

D'après un résultat classique sur le p.p.c.m. des  $n$  premiers entiers,  $\mu$  est égal à  $e^2$ .

La suite  $u_n$  s'écrit  $(1, 3, 19, 147, 1251, 11253, \dots)$

La suite  $v_n$  s'écrit  $(0, 5, \frac{125}{4}, \dots)$

Elles vérifient la récurrence

$$(n+1)^2 u_{n+1} - (11n^2 + 11n + 3)u_n - (n-1)^2 u_{n-1} = 0$$

$$\lambda = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$$

L'irrationalité de  $\zeta_2 = \frac{\pi^2}{6}$  est connue depuis Euler, mais notre méthode donne une mesure d'irrationalité de  $\pi^2$ .

Pour étudier  $\zeta_3$ , nous posons :

$$\frac{1}{n^3} \equiv \frac{1}{n(n^2-1)} - \frac{1}{n(n^2-1)(n^2-4)} + \dots + \frac{(-1)^k (k!)^2}{n(n^2-1)\dots(n^2-(k+1)^2)} + \dots$$

# IRRATIONALITÉ DE $\zeta_3$

L'utilisation de la diagonale  $u_{n,n}$  donne la série

$$\zeta_3 = \frac{5}{2} \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}$$

qui à défaut de prouver immédiatement l'irrationalité de  $\zeta_3$  converge mieux que  $\sum \frac{1}{n^3}$ .

$2.t_{k,n}$  appartient au module

$$\mathbb{Z}(1, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{n^3}, \dots)$$

$\mu$  est égal à  $e^3$ .

La suite  $u_n$  s'écrit  $(1, 5, 73, 1445, 33001, \dots)$

La suite  $v_n$  s'écrit  $(0, 6, \frac{351}{4}, \frac{62531}{36}, \dots)$

Les deux suites vérifient la relation de récurrence

$$(n+1)^3 u_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)u_n + n^3 u_{n-1} = 0$$

$$\lambda = 17 + 12\sqrt{2}$$

Roger APERY  
Département de Mathématiques  
Esplanade de la Paix  
14032 CAEN CEDEX