

Astérisque

F. DUMORTIER

R. ROUSSARIE

Étude locale des champs de vecteurs à paramètres

Astérisque, tome 59-60 (1978), p. 7-42

http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__59-60__7_0

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE LOCALE DES CHAMPS DE VECTEURS À PARAMÈTRES

par

F. DUMORTIER* et R. ROUSSARIE*

Introduction :

Cet article contient quelques résultats, obtenus pour la plus grande partie pendant ces dernières années, dans le domaine des singularités de champs de vecteurs. Nous supposons nos champs de vecteurs C^r avec $r \geq 1$, $r = \infty$ ou même $r = \omega$ (analytique sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une singularité est un triple $(X, \mathbb{R}^n, p)$ tel que le champ X , défini sur $\mathbb{R}^n$, s'annule au point $p \in \mathbb{R}^n$.

Tâchons de décrire d'où vient cet intérêt renouvelé pour une étude des singularités de champs de vecteurs. On peut dire renouvelé, puisque pendant la deuxième partie du siècle passé et surtout au début de ce siècle il y avait un grand intérêt dans ce domaine surtout de la part de mathématiciens français comme Briot, Bouquet, Poincaré, Dulac et beaucoup d'autres.

Le nouvel élan s'est manifesté après la théorie de Thom-Mather sur les déploiements universels de singularités de fonctions. Cette théorie fournit des modèles de bifurcation se manifestant pour des systèmes dynamiques soumis à des dynamiques gradient dépendant d'un nombre fini de paramètres. De là, surgit naturellement le problème de la classification des changements qui se manifestent d'une façon stable lorsque l'on étudie non seulement des points d'équilibre de systèmes gradients mais aussi le changement des régimes attracteurs dans des systèmes dynamiques généraux. Le contexte de cette étude est le suivant : étant donné un certain $p \in \mathbb{N}$ et deux variétés K^p et M^n de classe C^∞ , nous dénotons par $X^r(K^p \times M^n)$ l'ensemble des familles de classe C^r de champs de vecteurs sur M^n à paramètres dans K^p , muni de la topologie C^r de Whitney ($1 \leq r \leq \infty$).

Le problème consiste à décrire d'une manière qualitative quelques parties de $X^r(K^p \times M^n)$ dont les éléments sont intéressants ou bien à cause de leur stabilité pour la méthode de description ou bien à cause d'une certaine généricité dans $X^r(K^p \times M^n)$ ou dans un sous-ensemble bien défini, comme par exemple les familles de champs hamiltoniens, etc. La précision de la description qualitative peut être adaptée de cas en cas selon les besoins et surtout selon les possibilités techniques, mais doit préserver d'une certaine manière la notion de régime attracteur stable.

Il va de soi qu'un tel programme envisagé globalement pour les champs définis sur une variété M est un peu téméraire et rencontre des difficultés de toute sorte liées en particulier à la topologie de la variété. De là, s'impose une simplification de la problématique qui consiste :

- 1° à regarder les types de singularités qu'on rencontre dans des familles génériques à p paramètres, ce qu'on appelle les singularités de codimension finie.
- 2° à regarder ce qui peut se passer dans le voisinage d'une telle singularité dans une famille générique, en d'autres termes à donner le déploiement versel d'une singularité de codimension finie.

Dans le premier chapitre nous traitons essentiellement le premier problème tandis que le second chapitre est consacré à la seconde question.

On peut faire une étude des singularités de difféomorphismes (ici singularité signifie point fixe) analogue à celle des singularités de champs de vecteurs. C'est d'ailleurs à une telle étude que se ramène la recherche du comportement topologique d'un champ de vecteurs dans le voisinage d'une orbite fermée à l'aide de l'application retour appelée encore application de Poincaré.

Chapitre I : Singularités de champs de vecteurs

§1 Définitions d'équivalence et de stabilité relative.

Définition 1.1 : Les champs de vecteurs X et Y de classe C^k , $k \geq 1$, définis respectivement sur les variétés $C^\infty M$ et N sont dits "équivalents en classe C^r (ou C^r -équivalents)" s'il existe un difféomorphisme de classe C^r ($r \geq 0$), $h : M \rightarrow N$ appliquant les orbites de X sur les orbites de Y en préservant le sens des orbites :

$\forall x \in M$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ tel que $X_u(x)$ soit défini pour $u \in [0, t]$, $\exists t' \in \mathbb{R}$ avec $t, t' > 0$ tel que :

$$h(\Phi_X(x, [0, t])) = \Phi_Y(h(x), [0, t'])$$

Ici, $X_t(x)$ aussi bien que $\Phi_X(x, t)$ sont des notations pour le flot associé à X au temps t , opérant sur $x \in M$.

Définition 1.2 : X et Y sont dits "conjugés en classe C^r (ou C^r -conjugés)" s'ils sont équivalents en classe C^r et qu'en plus le difféomorphisme h préserve le paramètre t :

$$\forall x \in M, \text{ et } \forall t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \Phi_X(x, [0, t]) \subset M \Rightarrow h(\Phi_X(x, t)) = \Phi_Y(h(x), t)$$

Il va de soi qu'on peut localiser ces définitions de la manière suivante :

X défini sur M dans un voisinage de p et Y défini sur N dans un voisinage

de q sont localement C^r -équivalents, resp. C^r -conjugués s'il existe des voisinages U de p en M et V de q en N tels que $X|U$ et $Y|V$ soient C^r -équivalents resp. C^r -conjugués. Dans ces définitions $r = 0, 1, \dots, \infty, \omega$ et même $\mathbb{C}$ -holomorphe. Cependant, la notion qu'on utilisera le plus est celle d'équivalence en classe C^0 .

Dans certains cas, la notion d'équivalence en classe C^0 locale est encore trop restrictive pour aboutir à des résultats utilisant les méthodes connues actuellement et nous affaiblirons encore cette notion, toutefois, sans perdre de vue les notions asymptotiques importantes. Ceci deviendra de plus en plus nécessaire au fur et à mesure que le texte progressera.

Le problème étant local, nous travaillerons sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) et la plupart du temps avec des germes de champs de vecteurs ou bien des familles de germes. Dans le dernier chapitre nous utiliserons par contre des germes de familles.

On appelle germe singulier ou tout simplement "singularité" (d'un champ de vecteurs X) le germe de X en p tel que $X(p) = 0$. Nous dénotons par $\mathcal{G}^n$ l'espace des germes singuliers de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ en 0 et par $\mathcal{V}_k^n$ l'espace vectoriel des jets d'ordre k de ces germes. Nous munissons $\mathcal{V}_k^n$ de la topologie euclidienne et $\mathcal{G}^n$ de la topologie initiale des applications $j_k: \mathcal{G}^n \rightarrow \mathcal{V}_k^n, X \rightarrow j_k(X)(0)$.

Sur $\mathcal{G}_\infty^n$ nous considérons la topologie initiale pour les projections $\pi_k: \mathcal{G}_\infty^n \rightarrow \mathcal{V}_k^n$.

Définition 1.3 Etant donné $A \subset \mathcal{G}^m$ et $X \in A$, X est appelé "stable pour l'équivalence (resp. conjugaison) en classe C^r relativement à A " (A - C^r -stable) s'il existe un voisinage U de X en $\mathcal{G}^m$ tel que $\forall Y \in U \cap A$, Y soit équivalent (resp. conjugué) à X en classe C^r .

Il est clair que sauf en dimension 1, seules ont un intérêt les relations de C^0 -équivalence ou C^0 -conjugaison lorsque l'on considère pour A l'ensemble $\mathcal{G}^m$ tout entier. Il est cependant intéressant d'avoir une définition de la stabilité relativement à A lorsque l'on veut étudier des champs soumis à certaines contraintes (par exemple invariance par rapport à un groupe de symétries, existence d'une intégrale première ou bien si l'on s'intéresse à la stabilité dans un ensemble de champs de vecteurs non stables, etc...)

On peut donner les mêmes définitions pour les difféomorphismes dans le voisinage d'un point fixe. On notera par $\mathcal{D}^m$ l'espace des germes de difféomorphismes de $\mathbb{R}^m$ en 0 à point fixe en 0 et par $\mathcal{D}_k^m$ l'espace de leurs jets d'ordre k .

§ 2 Théorème de Hartman-Grobman

Une première question se pose : quels sont les germes de champs de vecteurs stables en classe C^0 . Il est bien connu que les germes non nuls sont stables (même pour conjugaison C^∞). Pour les germes singuliers la réponse est donnée par le théorème de Hartman-Grobman [14,15], disant qu'une singularité de champ de vec-

teurs est stable en classe C^0 si et seulement si $j_1(X)(0)$ est hyperbolique. Hyperbolique signifie ici que les valeurs propres du champ linéaire représentant $j_1(X)(0)$ ont toutes une partie réelle différente de 0.

Le même théorème reste valable pour les points fixes de difféomorphismes où l'hyperbolicité veut dire que les modules des valeurs propres de la partie linéaire $j_1(f)(0)$ sont toutes différentes de 1.

Pour ce théorème, nous connaissons essentiellement deux types de démonstration, le premier de nature analytique, le second de nature géométrique. Dans la méthode analytique, on tâche d'obtenir l'homéomorphisme h conjuguant X et Y comme le seul point fixe d'une contraction de Lipschitz dans un espace métrique complet de fonctions bornées [22]. La méthode géométrique est basée sur le λ -lemma de J. Palis [20] et fait appel à certaines fibrations invariantes. Nous y reviendrons dans quelques instants.

Du théorème de Hartman-Grobman et d'une étude rapide des champs linéaires hyperboliques il s'ensuit que des singularités hyperboliques sont à C^0 conjugaison près cataloguées par leur index. L'index est le nombre de valeurs propres de $j_1(X)(0)$ avec partie réelle négative.

De plus, l'ensemble des germes hyperboliques (donc stables) est ouvert et dense dans $\mathbb{C}^n$, et génériquement les familles à 0 paramètres de champs de vecteurs ne contiennent que des singularités hyperboliques (Ces derniers résultats restent aussi bien valables pour les germes de difféomorphismes).

§ 3 Variétés invariantes et réduction à la partie centrale

Soit L un champ de vecteurs linéaire de $\mathbb{R}^n$. Il existe une décomposition $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ invariante (L est tangent à E^s aux points de E^s , à E^u aux points de E^u et à E^c aux points de E^c) telle que les valeurs propres de $L^s = L|_{E^s}$ aient une partie réelle négative, les valeurs propres de $L^u = L|_{E^u}$ ont une partie réelle positive tandis que les valeurs propres de $L^c = L|_{E^c}$ ont une partie réelle nulle.

Dans le cas hyperbolique ($E^c = \{0\}$), on a :

$$E^s = \{x \in \mathbb{R}^n / \lim_{t \rightarrow \infty} L_t(x) = 0\}$$

$$E^u = \{x \in \mathbb{R}^n / \lim_{t \rightarrow -\infty} L_t(x) = 0\}$$

Nous dirons qu'un champ de vecteurs est "partiellement hyperbolique" si $\dim(E^s + E^u) \neq 0$ et $\dim(E^c) \neq 0$ pour la décomposition associée à sa partie linéaire. Dans [19] N. Kuiper a démontré que deux champs de vecteurs linéaires L et M sont équivalents en classe C^0 si et seulement si $\dim E_L^s = \dim E_M^s$, $\dim E_L^u = \dim E_M^u$ et L^c et M^c sont linéairement conjugués.

Un des aspects de ce théorème est donc que la décomposition en partie hyperbolique et partie non-hyperbolique (dite "centrale") permet souvent de réduire le problème de la classification topologique à un problème en dimension moins élevée. Cette observation reste valable pour des champs non linéaires, ce qu'on peut exprimer dans les deux théorèmes suivants. On pourrait aussi bien les formuler pour des familles à paramètres de champs de vecteurs (voir le chapitre II).

Théorème 3.1

Soit $(\mathbb{R}^m, 0, X)$ une C^r singularité de champ de vecteurs et soit $E^s \oplus E^u \oplus E^c = \mathbb{R}^m$ la décomposition associée à $DX_0 = j_1(X)(0)$ de la façon décrite ci-dessus. Supposons que X soit partiellement hyperbolique en 0 . Alors, il existe des variétés de classe $C^r, N^{ss}, N^{cu}, N^{uu}, N^{cs}, N^c$ contenant toutes 0 et invariantes sous l'action de X telles que :

N^{ss} soit tangente à E^s en 0 et $j_1(X/N^{ss})(0) = DX_0|_{E^s}$

N^{cu} soit tangente à $E^u \oplus E^c$ en 0 et $j_1(X/N^{cu})(0) = DX_0|_{E^u \oplus E^c}$

N^{uu} soit tangente à E^u en 0 et $j_1(X/N^{uu})(0) = DX_0|_{E^u}$

N^{cs} soit tangente à $E^s \oplus E^c$ en 0 et $j_1(X/N^{cs})(0) = DX_0|_{E^s \oplus E^c}$

N^c soit tangente à E^c en 0 et $j_1(X/N^c)(0) = DX_0|_{E^c}$.

N^{ss} est appelée variété fortement stable, N^{uu} variété fortement instable, N^{cu} variété centre-instable, N^{cs} variété centre-stable et N^c variété centrale.

N^{ss} et N^{uu} sont uniques, N^{cu}, N^{cs} et N^c ne le sont pas. Si X est de classe C^∞ , alors, N^{ss} et N^{uu} sont C^∞ ; N^{cu}, N^{cs} et N^c ne le sont pas nécessairement. Il y a même des exemples où il n'existe pas de variété centrale C^∞ quoique il y ait des variétés centrales de classe C^r avec r arbitrairement grand.

Théorème 3.2

Soient X et N^c comme dans le théorème précédent. Alors, il existe un $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq m-c$ tel que le germe de X en 0 soit C^0 -conjugué au germe du champ :

$$X' = \sum_{i=1}^c \tilde{X}_i(z_1, \dots, z_c) \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=c+1}^{c+k} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{i=c+k+1}^m z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

où $(z_1, \dots, z_c)$ est un système de coordonnées sur N^c ,

$(z_1, \dots, z_m)$ étant des coordonnées de $\mathbb{R}^m$ étendant $(z_1, \dots, z_c)$ et $\sum_{i=1}^c \tilde{X}_i \frac{\partial}{\partial z_i} = X/N^c$.

De plus, si

$$Y = \sum_{i=1}^{c'} \tilde{Y}_i(z'_1, \dots, z'_{c'}) \frac{\partial}{\partial z'_i} + \sum_{i=c'+1}^{c'+k'} z'_i \frac{\partial}{\partial z'_i} - \sum_{i=c'+k'+1}^m z'_i \frac{\partial}{\partial z'_i}$$

avec $c'=c$ et $k'=k$ et $\sum_{i=1}^c \tilde{Y}_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ est C^0 -conjugué à $\sum_{i=1}^c \tilde{X}_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ en 0, alors Y est C^0 -conjugué à X en 0.

Remarque : Si au lieu d'une conjugaison C^0 entre X/N^c et Y/N^c on a seulement une équivalence C^0 , on peut encore prouver qu'il est possible de construire une équivalence C^0 entre X et Y . La démonstration est cependant beaucoup plus difficile [21].

De nouveau, comme dans le théorème de Hartman, on peut démontrer l'existence de ces variétés invariantes à l'aide d'une contraction de Lipschitz dans un espace métrique complet [16]

§4 Fibrations invariantes

Disons maintenant quelques mots sur les fibrations invariantes qu'on utilise dans une démonstration géométrique du théorème de Hartman et celles qu'on peut utiliser pour démontrer les théorèmes 3.1 et 3.2.

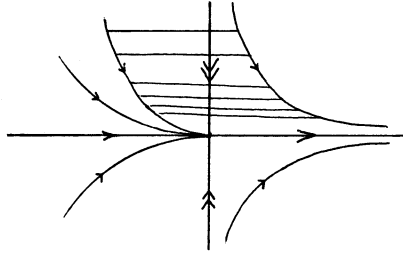
Notons N^s et N^u la variété stable respectivement instable en 0 du champ de vecteurs hyperbolique X , et par B^s et B^u deux boules autour de 0 dans N^s resp. N^u , qu'on peut supposer des sous-espaces linéaires. Considérons le voisinage $U = B^s \times B^u$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Prenons un point $p \in B^s$ et un disque D de classe C^1 transversal à N^s en p avec $D \cap N^s = \{p\}$. Le λ -lemme de J. Palis [20] nous garantit que les composantes connexes de $U \cap X_t(D)$ contenant $X_t(p)$, tendent en classe C^1 vers B^u , pour $t > 0$.

Ainsi en prenant ∂B^s transversal à X/N^s et en ne considérant pas un seul disque D mais un fibré sur ∂B^s avec comme fibres des disques transversaux à N^s , les mêmes composantes connexes des itérés de ces disques vont former avec B^u un fibré sur B^s remplissant tout un voisinage de 0. La projection sur la base B^s est une application continue π_s .

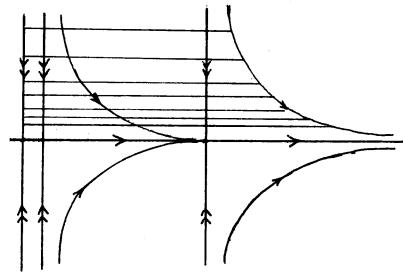
Faisant la même chose vis-à-vis de N^u avec X_{-t} , $t > 0$, on obtient une seconde projection continue π_u d'un voisinage de 0 sur B^u ; (π_s, π_u) forment un système de coordonnées locales continues. Dans ce système de coordonnées le flot de X s'écrit comme le produit des flots de X/E^s et X/E^u . Cette décomposition permet de réduire le problème de la conjugaison en classe C^0 de deux singularités hyperboliques de même index au problème de la conjugaison en classe C^0 de deux contractions hyperboliques, ce qui est immédiat.

Maintenant, on peut faire une même construction dans le cas non-hyperbolique toutefois en faisant attention au comportement central qui peut impliquer que les itérés d'un fibré de disques transversaux, par exemple par rapport à N^s ne remplis-

sent pas tout un voisinage de 0 moins N^u , bien que le λ -lemme reste valable. Ceci est par exemple le cas de la singularité $-y \frac{\partial}{\partial y} + x^2 \frac{\partial}{\partial x}$.



Néanmoins, la méthode de construction d'une fibration centre-instable peut être sauvegardée avec des moyens techniques de prolongement dont nous ne donnerons une idée que par le dessin ci-dessous.



Pour compléter la démonstration il faut aussi construire une fibration invariante stable ce qui est fait dans [16] en utilisant des méthodes analytiques.

Donc, une fois que l'on connaît le comportement centre-instable à C^0 -conjugaison près, on peut relever cette connaissance au niveau des germes en utilisant les coordonnées C^0 invariantes. Pour aller du comportement central au comportement centre-instable dans N^{cu} , on progresse de la même façon. Le seul inconvénient dans toute cette construction est que la description au niveau central est supposée connue à C^0 -conjugaison près.

Bien que le résultat ait été supposé vrai pour la C^0 -équivalence depuis un certain nombre d'années et même utilisé comme tel dans certains articles, il n'a été établi que récemment par J. Palis et F. Takens dans [21].

§5. Formes normales formelles

Un autre aspect du théorème de Hartman-Grobman est qu'un jet d'ordre 1 détermine la singularité à équivalence C^0 près si et seulement si ce jet est hyperbolique.

Définition 5.1 Soit $T_r \in \mathcal{J}_r^n$ un jet d'ordre r d'un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Nous disons que T_r est déterminant en classe C^k à équivalence (resp. conjugaison) près si pour $\forall X, Y \in \mathcal{J}_r^n$ avec $j_r(X)(0) = j_r(Y)(0) = T_r$ l'on a que X et Y sont équivalents (resp. conjugués) en classe C^k .

Un outil très important dans l'étude des singularités de champs de vecteurs et surtout dans la recherche de jets déterminants est le théorème de la forme normale formelle associée au 1-jet. Ce théorème nous permet d'éliminer un grand nombre de termes dans le jet d'ordre ∞ d'un germe de champ de vecteurs.

Supposons que X soit un champ de vecteurs C^k sur $\mathbb{R}^n$ avec $X(0) = 0$ et que X_1 soit un champ linéaire avec $j_1(X_1)(0) = j_1(X)(0)$.

Dénotons par H^h l'espace vectoriel des champs de vecteurs homogènes de degré h sur $\mathbb{R}^n$ et par $[X_1, \cdot]_h : H^h \rightarrow H^h$ l'application linéaire associant à chaque $Y \in H^h$ le crochet de Lie $[X_1, Y]$. Alors on peut décomposer H^h en $H^h = B^h \oplus G^h$ de façon que $B^h = \text{Im}([X_1, \cdot])$ et que G^h soit un espace complémentaire.

Théorème 5.1 [29] Si X, X_1, B^h et G^h sont comme ci-dessus, alors, $\forall \ell \leq k$, il y a un difféomorphisme de classe C^∞ , $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \hookrightarrow$ tel que $X' = \varphi_* X$ soit de la forme :

$$X' = X_1 + g_2 + \dots + g_\ell + R_\ell$$

avec $g_i \in G^i \quad \forall i = 2, \dots, \ell$ et avec $j_\ell(R_\ell)(0) = 0$. (le cas $\ell = k = \infty$ est permis)

Comme conséquence facile de ce théorème, on obtient :

Théorème 5.2 [29] Si X_1 est un champ de vecteurs linéaire tel que $\{e^{tX_1}/t \in \mathbb{R}\}$ soit relativement compact dans le groupe linéaire $GL^n(\mathbb{R})$ et si X est un champ de vecteurs C^∞ avec $j_1(X)(0) = j_1(X_1)(0)$ alors il existe un difféomorphisme C^∞ $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \hookrightarrow$ tel que $j_\infty(\varphi_* X)(0)$ soit invariant par $G_{X_1} = e^{tX_1}$ dans le sens que $j_\infty(\varphi_* X)(0) = j_\infty((g \circ \varphi)_* X)(0) \quad \forall g \in G_{X_1}$.

Ce corollaire qui nous sera d'une grande utilité revient à l'étude des 1-jets de la forme :

$$X_1 = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} - x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}) \quad 2k \leq n \text{ en } \mathbb{R}^n$$

et suit facilement du théorème de la forme normale puisqu'à chaque niveau H^h on obtient $H^h = \text{Im}([X_1, \cdot]_h) \oplus \text{Ker}([X_1, \cdot]_h)$ du moins après complexification, ce qui fait que l'on peut utiliser les $\text{Ker}([X_1, \cdot]_h)$ comme espaces supplémentaires G^h .

Si en plus on suppose $\sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i \neq 0 \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{Z} \text{ avec } 1 \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \leq \ell+1,$

ces noyaux $\text{Ker}([X_1, \dots]_h)$ se réduisent, ce qui permet une forme normale du l -jet ayant comme expression :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k f_i((x_1^2 + x_2^2), \dots, (x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2), x_{2k+1}, \dots, x_m)(x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} - x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}) \\ & + \sum_{i=1}^k g_i((x_1^2 + x_2^2), \dots, (x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2), x_{2k+1}, \dots, x_m)(x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i}}) \\ & + \sum_{i=2k+1}^n h_i((x_1^2 + x_2^2), \dots, (x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2), x_{2k+1}, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

avec $f_i(0) = \lambda_i$, $g_i(0) = 0$, $h_i(0) = 0$ et $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(0) = 0 \quad \forall i, j \geq 2k+1$.

§6 Linéarisations C^∞ et analytiques

Examinons maintenant ce qu'on peut tirer du théorème 5.1 dans le cas d'un champ linéaire X_1 hyperbolique avec comme valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec leur multiplicité.

Dans ce cas $[X_1, \dots]_h$ est un opérateur linéaire ayant comme valeurs propres les nombres

$$\begin{aligned} [\lambda_i - \sum_{j=1}^n m_j \cdot \lambda_j] &= [\lambda_i - \langle M, \Lambda \rangle] \quad \text{avec } i \in \{1, \dots, n\}, \\ M = (m_1, \dots, m_n) &\in \mathbb{N}^n, \quad \Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{et} \quad |M| = \sum_{j=1}^n m_j = h. \end{aligned}$$

Des relations $\lambda_i = \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j$ avec $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\sum_{i=1}^n m_i \geq 2$ sont appe-

lés des résonances par analogie avec les relations similaires qu'on a pour des systèmes dynamiques linéaires sur des tores. En conséquence du théorème 5.1 de la forme normale formelle nous déduisons qu'une singularité de champ de vecteurs hyperbolique et sans résonance est formellement linéarisable.

Ces résultats restent d'ailleurs valables pour des champs $\mathbb{C}$ -holomorphes.

Un théorème de Sternberg [26] dit que de telles singularités sont également linéarisables en classe C^∞ (du moins dans le domaine réel).

Ce résultat a été étendu récemment dans [13] aux singularités $\mathbb{C}$ -holomorphes hyperboliques où l'hyperbolicité veut dire que le rapport de deux valeurs propres n'est jamais réel. Cette condition n'est pas impliquée par la seule condition de non-résonance comme dans le cas réel.

Le procédé suivi dans le cas réel est de démontrer que deux germes de champs de vecteurs hyperboliques formellement équivalents sont nécessairement équivalents en classe C^∞ .

En classe C^r , un grand nombre de résultats ont été obtenus par différents

auteurs. Pour leur plus grande partie ces résultats sont inclus dans quelques théorèmes de Belitskii [4,5].

Les choses se compliquent davantage lorsqu'on s'intéresse à des linéarisations analytiques pour des champs de vecteurs analytiques ou des difféomorphismes locaux analytiques.

Traitions seulement le cas des champs analytiques et des champs de vecteurs $\mathbb{C}$ -holomorphes. L'ensemble des valeurs propres, comptées avec leur multiplicité, peut être représenté comme un élément $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $\mathbb{C}^n$.

On appelle domaine de Poincaré dans $\mathbb{C}^n$ l'ensemble des éléments $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que l'enveloppe convexe de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{C}$ ne contienne pas l'origine. Le complément de ce domaine en $\mathbb{C}^n$ est appelé le domaine de Siegel.

Chaque résonance peut être représentée par un hyperplan $\lambda_1 = \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j$ et l'on peut démontrer que dans le domaine de Poincaré chaque point a un voisinage n'intersectant qu'un nombre fini de plans de résonance tandis que dans le domaine de Siegel les plans de résonance forment un sous-ensemble dense.

Théorème 6.1 (Poincaré).

Si X est un champ de vecteurs analytique avec $X(0) = 0$ et si le vecteur Λ des valeurs propres de $j_1(X)(0)$ est dans le domaine de Poincaré et sans résonance alors X est analytiquement conjugué à $j_1(X)(0)$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Dans le cas de résonance, il existe des formes normales polynomiales [8].

Théorème 6.2 (Siegel [24]).

- 1) Pour presque tout $\Lambda \in \mathbb{C}^n$ (dans le sens de la mesure) chaque champ de vecteurs analytique X associé à Λ comme dans le théorème précédent, est analytiquement linéarisable.
- 2) Il existe un sous-ensemble dense dans le domaine de Siegel, composé d'éléments Λ sans résonance pour lesquels il y a des champs holomorphes avec Λ comme vecteur des valeurs propres et n'ayant pas une linéarisation analytique.

La condition que Siegel a utilisé pour permettre une linéarisation $\mathbb{C}^\omega$ est que pour Λ il existe un $\nu > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\forall i$ et $\forall M = (m_1, \dots, m_n)$ avec $M \in \mathbb{N}^n$ et $|M| = \sum m_j \geq 2$ l'on ait $|\lambda_1 - \langle \Lambda, M \rangle| \geq \varepsilon |M|^{-\nu}$

La nécessité d'un certain contrôle sur les quantités $|\lambda_1 - \langle \Lambda, M \rangle|$ vient du fait qu'on les retrouve comme dénominateurs dans les transformations formelles linéarisantes. Généralement ce problème est appelé le problème des petits dénominateurs. Entre temps ces conditions ont été améliorées par plusieurs personnes, entre

autres par Brjuno [7].

Par exemple, pour une linéarisation en l'absence de résonances il suffit qu'il existe $\epsilon \geq 0$, $\nu \geq 0$ tels que

$$|\lambda_i - \langle \Lambda, M \rangle| \geq \epsilon e^{-\nu |M|}$$

Signalons que les articles de Brjuno contiennent beaucoup d'autres résultats concernant les formes normales non linéaires analytiques ou strictement divergentes.

§ 7. Germes de détermination finie et jets non-stabilisables

Définition 7.1 On dit qu'un germe de champ de vecteurs en 0 est de détermination finie en classe C^0 s'il existe un $k < \infty$ tel que $j_k(X)(0)$ soit déterminant en classe C^0 (voir déf. 5.1).

Il va de soi que dans ces définitions on peut remplacer la C^0 -équivalence par la C^r -équivalence ($r \geq 1$) ou par conjugaison en classe C^r ($r \geq 0$) ou même par d'autres types d'équivalence comme on l'a déjà fait pour les linéarisations.

Si maintenant, un certain jet T_k n'est pas déterminant en classe C^0 la question se pose de savoir s'il est toujours possible de le stabiliser, dans le sens qu'on puisse trouver un jet T_ℓ d'ordre $\ell > k$ avec $\pi_{\ell k}(T_\ell) = T_k$ tel que T_ℓ soit déterminant. Ceci est par exemple le cas avec les fonctions C^∞ pour la notion de détermination C^∞ .

R. Thom avait conjecturé en 1970 que cette question aurait une réponse négative et en effet Takens a démontré l'existence de jets d'ordre 5 dans $\mathbb{R}^4$ et plus tard l'existence de jets d'ordre 2 dans $\mathbb{R}^5$ qui ne sont pas stabilisables même pas pour la notion d'équivalence C^0 faible suivante :

Définition 7.2

Deux singularités de champs de vecteurs en 0, X et Y sont faiblement équivalentes en classe C^0 s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow h(U)$, $h(0) = 0$ tel que $\forall V \subset U$ voisinage de 0, et $\forall p \in V$:

$$L_{\omega, Y, h(V)}(h(p)) = h(L_{\omega, X, V}(p))$$

et

$$L_{\alpha, Y, h(V)}(h(p)) = h(L_{\alpha, X, V}(p))$$

où $L_{i, Z, V}(x)$ est l'ensemble i -limite ($i = \alpha, \omega$) dans V de l'orbite du point x de Z .

Donnons une idée du 2-jet non-stabilisable en $\mathbb{R}^5$. Un énoncé plus exact est le suivant :

Théorème 7.3 [29]

Il existe une sous-variété $W \subset \mathcal{J}_2^5$ de codimension 3 contenant un ensemble résiduel P tel que $\forall \beta \in P$ et tout $\beta' \in \mathcal{J}_k^5$ avec $k \geq 2$ et $\pi_{k,2}(\beta') = \beta$, il y ait deux représentants X_1, X_2 de β' pour lesquels les ensembles $L(X_1, U_1)$ et $L(X_2, U_2)$ ne sont pas homéomorphes, quels que soient les voisinages U_1 et U_2 de $0 \in \mathbb{R}^5$.

Ici $L(X, U)$ est l'ensemble des points de U dont l'orbite pour X reste dans U et tend vers 0 pour t tendant aussi bien vers $+\infty$ que vers $-\infty$.

Cet ensemble P consiste de 2-jets ayant un 1-jet de la forme

$$\lambda_1 (y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}) + \lambda_2 (y_3 \frac{\partial}{\partial y_4} - y_4 \frac{\partial}{\partial y_3})$$

avec $\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \neq 0 \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \sum |\alpha_i| \geq 1$

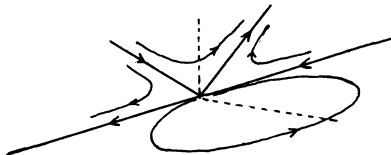
Se basant sur le théorème de la forme normale formelle on démontre qu'en utilisant un changement de coordonnées C^∞ on peut donner au jet d'ordre ∞ d'un champ de vecteurs ayant un tel 1-jet une forme invariante par les rotations dans le plan (y_1, y_2) et dans le plan (y_3, y_4) . Ainsi le jet d'ordre ∞ ne dépendra que de $y_1^2 + y_2^2$, $y_3^2 + y_4^2$, y_5 .

Considérant maintenant $x_1^2 = y_1^2 + y_2^2$, $x_2^2 = y_3^2 + y_4^2$, $x_3 = y_5$ et oubliant le comportement "rotationnel" du champ formel on obtient un champ formel sur $\mathbb{R}^3$ invariant par des réflexions $x_1 \rightarrow -x_1$ et $x_2 \rightarrow -x_2$. Le portrait topologique de ce champ sur $\mathbb{R}^3$ donne une certaine information topologique du champ sur $\mathbb{R}^5$. Cette méthode de réduction de dimension qu'on appelle parfois, "méthode du cocycle" [2] et sur laquelle nous reviendrons s'applique ici formellement.

Maintenant supposons que le 2-jet réduit sur $\mathbb{R}^3$ soit proche de

$$(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_3} - 2x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

L'aspect topologique, représenté dans le schéma ci-dessous, reste semblable (à équivalence près) lorsqu'on prend des perturbations de ce 2-jet, équivariantes pour $x_1 \rightarrow -x_1$ et $x_2 \rightarrow -x_2$ et de 1-jet nul.



La suspension de ce demi-plan (x_1, x_3) par les rotations de réduction détermine l'ensemble $L(X, U)$ qui proche de 0 est alors une variété de dimension 3 ; ceci au moins quand le germe même est invariant par les rotations.

Seulement cette symétrie par rapport au jet d'ordre 1 ne reste pas nécessairement valable au niveau du germe : on peut faire des perturbations plates $Y = X + Z$ créant dans $L(Y, U)$ des orbites isolées.

Remarquons que les contre-exemples de Takens ne sont pas analytiques. Ainsi dans le domaine des champs de vecteurs analytiques la question de la stabilisation reste ouverte. Par contre dans le cas C^∞ nous avons donc une réponse négative à partir de $\mathbb{R}^4$. Dans $\mathbb{R}^3$ la question est encore ouverte tandis que dans $\mathbb{R}^2$ tout jet est stabilisable, non seulement pour C^0 -équivalence mais même pour C^0 -conjugaison [10,11].

§ 8 Quelques résultats dans $\mathbb{R}^2$ et la méthode d'éclatement

Dans $\mathbb{R}^2$, à part le résultat sur la stabilisation des jets, on a en plus les résultats suivants [10] :

1) Si un germe X est de C^0 -détermination finie alors il satisfait à une inégalité de Łojasiewicz :

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ et } \exists \delta, c \in \mathbb{R}, \delta > 0, c > 0 \quad \|X(x)\| \geq c \|x\|^k \quad \forall x \text{ avec } \|x\| < \delta.$$

2) Si un germe satisfait à une inégalité de Łojasiewicz et a une orbite caractéristique, alors il est de détermination finie.

Une orbite caractéristique est une orbite qui tend vers le point singulier ou bien vient du point singulier dans une direction bien déterminée.

3) Théorème 8.1 [10,11]

$\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble ouvert et dense $\mathcal{U}_{n,2} \subset X(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2)$ tel que $\forall X \in \mathcal{U}_{n,2}$ et $\forall z \in \mathbb{R}^n$, X_z comme champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ n'a que des singularités algébriquement isolées donc satisfaisant à une inégalité de Łojasiewicz. En plus $\forall n$, il existe une liste finie de singularités telle que les singularités qu'on rencontre dans $\mathcal{U}_{n,2}$ et ayant une orbite caractéristique sont C^0 -conjuguées à une singularité de la liste.

A part des théorèmes généraux comme le théorème de transversalité, la démonstration a besoin essentiellement de la technique de l'éclatement. Introduisons cette technique sous la forme utilisée ici dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 8.2 Nous disons qu'une singularité X en $0 \in \mathbb{R}^2$ a un "degré de dégénérescence nul" si pour les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de $j_1(X)(0)$ l'on a $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$.

Une telle singularité est donc ou bien hyperbolique, ou bien partiellement hyperbolique avec une variété centrale 1-dimensionnelle ou bien a pour 1-jet une rotation. Ces singularités sont donc bien connues en codimension finie.

Supposons maintenant que X soit une singularité avec un degré de dégénérescence non nul. Alors en utilisant :

$$\Phi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 (\theta, r) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

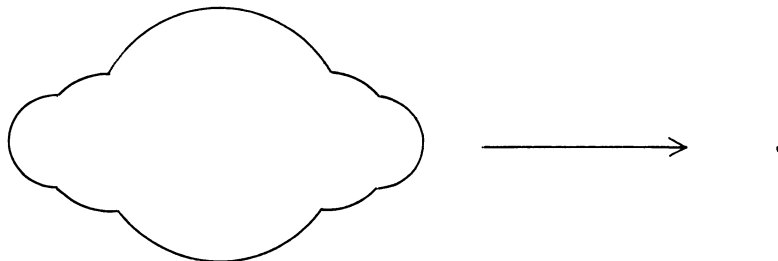
on peut définir un champ de vecteurs $C^\infty \tilde{X}$ sur $S^1 \times \mathbb{R}$ tel que $\Phi_* (\tilde{X}) = X$

$$\text{i.e. } d\Phi_p(\tilde{X}(p)) = X(\Phi(p))$$

Si en plus $j_k(X)(0) = 0$ alors $\exists \bar{X} \in C^\infty$ sur $S^1 \times \mathbb{R}$ avec $\tilde{X} = r^k \bar{X}$.

Le comportement topologique de X dans un voisinage de 0 peut être obtenu à partir du comportement topologique de $\bar{X}$ sur un cylindre $S^1 \times [0, \epsilon[$.

Il se peut qu'une singularité de $\bar{X}$ sur $S^1 \times \{0\}$ ait encore un degré de dégénérescence non nul. Dans ce cas l'on fait un nouvel éclatement de $\bar{X}$ en ce point. En ne tenant compte à chaque pas que du comportement sur $S^1 \times [0, \infty[$ et en divisant chaque fois par un r^k avec k le nombre maximal ayant la propriété $j_k(\bar{X}^1)(0) = 0$ on obtient après un nombre fini d'éclatements un certain champ de vecteurs $\bar{X}^n$ défini sur un voisinage extérieur A_n d'un cercle topologique ∂A_n en $\mathbb{R}^2$. ∂A_n consiste en un nombre fini d'arcs lisses.



De plus, il existe $\tilde{X}^n = F_n \bar{X}^n$ avec $F_n \geq 0$, C^∞ , $F_n|_{\partial A_n} \equiv 0$ et $(\Phi_1 \dots \Phi_n)_* (\tilde{X}^n) = X$ en dehors de ∂A_n . $\Phi_1 \dots \Phi_n$ est analytique.

La technique de l'éclatement joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 8.1 grâce à l'équivalence des trois propriétés suivantes :

- i) X en 0 satisfait à une inégalité de Łojasiewicz
- ii) il n'existe pas de chemin $C^\infty \gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ avec $j_r(\gamma)(0) \neq 0$, pour un $r < \infty$, tel que $j_\infty(X_\circ \gamma)(0) = 0$

iii) il existe une suite d'éclatements $\phi_1, \dots, \phi_n$ conduisant à un champ $\bar{X}^n$ telle que les seules singularités de $\bar{X}^n$ sur ∂A_n soient

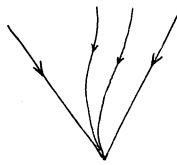
a) ou bien des singularités isolées p de degré de dégénérescence nul avec la propriété que $j_\infty(\bar{X}^n/N^C)(p) \neq 0$ dès que $\bar{X}^n$ en p a une variété centrale N^C .

b) ou bien des arcs lisses γ de ∂A_n (éventuellement ∂A_n tout entier dans le cas $n=1$) où en chaque point $p \in \gamma$ le degré de dégénérescence de $\bar{X}^n$ est nul.

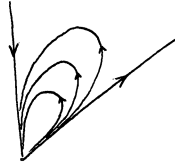
De plus la position et les propriétés des singularités de $\bar{X}^n$ ne dépendent que d'un jet d'ordre fini de X en 0 ce qui donne la possibilité de démontrer que le germe est de détermination finie.

4) Un autre résultat dans $\mathbb{R}^2$ [11] dit que deux singularités C^0 -équivalentes du type de Łojasiewicz et ayant au moins une orbite caractéristique sont nécessairement conjuguées en classe C^0 .

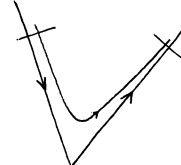
Pour voir cela, il suffit d'observer que les singularités du type de Łojasiewicz avec orbite caractéristique peuvent être décomposées en un nombre fini de secteurs paraboliques, elliptiques et hyperboliques :



parabolique



elliptique



hyperbolique

L'équivalence entre de telles singularités implique un même type de décomposition. Il est facile de voir que deux tels secteurs paraboliques resp. elliptiques sont C^0 -conjugués. La même observation reste valable pour les secteurs hyperboliques avec toutefois un peu plus de calcul [11]. On démontre que le temps de passage par un secteur hyperbolique tend de façon monotone vers l'infini lorsque l'orbite s'approche du point singulier.

§ 9 Singularités de petite codimension et stratification de l'espace des germes.

Quelques autres questions qui se posent concernant le type topologique des singularités de codimension finie sont par exemple :

1) Est ce que les singularités de codimension finie sont de détermination finie, ou plus précisément est ce que pour tout n il est possible de trouver un ensemble générique de familles à n paramètres ne contenant que des singularités de détermination finie.

Vu les résultats de Takens mentionnés auparavant, la réponse est négative en dimension ≥ 5 et $\text{codim} \geq 3$, même pour la notion plus faible d'équivalence C^0 -faible. Elle est aussi négative dans $\mathbb{R}^4$ utilisant le contre exemple de la stabilisation de Takens. Mais à notre connaissance, personne n'a calculé la codimension du phénomène qui doit être environ égale à 10. Dans $\mathbb{R}^3$, la question n'a pas encore été résolue et Takens conjecture une réponse négative. Dans $\mathbb{R}^2$ on peut dire que la réponse est sans doute positive, ce qui a d'ailleurs été conjecturé par Takens. En tout cas, elle est positive en ce qui concerne les singularités avec orbites caractéristiques [10].

2) Un autre problème est de caractériser ou même de classer les singularités de codimension n avec n aussi grand que possible.

Les singularités de codimension ≤ 2 en toutes dimensions ont été classées par Takens pour la notion de C^0 -équivalence faible et il y a de fortes chances pour que cette classification reste valable pour la C^0 -équivalence.

Ici nous ne donnons que l'énoncé du théorème. On trouvera la description et les schémas des différents types topologiques des singularités annoncés dans ce théorème dans [29] ou [27].

Théorème 9.1 Pour tout m , il existe des ensembles semi-algébriques fermés $Q^m = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3$ de codimension 0,1,2,3 resp. tels que $\forall i = 1,2,3$ chaque $X \in V_{i-1} \setminus V_i$ est V_{i-1} -stable pour l'équivalence C^0 -faible. En plus, tout $V_{i-1} \setminus V_i$ est une variété de codimension $(i-1)$.

Ce théorème rend entre autre possible une notion de codimension pour une singularité moins vague que celle qu'on utilisait auparavant.

Dans le plan, la classification de Takens a été étendue jusqu'en codimension 4. A part, quelques problèmes avec des singularités de codimension 4 sans orbites caractéristiques, il y a dix types topologiques différents de singularités de $\text{codim} \leq 4$ à conjugaison C^0 près.

Théorème 9.2 Il existe des sous-ensembles semi-algébriques fermés Q^2 $Q^2 = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset V_4 \supset V_5$ de codim 0, 1, ..., 5 resp. tels que $\forall i=0, \dots, 4$ chaque $V_i \setminus V_{i+1}$ est une union finie de variétés de codimension i : $V_i \setminus V_{i+1} = \bigcup_{j=1}^{n_i} M_{ji}$. A part un ensemble semi-algébrique $R_4 \subset V_4$ ouvert dans V_4 , chaque $X \in (Q^2 \setminus R_4) \cap M_{ji}$ est M_{ji} -stable pour conjugaison C^0 .

On trouvera la description des différents types de singularités intervenant dans ce théorème dans [10].

Voyons pour finir ce que l'on peut dire d'une extension éventuelle de ces stratifications pour des codimensions plus grandes :

$m \geq 5$ Il n'est pas possible de trouver une filtration $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset V_4$ telle que la propriété de stabilité relative soit vérifiée dans $V_3 \setminus V_4$, comme permet de le prouver le contre-exemple de Takens décrit ci-dessus.

$m=4$ La filtration peut seulement être finie pour la même raison que pour $m \geq 5$.

$m=2,3$ Il est possible bien que peu probable dans $\mathbb{R}^3$ que l'on puisse trouver une extension infinie de la filtration par des ensembles V_i , mais ici des difficultés nouvelles apparaissent. En effet Arnol'd dans [1] pour $m=3$ et Il'yashenko [18] pour $m=2$, ont prouvé qu'il n'était pas possible d'étendre la filtration d'une manière semi-algébrique. En fait, dans les deux cas, il n'existe pas de méthode de décision algébrique pour le problème de la stabilité au sens de Lyapounov. On peut cependant formuler la conjecture suivante ;

Conjecture ($m=2$) Il existe une stratification de $\mathbb{Q}^2$ par des ensembles semi-analytiques $\mathbb{Q}^2 = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_n \supset V_{n+1} \supset \dots$ avec des propriétés analogues à celles décrites ci-dessus et telle que $\bigcap_n V_n$ soit un ensemble de codimension infinie.

Chapitre II Déploiement de champs de vecteurs :

§1. Quelques définitions :

Rappelons qu'une famille à k paramètres de champs de vecteurs : X_μ , sur une variété M^n est la donnée d'un champ sur $\mathbb{R}^k \times M$ tel qu'en chaque point $(\mu, x) \in \mathbb{R}^k \times M$ le vecteur $X_\mu(x)$ soit tangent au facteur $\{\mu\} \times M$. On désigne par $X(\mathbb{R}^k \times M)$ l'espace de ces champs de vecteurs.

Dans le chapitre I nous avons introduit une notion de C^0 -équivalence entre champs de vecteurs. On peut étendre cette notion aux familles : deux familles à k paramètres X_μ et X'_μ sur le même espace de paramètres $\mathbb{R}^k$ et définies sur des variétés M et M' respectivement sont dites C^0 -équivalentes s'il existe une application continue $h_\mu : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M'$ telle que pour $\forall \mu, x \rightarrow h_\mu(x)$ soit un homéomorphisme de M sur M' , C^0 -équivalence entre X_μ et X'_μ . (On peut également définir des notions de C^0 -conjugaison et de C^∞ -équivalence et conjugaison)

Si $\varphi : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k$ est une application continue et X_μ une famille à paramètre $\mu \in \mathbb{R}^k$, on appelle famille induite par φ la famille $Y_\varepsilon = X_{\varphi(\varepsilon)}$ à paramètre $\varepsilon \in \mathbb{R}^l$.

Nous appellerons déploiement d'un champ X , toute famille X_μ telle que $X_0 = X$.

Définition 1.1 Un déploiement X_μ de X_0 est dit déploiement versel de X_0 si tout autre déploiement de X_0 est équivalent à un déploiement induit par X_μ .

Dans la suite on considérera seulement des déploiements de germes de champs de vecteurs X , définis comme germes de déploiement d'un représentant de X en $(0, x_0) \in \mathbb{R}^k \times M$. On pourra supposer que $M = \mathbb{R}^n$ et que $x_0 = 0$. Il n'y a pas de difficultés à considérer l'équivalence entre déploiements de germes de champs, l'induction d'un germe de déploiement par un germe d'application $(\varphi, 0) : (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$, ainsi que la notion de déploiement versel de germe de champs de vecteurs. Il faut seulement prendre garde que la donnée d'un déploiement d'un germe de champ n'est pas la simple donnée d'un germe d'application dans l'espace des germes des champs en $0 \in \mathbb{R}^n$. (Considérer par exemple la bifurcation d'Hopf décrite plus loin).

L'intérêt du déploiement versel d'un germe de champ de vecteur X , lorsqu'il existe, est qu'il renseigne sur tous les germes proches de X_0 , ainsi que sur les transitions possibles entre ces germes (bifurcation). Remarquons également qu'à l'aide de déploiements bien choisis, il est parfois possible de mettre en évidence des différences qualitatives entre deux germes topologiquement équivalents. Ainsi, les deux germes de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$, écrits en coordonnées polaires $(r, \theta) : \frac{\partial}{\partial \theta} + a_1 r^3 \frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} + a_2 r^5 \frac{\partial}{\partial r}$ (a_1 et $a_2 > 0$) sont topologiquement équivalents. Par contre, dans tout déploiement X_μ du premier il existe au plus une orbite fermée pour X_μ dont le diamètre tend vers $0 \in \mathbb{R}^2$ pour $\mu \rightarrow 0$, alors que pour le deuxième germe de champ, il existe des déploiements X_μ tels que le champ X_μ possède deux orbites fermées distinctes dont les diamètres tendent vers 0 pour $\mu \rightarrow 0$. (les conditions sur le diamètre des orbites fermées impliquent que le phénomène ne dépend pas des représentants choisis pour les déploiements).

§ 2 Figure de bifurcation pour une famille à k paramètres.

Considérons une famille X_μ de champs de vecteurs à k paramètres, sur une variété M . Soit Σ_0 le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^k$ tel que si μ_1 et μ_2 appartiennent à la même composante connexe de Σ_0 on ait X_{μ_1} équivalent à X_{μ_2} (Autrement dit X_μ est localement stable pour $\mu \in \Sigma_0$). On appelle $M \setminus \Sigma_0$, ensemble de bifurcation pour la famille X_μ , car les changements de type topologique de X_μ ne peuvent se produire que lorsque μ franchit cet ensemble. Soit maintenant Σ_1 le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^k \setminus \Sigma_0$ tel que $X_{\mu|_{\Sigma_1}}$ soit stable. Et ainsi de suite on peut définir éventuellement de cette façon une décomposition de $\mathbb{R}^k : \mathbb{R}^k = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots$

Une telle décomposition au moins valable pour les germes à l'origine, existe pour des familles génériques si l'on a pu définir une filtration de $\mathcal{G}_n$ par des ensembles semi-algébriques :

$$\mathcal{G}_n = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_k \supset V_{k+1} \quad \text{avec} \quad \text{cod } V_k = k \quad \text{tel que tout germe}$$

$$\alpha \in V_i \setminus V_{i+1} \quad \text{soit} \quad V_i\text{-stable.}$$

Alors, pour toute famille sur $\mathbb{R}^k$ dont le jet est transverse aux V_i on obtient la décomposition en posant $\Sigma_i = j\alpha^{-1}(V_i \setminus V_{i+1})$ et chaque Σ_i est semi-algébrique de codimension i . On a vu dans le premier chapitre qu'il n'existe pas toujours une filtration $\{V_i\}_i$ pour $\forall n$ et $\forall k$. Il est en effet possible de trouver des exemples tels que pour un certain i , $M\Sigma_i \neq \emptyset$ et $\Sigma_{i+1} = \emptyset$. Bien que leur étude soit en dehors de notre sujet, considérons par exemple la famille de champs holomorphes $X_{(\epsilon_1, \epsilon_2)} = (\lambda_1 + \epsilon_1)z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (\lambda_2 + \epsilon_2)z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \lambda_3 z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$, et deux à deux indépendants sur $\mathbb{R}$, pour (ϵ_1, ϵ_2) voisin de $0 \in \mathbb{R}^2$. Le germe de cette famille est un déploiement versel topologique du champ linéaire $X_{(0,0)}$. D'autre part, lorsque l'enveloppe convexe des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ contient $0 \in \mathbb{C}$, $X_{(\epsilon_1, \epsilon_2)}$ n'est pas topologiquement équivalent à $X_{(\epsilon'_1, \epsilon'_2)}$ si $(\epsilon_1, \epsilon_2) \neq (\epsilon'_1, \epsilon'_2)$. Le déploiement est un module à deux paramètres de types topologiques deux à deux distincts et $\Sigma_0 = \emptyset$. (Voir [9]).

Dans ce qui suit, nous voulons décrire quelques déploiements versels et indiquer comment les construire. Nous nous intéressons seulement aux germes α de codimension finie, au sens où $\alpha \in V_k \setminus V_{k+1}$ pour une des filtrations introduites dans le premier chapitre. Pour construire le déploiement, il est raisonnable de considérer une famille à paramètre dans $\mathbb{R}^k$, dont le jet soit transverse à V_k (et donc à tous les V_i). Cette méthode fournit effectivement un déploiement versel pour $k=1$, mais dès que $k=2$, il est facile de voir que la famille obtenue n'est pas nécessairement verselle.

Il faut d'autre part noter que la figure de bifurcation définie par les V_i ne fournit pas tous les renseignements intéressants. En effet, cette figure ne renseigne que sur les germes intervenant dans la famille, alors que certains phénomènes sont de nature plus globale dans le sens qu'ils sont associés à certaines connections entre germes. Une telle remarque est déjà valable pour les déploiements de fonctions (exemple : croisement de points critiques) mais ici la variété des phénomènes possibles est beaucoup plus grande (orbites fermées, connections de points de selle, variétés invariantes ayant un caractère évanescent lorsque le paramètre tend vers 0).

§ 3. Exemples de déploiements versels.

3.1 Les germes de champs de vecteurs stables.; Nous avons déjà indiqué que les germes X en $0 \in \mathbb{R}^n$, réguliers ($X(0) \neq 0$) et les germes en 0 hyperboliques ($X(0) = 0$ et $[\text{spectre } j_1 X(0)] \cap \{i\mathbb{R}\} \neq \emptyset$) sont stables. Compte tenu de la dépendance continue par rapport à X de la conjugaison entre X et $\frac{\partial}{\partial x_1}$ dans le cas régulier et entre X et $j_1 X(0)$ dans le cas hyperbolique, il est facile de montrer

que le germe X admet un déploiement versel : la famille constante. Inversement, les germes réguliers ou hyperboliques sont les seuls germes de champs de vecteurs ayant un déploiement versel constant.

3.2. Réduction à la variété centrale. Lorsque le 1-jet de X n'est que partiellement hyperbolique, nous verrons que l'on peut limiter l'étude du germe à une variété centrale. Pour cela, on utilise une généralisation aux familles de champs, des théorèmes relatifs aux variétés centrales, mentionnés plus haut.

Soit donc X_μ une famille à paramètre de $\mathbb{R}^n$ telle que $X_0(0) = 0$ et soit $E^u \oplus E^s \oplus E^c$ la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en espaces propres, associée à $j_1 X(0)$. Si l'on considère X_μ comme un champ sur $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, de composante nulle sur le facteur $\mathbb{R}^k$, les espaces E^u, E^s et $\mathbb{R}^k \oplus E^c$ sont les espaces respectivement instable, stable et central de ce champ. Le théorème d'existence des variétés centrales implique alors que pour $\forall \ell \geq 1$, il existe une variété N^c de classe C^ℓ dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, de dimension $c + k$ et tangente en 0 à $\mathbb{R}^k \oplus E^c$, variété centrale de X_μ considéré comme champ de vecteur sur $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$.

Soit $\tilde{X}_\mu$ la restriction de X_μ à une telle variété centrale N^c dont on choisit un système $(\mu_1, \dots, \mu_k, z_1, \dots, z_c)$ de coordonnées de classe C^ℓ : $\tilde{X}_\mu$ est une famille sur $\mathbb{R}^c$ à paramètre $\mu \in \mathbb{R}^k$.

En utilisant cette variété N^c on peut maintenant établir le résultat suivant :

Théorème [21]. Soit X_μ un germe de famille en $0 \in \mathbb{R}^n$ à paramètre $\mu \in \mathbb{R}^k$ tel que l'espace central de X_0 en 0 soit de dimension c , $0 \leq c \leq n$. On a alors les résultats suivants :

i) Il existe p , $0 \leq p \leq n-c$ tel que le germe de famille X_μ soit C^0 -équivalent

$$\text{au germe : } X'_\mu = \tilde{X}_\mu + \sum_{i=c+1}^{c+p} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{i=c+p+1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

où $(\mu_1, \dots, \mu_k, z_1, \dots, z_n)$ est un système de coordonnées sur $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^r$ étendant celui de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^c$ introduit plus haut sur N^c .

$$\text{ii) Si } Y_\mu = \sum_{i=1}^c \tilde{Y}_i(z_1, \dots, z_c, \mu) \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=c+1}^{c+p} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{i=c+p+1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

et si $\tilde{Y}_\mu = \sum_{i=1}^c \tilde{Y}_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ est C^0 -équivalent à $\tilde{X}_\mu$, alors Y_μ est C^0 -équivalent à X_μ .

Remarque. Il résulte du théorème que si $\tilde{X}_\mu$ est un déploiement versel de $\tilde{X}_0$, alors X_μ est un déploiement versel de X_0 . La possibilité de relever des C^0 -équivalences affirmée dans l'énoncé n'est pas une trivialité comme ce serait le cas pour des C^0 -conjugaisons ; elle résulte d'un résultat difficile établi récemment par J. Palis et F. Takens [21].

Le théorème énoncé ci-dessus permet de se limiter à l'étude des germes dont le 1-jet a un spectre de valeurs propres purement imaginaire. Sauf indications contraires, c'est ce que nous supposons dorénavant.

3.3 Déploiement versel en dimension 1

Soit X_μ un déploiement d'un champ sur $\mathbb{R}$: $X_\mu = f_\mu(x) \frac{\partial}{\partial x}$. Alors
 $X_\mu = \text{grad} V_\mu(x)$ avec $V_\mu(x) = \int_0^x f_\mu(s) ds$.

L'étude du déploiement versel de X_0 est équivalente à celle du déploiement de V_0 , c'est-à-dire à l'étude des catastrophes élémentaires pour les potentiels à une variable (voir [32],[33])

On a le résultat général suivant :

Soit $X = f(x) \frac{\partial}{\partial x}$ un germe en $0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(0) = f^{(1)}(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{et que} \quad f^{(k+1)}(0) \neq 0.$$

Alors X admet un déploiement versel à k -paramètres équivalent à :

$$X(\mu_1, \dots, \mu_k) = (\mu_1 x^{k+1} + \mu_2 x^{k-1} + \dots + \mu_k) \frac{\partial}{\partial x}$$

(L'équivalence est même une C^∞ -conjugaison modulo une fonction multiplicative non nulle. Le déploiement est également versel en ce sens).

Remarque. A l'aide du théorème de réduction à la variété centrale, on a du même coup une étude complète de tous les germes singuliers à variété centrale de dimension 1 et comportement central non complètement dégénéré. Ainsi, le déploiement versel de la singularité semi-hyperbolique du type selle-nœud : $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ est donnée par $X_\mu = (x^2 + \mu) \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$.

(Le déploiement s'interprète comme l'apparition d'un attracteur en $\mu=0$ pour μ décroissant).

3.4 Déploiements versels en dimension 2.

- Bifurcation de Hopf pour les champs de vecteurs [17]

Soit X un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$ ayant un 1-jet de rotation
 $j_1 X(0) = \lambda(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2})$, $\lambda \neq 0$. Nous avons vu plus haut qu'un tel germe a une forme normale formelle d'ordre k , qui en coordonnées (r, θ) s'écrit :

$$X = (\lambda + \sum_{i \geq 1} b_i r^{2i}) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\sum_{i \geq 1} a_i r^{2i}) r \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{mod}(\|x\|^{k+1})$$

($\|x\|$: norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$)

Les germes de champs dont la réduction centrale a un k -jet comme ci-dessus avec $a_1 \neq 0$ définissent une partie de l'ensemble $V_1 \setminus V_2$ du théorème de Takens énoncé dans le premier chapitre (L'autre partie de cet ensemble est formée par les germes ayant une réduction centrale de dimension 1 : $f(x) \frac{\partial}{\partial x}$ avec $f(0) = f^{(1)}(0) = 0$ et $f^{(2)}(0) \neq 0$, germes dont on a déjà parlé plus haut).

Un germe ayant une forme normale formelle comme ci-dessus avec $a_1 \neq 0$ admet un déploiement versel équivalent à :

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial \theta} + (\mu + ar^2)r \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{avec } a = a_1 \neq 0.$$

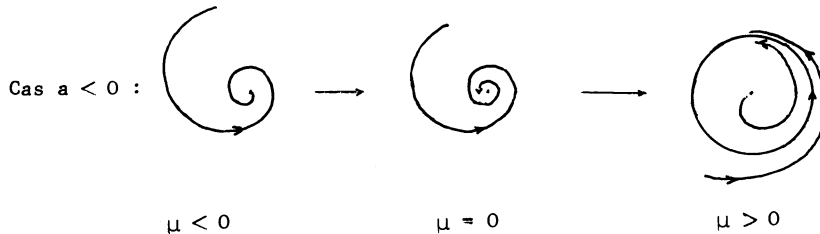
Pour étudier le portrait topologique de ce déploiement, il est commode de remarquer que si $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application $\pi : r \rightarrow \varphi = \pi(\theta, r) = r^2$, on a :

$$\pi_* X_\mu = Z_\mu = 2(\mu + a\varphi)\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

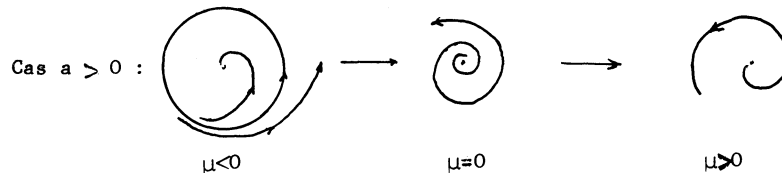
Supposons $a < 0$. Le champ Z_μ , pour $\mu > 0$, possède deux singularités hyperboliques, l'une en 0 (une source), l'autre au point $-\frac{\mu}{a}$ (un puits). Il en résulte que le champ X_μ possède une source hyperbolique en $0 \in \mathbb{R}^2$ et que le cercle de rayon $\sqrt{-\frac{\mu}{a}} : \gamma_\mu = \pi^{-1}(-\frac{\mu}{a})$ est une trajectoire fermée normalement hyperbolique de ce champ.

Lorsque μ est ≤ 0 , le point 0 est un puits pour le champ X_μ , hyperbolique pour $\mu < 0$ et attracteur faible pour $\mu = 0$.

On peut représenter l'évolution du portrait topologique par le schéma suivant :



Lorsque $a > 0$, la partie radiale est l'opposée de celle obtenue dans le cas précédent pour $-\mu$. On en déduit immédiatement l'évolution suivante du portrait topologique :



Les deux déploiements obtenus ont une interprétation très différente. Dans le cas $a < 0$, le fait le plus notable est l'apparition de l'orbite normalement attrayante pour $\mu > 0$. Un système décrit par un tel champ de vecteurs passe d'un équilibre ponctuel stable pour $\mu < 0$ à un régime oscillant stable pour $\mu > 0$. De plus, l'amplitude de ce dernier régime croît à partir de l'équilibre ponctuel lorsque μ augmente. Le système ne subit donc qu'une faible perturbation lorsqu'on passe la valeur $\mu=0$. Examinons maintenant le cas $a>0$. L'origine est pour $\mu<0$, un attracteur stable dont le bassin d'attraction est le disque de rayon $\sqrt{-\frac{\mu}{a}}$. En $\mu=0$, cet attracteur disparaît pour faire place à un équilibre instable. Si l'on imagine un système dans l'équilibre $0 \in \mathbb{R}^2$ pour $\mu<0$, cet équilibre devient de plus en plus précaire pour $\mu \rightarrow 0$, et très probablement avant d'arriver en $\mu=0$, le système évolue vers un autre équilibre loin de sa position initiale et en tout cas non décrit par le déploiement du germe considéré. Il s'agit ici d'une forte perturbation.

Nous avons donné des déploiements versels pour toutes les singularités de codimension 1 (comme elles apparaissent dans le théorème de Takens, cité au chapitre I). Passons maintenant aux singularités de codimension 2.

3.5. Les singularités de codimension 2.

Nous allons passer en revue les différentes singularités de codimension 2 et donner, lorsqu'il existe leur déploiement versel. Désignons par n , la dimension de l'espace central.

Pour $n = 1$, la singularité $f(x) \frac{\partial}{\partial x}$ avec $f(x)$ fonction C^∞ telle que $f(0) = f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) \neq 0$ admet un déploiement versel à deux paramètres (voir plus haut).

Pour $n = 2$, considérons la forme normale d'un champ de un 1-jet $j_1 X(0) = \lambda(-x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1})$ telle que $a_1 = 0$ et $a_2 \neq 0$. Le champ admet un déploiement versel à deux paramètres, équivalent à

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial \theta} + (\mu_1 + \mu_2 r^2 + a r^4) r \frac{\partial}{\partial r}, \quad \text{avec } (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2; \quad a \neq 0.$$

Considérons maintenant un champ dont le 1-jet vaut $x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$; X possède une forme normale formelle égale à :

$$j_\infty X(0) \sim (x_1 + \sum_{i \geq 2} b_i x_2^i) \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{i \geq 2} a_i x_2^i \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Supposons que a_2 et $b_2 \neq 0$. Alors le champ X possède un déploiement versel à deux paramètres équivalent à :

$$X_u = (x_1 + \mu_2 x + b x^2) \frac{\partial}{\partial x_2} + (\mu_1 + a x^2) \frac{\partial}{\partial x_1},$$

avec $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ et $a, b \neq 0$.

On trouvera une description détaillée du portrait topologique de ces déploiements dans l'article d'Arnol'd [3]. Signalons seulement que dans le premier des

déploiements écrits, on a création de couples d'orbites fermées, l'un stable l'autre instable, lorsque le paramètre traverse une courbe issue de l'origine de l'espace des paramètres $\mu \in (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$. Dans le deuxième déploiement, étudié par Bogdanov [6] et Takens [31], il existe pour un ensemble ouvert de valeurs du paramètre, un point de selle hyperbolique de X_μ ; le long d'une ligne dans cet ouvert, on observe une connection entre variété stable et instable. Transversalement à cette ligne, on observe l'évolution suivante du portrait topologique :



Pour $n \geq 3$, il existe des germes de codimension 2 dont le 1-jet a pour valeurs propres : 0, $\pm i\lambda$ ($n=3$) et $\pm i\lambda_1, \pm i\lambda_2$ avec la condition pour $\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}$ tel que $1 \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| \leq 4$ on ait $\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \neq 0$ ($n=4$), et d'autres conditions supplémentaires portant sur le 3-jet. Il est très vraisemblable que ces singularités n'ont pas de déploiement versel à nombre fini de paramètres.

Nous reviendrons sur l'étude de ces singularités à la fin du chapitre.

§ 4. Construction de déploiements versels :

La construction du déploiement versel d'un germe X se fait en deux étapes :

1^{ère} Étape : déploiement versel formel : On écrit un déploiement versel pour un k -jet bien choisi de X (choisi de façon que l'on puisse ensuite réaliser la deuxième étape). Cette première étape est toujours possible mais l'on doit s'efforcer de trouver un déploiement versel le plus intéressant possible (par exemple avec un nombre minimum de paramètres).

2^{ème} Étape : Suffisance du déploiement formel. La première étape a fourni un déploiement versel C^∞ , modulo les champs de vecteurs de k -jets nuls. La deuxième étape consiste à montrer que l'adjonction d'un champ d'ordre $k+1$ au représentant polynomial du k -jet, préserve le type topologique de ce déploiement polynomial, à équivalence près.

4.1. Déploiement formel.

L'action adjointe du groupe $\mathcal{G} D^n$ des germes de difféomorphismes fixant l'origine sur l'espace des germes de champs de vecteurs : $\overline{\mathcal{G}}^n$ (non nécessairement nuls en 0), induit pour $\forall k \geq 1$ une action du groupe de Lie des $(k+1)$ -jets de difféomorphis-

mes $\mathcal{J}_{k+1}^n$ sur l'espace vectoriel des k -jets de champs en 0 (non nécessairement nuls en 0) : $\overline{\mathcal{J}}_k^n$.

Lorsque l'on a ainsi l'action d'un groupe de Lie G sur une variété M , on peut introduire dans M la notion de G -équivalence : v_1 et $v_2 \in M$ sont G -équivalents s'ils appartiennent à une même G -orbite. On peut étendre cette notion aux germes en $0 \in \mathbb{R}^k$, d'applications différentiables d'un espace de paramètres $\mathbb{R}^k$ dans M : v_μ et w_μ sont équivalents si et seulement si il existe un germe d'application différentiable $h_\mu : \mathbb{R}^k \rightarrow G$ tel que $w_\mu = h_\mu v_\mu$. On appellera déploiement de v_0 , tout germe d'application tel que v_μ . Un déploiement v_μ de v_0 est dit versel, si tout autre déploiement w_ϵ est de la forme : $v_{\mu(\epsilon)}$ pour un germe d'application différentiable $\mu(\epsilon)$. Il est alors très facile de montrer que (voir [3]) :

Lemme. Le germe d'application v_μ est un déploiement versel de v si et seulement si v_μ est transverse en $\mu = 0$ à la G -orbite $\mathcal{O}_{v_0}$ de v_0 .

Remarque. Supposons que $\text{cod } \mathcal{O}_{v_0} = \ell$. Dans la pratique, si M est un espace vectoriel, on choisira ℓ vecteurs en v_0 : $v_1, \dots, v_\ell$ engendrant un sous-espace complémentaire à l'espace tangent $T_{v_0} \mathcal{O}_{v_0}$ de l'orbite en v_0 . Un déploiement versel en v_0 est donné par :

$$v(\epsilon_1, \dots, \epsilon_\ell) = v_0 + \sum_{i=1}^{\ell} \epsilon_i v_i$$

Revenons maintenant à l'action des $(k+1)$ -jets de difféomorphismes sur les k -jets de champ. Soit $j_k X(0)$ un élément de $\overline{\mathcal{J}}_k^n$. L'espace tangent à l'orbite de $\overline{\mathcal{J}}_k^n$ est l'espace $\mathcal{H}_k(j_k X(0)) = j_k[\mathcal{J}_{k+1}^n, j_k X(0)] \subset \overline{\mathcal{J}}_k^n$ (où $\mathcal{J}_{k+1}^n$, espace des $(k+1)$ -jets de champs de vecteurs nuls en 0 , est l'algèbre de Lie de $\mathcal{J}_{k+1}^n$).

Si X_μ est un déploiement du champ $X = X_0$, et si $k \geq 1$, choisissons des champs de vecteurs $X_1, \dots, X_\ell$ dont les k -jets engendrent dans $\overline{\mathcal{J}}_k^n$ un espace complémentaire à $\mathcal{H}_k(j_k X(0))$, espace tangent à l'orbite de $j_k X(0)$. La proposition suivante suit immédiatement du lemme précédent :

Proposition. Si $X, X_1, \dots, X_\ell$ sont des champs comme ci-dessus, il existe ℓ germes de fonctions $C^\infty_\mu : f_1(\mu), \dots, f_\ell(\mu)$ avec $f_1(0) = \dots = f_\ell(0) = 0$ et un germe de famille de champs : R_μ , tel que $R(\mu) = O(\|x\|^{k+1})$ et que X_μ soit C^∞ -conjugué à $Y_\mu = X_0 + \sum_{i=1}^{\ell} f_i(\mu) X_i + R(\mu)$.

(Ici, C^∞ -conjugué signifie qu'il existe une famille de difféomorphismes h_μ qui pour chaque μ conjugue X_μ et Y_μ).

La proposition signifie aussi que $Y(\epsilon_1, \dots, \epsilon_\ell) = X_0 + \sum_{i=1}^{\ell} \epsilon_i X_i$ est un déploiement versel de $X \bmod O(\|x\|^{k+1})$.

Nous allons faire maintenant quelques calculs de déploiements versels de k -jets.

Considérons tout d'abord un champ X de k -jet égal au k -jet du champ linéaire X_1 . Désignons par H^ℓ , l'espace des ℓ -jets de $(\ell-1)$ -jet nul. Alors

$$\mathcal{J}_k^n = \bigoplus_{\ell=1}^k H^\ell \quad \text{et} \quad [H^\ell, X_1] \subset H^\ell.$$

Posons $B^\ell = [H^\ell, X]$. On a alors $\mathcal{H}_k(X_1) = \bigoplus_{\ell=1}^k B^\ell$. Pour construire un espace $\mathcal{B}_k$, complémentaire à $\mathcal{H}_k(X_0) = \bigoplus_{\ell=1}^k B^\ell$ il suffit de choisir un espace G_ℓ complémentaire à B^ℓ dans H^ℓ et de poser $\mathcal{B}_k = \bigoplus_{\ell=1}^k G_\ell$.

Soit en particulier un champ diagonal X_1 , disons $X_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Posons $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{N}^\ell$, notons $x_1^{\ell_1} \dots x_n^{\ell_n}$ par x^ℓ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i \ell_i$ pour $\langle \lambda, \ell \rangle$.

On voit facilement que :

$$[X_1, x^\ell \frac{\partial}{\partial x_i}] = (\lambda_i - \langle \lambda, \ell \rangle) x^\ell \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On peut choisir G_ℓ d'être l'espace engendré par les $x^\ell \frac{\partial}{\partial x_i}$ tels que :

$\lambda_i - \langle \lambda, \ell \rangle = 0$. (le résultat établit la forme normale annoncée dans le chapitre I, car il est facile de voir que le calcul fait plus haut est valable non seulement pour les germes de déploiements mais aussi pour tout déploiement de X_1 . Rappelons qu'une relation telle que $\lambda_i - \langle \lambda, \ell \rangle = 0$ est appelée : résonance de X_1 .

Le calcul précédent est transposable aux champs linéaires X_0 , diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Supposons par exemple que :

$$X_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} - x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}) \quad \text{avec} \quad 2m \leq n.$$

On prouve facilement que la noyau du crochet de Lie de X_0 sur $\mathcal{J}_k^n$ contient les champs de la forme : rotations $x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} - x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}$, champs radiaux

$x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i}}$ et champs $\frac{\partial}{\partial x_\ell}$, $\ell \geq 2m+1$, multipliés par les monômes dans les variables $x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2$, $1 \leq i \leq m$, et x_ℓ , $\ell \geq 2m+1$ et est

engendré par ces champs si $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0$ pour $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}^m$ avec

$1 \leq \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \leq k+1$. (Si l'on introduit les coordonnées angle-actions sur les $2m$ premières variables p_i et θ_i avec $p_i^2 = x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2$, ces champs sont de la

forme : $p_1^{2i_1} \dots p_m^{2i_m} x_{2m+1}^{j_{2m+1}} \dots x_n^{j_n}$ multipliés par $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$, $p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ ou $\frac{\partial}{\partial x_\ell}$ pour $\ell \geq 2m+1$)

Considérons par exemple dans $\mathbb{R}^2$ un déploiement X_μ tel que $j_1 X_0(0) = \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Comme X_0 est non dégénéré en 0, on peut, après une conjugaison C^∞ , supposer que

$X_\mu(0) = 0$ pour tout μ . On trouve alors que :

$$X_\mu \sim (1 + a_1(\mu) + a_2(\mu)r^2) \frac{\partial}{\partial \theta} + (b_1(\mu) + b_2(\mu)r^2)r \frac{\partial}{\partial r} \mod O(r^4)$$

($\sim$ simplifie C^∞ -conjugué).

Si le champ $X = X_0$ a un k -jet non linéaire, il est facile de voir que l'espace $\mathcal{B}_k(j_1 X_0(0))$ associé au champ linéaire ayant même 1-jet que X_0 , est encore un espace supplémentaire à l'orbite de $j_k X_0(0)$ (mais en général non complémentaire et donc de dimension non minimale) et permet d'écrire un déploiement versel pour $j_k X_0(0)$. Ainsi, pour le 3-jet $j_3 X_0(0) = \frac{\partial}{\partial \theta} + ar^3 \frac{\partial}{\partial r}$ $a \neq 0$,

le calcul précédent donne :

$$X_\mu \sim (1 + a_1(\mu) + a_2(\mu)r^2) \frac{\partial}{\partial \theta} + (b_1(\mu) + (a + b_2(\mu))r^2)r \frac{\partial}{\partial r} \mod O(r^4)$$

Avant de passer à l'étape suivante, il convient de chercher à réduire le nombre de fonctions arbitraires introduites dans l'expression du déploiement du k -jet. Par exemple, puisque l'on veut finalement comparer les champs à équivalence près (et non à conjugaison près), on peut diviser l'expression trouvée par une fonction C^∞ non nulle, mais arbitraire de x et de μ . Dans l'exemple précédent, on peut diviser le déploiement par la fonction $1 + a_1(\mu) + a_2(\mu)r^2$. On trouve que :

$$X_\mu \text{ est } C^\infty\text{-équivalent à } \frac{\partial}{\partial \theta} + (b'(\mu) + (a + b''(\mu))r^2)r \frac{\partial}{\partial r} \mod O(r^4)$$

Enfin, il ne faut pas oublier que le nombre de fonctions n'est pas nécessairement minimal. Ainsi, dans l'expression trouvée ci-dessus, on peut considérer le changement de coordonnées dépendant du paramètre : $R = \sqrt{1+b''/a} r$, $\theta = \theta$. On obtient que le déploiement est équivalent à :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} + (b(\mu) + aR^2)R \frac{\partial}{\partial R} \mod O(R^4)$$

4.2. Recherche d'un déploiement versel topologique.

Nous allons maintenant aborder la deuxième étape en essayant de montrer que le déploiement polynomial : $\bar{X}_\mu = X_0 + \sum_{i=1}^k \epsilon_i X_i$ est équivalent topologiquement à :

$$X_\mu = \bar{X}_\mu + R_\mu \text{ pour } \forall R_\mu = O(\|x\|^{k+1}).$$

Commençons par décrire une méthode classique en dimension 2. Par une induction sur un autre espace de paramètres et une équivalence (en dehors de $\epsilon = 0$) donnée par des applications différentiables :

$$h_\epsilon : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } \mu(\epsilon) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

on transforme le déploiement X_μ dans le déploiement $Y_\epsilon = (h_\epsilon)_* (X_{\mu(\epsilon)})$ de la forme :

$$Y_\epsilon = Y_H + Y_D(\epsilon)$$

où Y_H est un champ hamiltonien et $Y_D(0) = 0$.

(l'application h_ϵ doit être singulière en $\epsilon = 0$, car les champs hamiltoniens forment un ensemble de codimension ∞ dans l'espace Q_n). On désire de plus que la fonction hamiltonienne de Y_H définie par $Y_H \dashrightarrow dx_1 \wedge dx_2 = dH$ à une constante près, n'ait que des singularités de type de Morse.

En chaque point $x \in \mathbb{R}^2$, on pose $\operatorname{div} Y_\epsilon = \operatorname{div} Y_D(\epsilon) = g(\epsilon, x_1, x_2)$. La différentielle partielle par rapport à ϵ de cette fonction : $d_\epsilon g(0, x_1, x_2)$ est une mesure de la "vitesse" avec laquelle on quitte le domaine des champs hamiltoniens au voisinage de $\epsilon = 0$. Si cette "vitesse" est suffisante, la perturbation apportée par $Y_D(\epsilon)$ sera capable d'imposer une structure dissipative stable à Y_H pour des valeurs de ϵ proches de 0 mais différentes de 0. Cette structure disparaît évidemment pour $\epsilon = 0$. (Il est possible que seules quelques dérivées partielles de g par rapport à ϵ soient définies en $\epsilon = 0$. Elles permettent d'étudier le déploiement dans un cône en 0 dans l'espace des paramètres).

Prenons un exemple très simple :

Soit $Y_H = \frac{\partial}{\partial \theta}$ ($H = 1/2 r^2$) et supposons que :

$$Y_\epsilon = \frac{\partial}{\partial \theta} + \epsilon \bar{Y} + O(|\epsilon|^2) \quad \text{où } \epsilon \in \mathbb{R}.$$

En chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x, y) = \frac{d}{d\epsilon} \operatorname{div} Y_\epsilon|_{\epsilon=0} = \operatorname{div} \bar{Y}(x, y)$

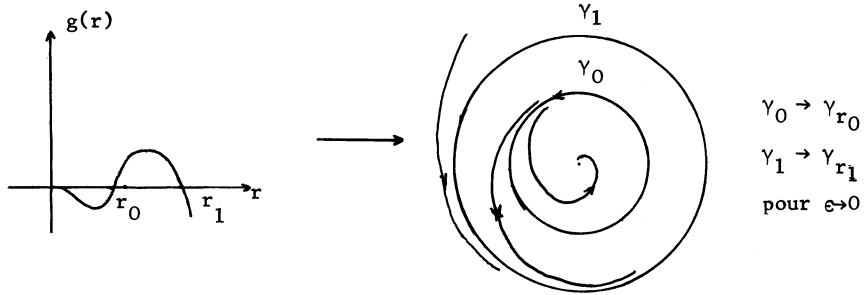
et $g(r) = \int_{D(r)} f(x, y) dx dy$ où $D(r)$ est le disque en $0 \in \mathbb{R}^2$, de rayon r .

Il est facile de vérifier que $\frac{dg}{dr} = \int_{\gamma_r} f d\theta$ où $\gamma_r = \partial D(r)$

Supposons que pour $r_0 > 0$, $g(r_0) = 0$ et que $g'(r_0) \neq 0$. On peut alors montrer que pour $\forall \epsilon$ assez petit et différent de 0, le champ Y_ϵ possède une orbite normalement hyperbolique (attractante pour $\epsilon g'(r) < 0$), tendant uniformément vers le cercle γ_{r_0} pour $\epsilon \rightarrow 0$.

Pour obtenir ce résultat, on prouve tout d'abord qu'il existe une application de retour sur l'axe des x : $\varphi(x)$, définie par les trajectoires du champ Y_ϵ , issues des points d'un voisinage V du point $x = r_0$ de l'axe des x , pourvu que ϵ soit assez petit. Puis on montre que la norme dans la topologie C^1 sur V , de la fonction $\epsilon g(x) - (\varphi(x) - x)$ est $O(\epsilon^2)$. Le résultat en suit facilement.

De même, supposons que $f(0) \neq 0$. On peut alors montrer que l'origine est une source ou un puits hyperbolique de Y_ϵ pour $\epsilon \neq 0$. En résumé, si $g(r)$ est générique, on obtient pour Y_ϵ un point hyperbolique et une famille de trajectoires normalement hyperboliques, tendant vers une position limite pour $\epsilon \rightarrow 0$



Appliquons ces idées à la bifurcation de Hopf. On a obtenu plus haut un déploiement versel à l'ordre 4 près :

$$X_\epsilon = \frac{\partial}{\partial \theta} + (\epsilon + ar^2)r \frac{\partial}{\partial r} + O(r^4) \quad a \neq 0$$

Supposons que $a < 0$ et faisons pour $\epsilon > 0$ le changement de coordonnées singulier :

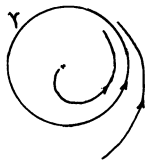
$$\sqrt{\epsilon} R = r, \quad \theta = \theta$$

On obtient le champ :

$$Y_\epsilon(R, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} + \epsilon(1 + aR^2)R \frac{\partial}{\partial R} + \epsilon^2 O(R^4)$$

On a ici : $\bar{Y} = (1 + aR^2)R \frac{\partial}{\partial R}$ et $\frac{1}{2\pi}g(R) = R^2(1 + aR^2)$.

La fonction $g(R)$ est bien générique. Elle s'annule en $R = 0$ et en $R_0 = \frac{1}{\sqrt{|a|}}$ avec une dérivée négative. Dans les coordonnées (R, θ) , le portrait topologique de Y_ϵ est le suivant :



avec $\gamma \rightarrow \gamma_{R_0}$ pour $\epsilon \rightarrow 0$

Si l'on revient au champ X_ϵ , on obtient le même portrait topologique avec la réduction de $\sqrt{\epsilon}$: l'orbite stable tend vers 0 comme $\sqrt{\epsilon}$ pour $\epsilon \rightarrow 0_+$ (Voir aussi [30] pour l'étude de la différentiabilité du déploiement).

Plus généralement, on peut considérer un déploiement à deux paramètres d'un champ hamiltonien dont toutes les singularités sont du type de Morse.

$$Y_{(\epsilon_1, \epsilon_2)} = Y_H + Y_D(\epsilon_1, \epsilon_2) + O(|\epsilon|^2) \quad \text{avec} \quad |\epsilon| = |\epsilon_1| + |\epsilon_2|$$

On introduit des coordonnées polaires dans l'espace des ϵ :

$$\epsilon_1 = \lambda \cos \varphi, \quad \epsilon_2 = \lambda \sin \varphi, \quad \text{puis on pose :}$$

$$f(\varphi, x_1, x_2) = \frac{d}{d\lambda} \operatorname{div} Y_D(\lambda \cos \varphi, \lambda \sin \varphi) \Big|_0$$

Il est alors possible de détecter des points singuliers stables, des orbites stables et de donner des critères portant sur f , pour qu'aboutisse en $\varphi = \varphi_0$ une ligne de bifurcations d'Hopf par exemple (pour λ proche de 0, et φ franchissant la valeur φ_0), ou bien une ligne de coupure de connexion variété stable-instable pour un point de selle. Le lecteur intéressé par l'énoncé précis de ces critères, ainsi que par leur application à l'étude de la singularité $x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ pourra consulter [31] par exemple.

Avant d'aborder l'étude des déploiements en dimension > 2 , indiquons le résultat de bifurcation de Hopf valable pour un germe de difféomorphisme en $0 \in \mathbb{R}^2$ ayant un 1-jet de rotation (voir [23]). On considère un germe de difféomorphisme

φ_0 en $0 \in \mathbb{R}^2$ ayant pour 1-jet l'application s'écrivant en coordonnées polaires $(r, \theta) \rightarrow (r, \theta + \alpha)$. (rotation d'angle α). Supposons que $\alpha \neq \pi \frac{k}{l}$ avec $|k|, |l| \leq 5$.

Si $\varphi_\mu(r, \theta)$ est un déploiement à un paramètre réel μ , on peut, par un changement C^∞ de coordonnées dépendant de μ , écrire :

$$\varphi_\mu(r, \theta) = ((1 + \mu)r + f_1(\mu)r^3, \theta + f_2(\mu) + f_3(\mu)r^2) \bmod 0(r^5)$$

Alors si $f_1(0) < 0$ par exemple, le difféomorphisme φ_μ possède pour $\forall \mu > 0$ assez petit, un cercle invariant normalement contractant, dont le diamètre tend vers 0 avec $\sqrt{\mu}$.

Si φ_μ est le difféomorphisme de Poincaré associé à une famille de champs de vecteurs X_μ pour une orbite fermée γ_μ , sous les conditions écrites ci-dessus, on voit que l'orbite γ_μ normalement attractive pour $\mu < 0$ bifurque en un tore topologique attracteur de dimension 2 pour $\mu = 0$ et μ croissant.

Evidemment, cela n'implique pas que le déploiement donné soit équivalent au germe $(r, \theta) \rightarrow ((1 + \mu)r + f_1(\mu)r^3, \theta + f_2(\mu) + f_3(\mu)r^2)$, car alors, le difféomorphisme serait une rotation sur le cercle invariant et ce caractère peut être détruit par une perturbation arbitrairement petite du déploiement dans la topologie C^∞ .

Pour introduire quelques considérations finales sur les déploiements en dimension > 2 , revenons à la bifurcation d'Hopf des champs de vecteurs :

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial \theta} + (\mu + ar^2)r \frac{\partial}{\partial r} + 0(r^4).$$

Pour étudier le champ polynomial $\bar{X}_\mu = \frac{\partial}{\partial \theta} + (\mu + ar^2)r \frac{\partial}{\partial r}$, il est commode comme on l'a vu plus haut, de remarquer que l'application $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\pi(r, \theta) = r^2$, projette le champ $\bar{X}_\mu$ sur le champ $\bar{Y}_\mu = 2(\mu + a\varphi)\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Cette situation peut être généralisée de la façon suivante : on considère une submersion π d'une variété N^n munie d'un champ $\bar{X}$ sur une variété M^m munie

d'un champ $\bar{Y}$, avec $n > m$, telle que $\bar{X}$ se projette sur $\bar{Y}$, alors si $\bar{Y}$ admet une variété V comme variété invariante, normalement hyperbolique, le champ $\bar{X}$ admet la variété $\pi^{-1}(V)$ comme variété normalement hyperbolique et tout champ X assez proche de $\bar{X}$ possède aussi une variété invariante normalement hyperbolique proche de $\pi^{-1}(V)$.

On peut maintenant esquisser une méthode analogue à celle décrite plus haut en dimension 2. Soit X_μ un déploiement sur la variété N et supposons que par un changement de coordonnées dépendant du paramètre réel μ , singulier en $\mu = 0$, on ramène X_μ à la forme :

$$X_\epsilon = X_H(\epsilon) + X_D(\epsilon) + o(\epsilon^2) \quad (\epsilon \in \mathbb{R})$$

où $X_D(0) = 0$, X_H est tangent aux fibres de π et le champ $\bar{X}_D = \frac{d}{d\epsilon} X_D(\epsilon)|_0 = 0$

se projette sur un champ $\bar{Y}_D$ de M . Supposons que $\bar{Y}_D$ possède une variété normalement hyperbolique V ; alors $\pi^{-1}V$ est une variété invariante, normalement hyperbolique pour X_ϵ , pour ϵ assez petit.

Pour fixer les idées, considérons les singularités de codimension 2 classifiées par Takens, dont le 1-jet dans $\mathbb{R}^4$ est le produit de deux rotations :

$$j_1 X_0(0) = \lambda_1 (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) + \lambda_2 (x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3})$$

où λ_1, λ_2 sont tels que $\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \neq 0$ pour $\forall \alpha_i \in \mathbb{Z}$ tels que $1 \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| \leq 4$.

Soient $(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2)$ les coordonnées angles-actions dans $\mathbb{R}^4$. Alors X_0 après un changement C^∞ de coordonnées, s'écrit :

$$X_0 = (\lambda_1 + b_{11}(0)p_1^2 + b_{12}(0)p_2^2) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + (\lambda_2 + b_{21}(0)p_1^2 + b_{22}(0)p_2^2) \frac{\partial}{\partial \theta_2} +$$

$$+ (a_{11}(0)p_1^2 + a_{12}(0)p_2^2) p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + (a_{21}(0)p_1^2 + a_{22}(0)p_2^2) p_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \sum_i (\varphi_i p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \psi_i \frac{\partial}{\partial \theta_i})$$

avec $\varphi_i, \psi_i = o(\|x\|^4)$.

Un déploiement versel à l'ordre 3 est donné par :

$$X(\epsilon_1, \epsilon_2, p_1, \dots) = (\lambda_1 + b_{11}p_1^2 + b_{12}p_2^2) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + (\lambda_2 + b_{21}p_1^2 + b_{22}p_2^2) \frac{\partial}{\partial \theta_2} +$$

$$+ (\epsilon_1 + a_{11}p_1^2 + a_{12}p_2^2) p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + (\epsilon_2 + a_{21}p_1^2 + a_{22}p_2^2) p_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \sum_i (\bar{\varphi}_i p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \bar{\psi}_i \frac{\partial}{\partial \theta_i})$$

avec $\bar{\varphi}_i, \bar{\psi}_i = o(\|x\|^4)$

où ϵ_1, ϵ_2 sont voisins de 0 et $b_{ij}, a_{ij}, \dots$ voisins de $b_{ij}(0), a_{ij}(0), \dots$

Supposons que les $a_{ij}(0)$ vérifient les conditions énoncées par Takens pour

décrire les singularités de codimension 2. [29].

Soient $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, b_{11} - b_{11}(0), \dots)$. Faisons maintenant le changement singulier de coordonnées :

$$\epsilon_1 = \lambda \cos \varphi, \quad \epsilon_2 = \lambda \sin \varphi, \quad \lambda \geq 0, \quad \epsilon_i = \lambda \epsilon_i' \quad \text{pour } i \geq 3$$

$$p_1 = \sqrt{\lambda} P_1, \quad p_2 = \sqrt{\lambda} P_2 \quad \text{avec } \lambda \geq 0.$$

Alors le déploiement X_ϵ , développé par rapport à λ , devient :

$$\begin{aligned} X_\epsilon = & (\lambda_1 + \lambda(b_{11}(0)P_1^2 + b_{12}(0)P_2^2)) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + (\lambda_2 + \lambda(b_{21}(0)P_1^2 + b_{22}(0)P_2^2)) \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \\ & + \lambda[(\cos \varphi + a_{11}(0)P_1^2 + a_{12}(0)P_2^2)P_1 \frac{\partial}{\partial P_1} + (\sin \varphi + a_{21}(0)P_1^2 + a_{22}(0)P_2^2)P_2 \frac{\partial}{\partial P_2}] + \\ & + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

Dans cet exemple, il convient de considérer $N^4 = \mathbb{R}^4 \setminus (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4)$ et $M^2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1 > 0 \text{ et } \varphi_2 > 0\}$ où (x_i, x_j) est le 2-plan engendré par les coordonnées x_i, x_j de $\mathbb{R}^4$. Si l'on fixe tous les paramètres sauf λ , le champ $X_\epsilon = X_\lambda$ se décompose en $X_\lambda = X_H(\lambda) + X_D(\lambda) + O(\lambda^2)$ et pour l'application $\pi : M \rightarrow N$ définie par $\varphi_1 = P_1^2, \varphi_2 = P_2^2$ on a :

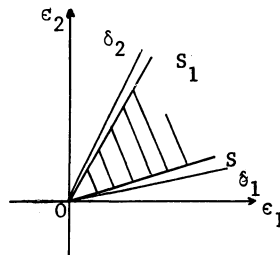
$$\bar{Y}_D = 2(\cos \varphi + a_{11}(0)\varphi_1 + a_{12}(0)\varphi_2)\varphi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + 2(\sin \varphi + a_{21}(0)\varphi_1 + a_{22}(0)\varphi_2)\varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.$$

Supposons pour simplifier que $a_{ij}(0) < 0$ pour $\forall(i, j)$ et que

$A = a_{11}(0)a_{22}(0) - a_{12}(0)a_{21}(0) > 0$. Si le vecteur $v(\cos \varphi, \sin \varphi)$ est dans le secteur S du premier quadrant de $\mathbb{R}^2(\epsilon_1, \epsilon_2)$, limité par les droites δ_1 et δ_2 de pente respective $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ et $\frac{a_{22}}{a_{21}}$, le champ $\bar{Y}_D$ a, au point u , avec

$$u = \left(\frac{-a_{22}(0) \cos \varphi + a_{12}(0) \sin \varphi}{A}, \frac{a_{21}(0) \cos \varphi - a_{11}(0) \sin \varphi}{A} \right),$$

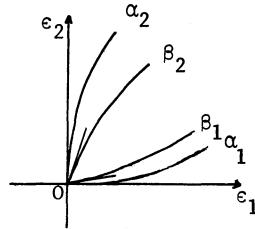
une singularité normalement hyperbolique.



Si maintenant S_1 est un secteur fermé, contenu dans l'intérieur de S , et si

si λ est assez petit, $\lambda \neq 0$, et $v \in S_1$, il existe un 2-tore invariant normalement hyperbolique pour X_ϵ , qui tend uniformément vers $0 \in \mathbb{R}^4$ comme $\sqrt{\lambda}$ pour $\lambda \rightarrow 0_+$.

D'une façon plus complète, il semble possible de montrer l'existence de lignes issues de 0 dans l'espace $\mathbb{R}^2(\epsilon_1, \epsilon_2)$: α_1, α_2 proches des axes ϵ_1 et ϵ_2 , β_1 et β_2 , proches des droites δ_1 et δ_2 telles que le franchissement de α_1 (resp. α_2) entraîne une bifurcation d'Hopf dans une variété de dimension 2 normalement hyperbolique, proche de la variété (x_3, x_4) (resp. (x_1, x_2)), produisant une orbite hyperbolique γ_1 (resp. γ_2) et que le franchissement de β_1 (resp. β_2) entraîne une bifurcation d'Hopf de l'orbite γ_1 (resp. γ_2)



Les différents phénomènes ont un "caractère versel" pour tout déploiement du germe X_0 . Cependant le déploiement X_ϵ n'est pas versel en raison de la présence des tores invariants (voir l'argument évoqué à propos de la bifurcation d'Hopf des difféomorphismes).

Nous comptons revenir sur cette étude des déploiements versels des champs de vecteurs, dans un prochain article.

RÉFÉRENCES

- [1] V.I Arnol'd : Algebraic Unsolvability of the problem of Lyapunov stability and the problem of topological classification of singular points of an analytic system of differential equations. *Func. Analysis and its applications* 4, 1970, 173-180.
- [2] V.I Arnol'd : Lectures on bifurcations in versal families. *Russian Mathematical Surveys* V, 26, 1971.
- [3] V.I. Arnol'd : On matrices depending on parameters. *Russian Math. Surveys* 26 (1971) n° 2 29-43.
- [4] G.R. Belitskii : A counterexample to smooth linearisation. Traduit de : *Funkt. Anal. Ego Prilozheniya* Vol 10. N° 2 65-66 (1976).
- [5] G.R. Belitskii : Functional Equations and conjugacy of local diffeomorphisms of a finite smoothness class. *Soviet. Math.*, (1972) Vol. 13, N°1.
- [6] R. Bogdanov : Versal deformations of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues. *Func. Anal. Appl.* 9, 1975, 144-145.
- [7] Brjuno : Analytic form of differential equations. *Trans. Moscow Math. Soc.* 25 (1971) pp . 131-282.
- [8] N.N. Brushlinskaya : A Finiteness theorem for Families of vector fields in the neighborhood of a Poincaré type-singularity. *Functional Anal. Appl.* 5 (1971) n° 3 177-181.
- [9] C. Camacho, N. Kuiper, J. Palis . The topology of holomorphic flows with singularity. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 48 (1978) 5-38.
- [10] F. Dumortier : Singularities of vector fields on the plane *J. of Diff. Equations*, vol. 23, 1 (1977), 53-106.
- [11] F. Dumortier : Singularities of vector fields. *Monografias de matemática*. I.M.P.A., Rio de Janeiro (à paraître)
- [12] F. Dumortier-R.Roussarie : Linéarisation différentiable des germes singuliers d'actions de $\mathbb{R}^2$ et de champs de vecteurs holomorphes, *C.R.A.S.*, t.285, 1977.
- [13] F. Dumortier-R. Roussarie : Smooth linearization of germs of $\mathbb{R}^2$ -actions and holomorphic vector fields (à paraître dans *Topology*).
- [14] D. Grobman . : Homeomorphisms of systems of differential equations. *Dokl. Akad. Nauk.* 128 (1965).

- [15] P. Hartman : On the local linearization of differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 568-573.
- [16] M.W. Hirsch, C.C. Pugh, M. Shub : Invariant manifolds, Lecture Notes in Mathematics 583. Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [17] E. Hopf: Abzweigung einer periodischen Lösung von einer Stationären Lösung eines Differential Systems, Ber. Math. Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 94 (1942) 1-22.
- [18] Y.S. Il' Yashenko : Algebraic non solvability and almost algebraic solvability of the center focus problem, Funcional Anal. Appl. 1972, 197-202.
- [19] N. Kuiper : The topology of the solutions of a linear Differential Equation on $\mathbb{R}^n$, in Manifolds - Tokyo 1973, University of Tokyo Press, 1975.
- [20] J. Palis-W.de Melo : Introdução aos sistemas dinâmicos , 10º Colóquio Brasileiro de Matemática , I.M.P.A. (1975).
- [21] J. Palis-F. Takens : Topological Equivalence for normally hyperbolic dynamical systems Topologie 16 (1977).
- [22] C.C. Pugh : On a theorem of P. Hartman, Amer. J. Math. 91 (1969) 363-367.
- [23] D. Ruelle-F. Takens : On the nature of turbulence, Comm. Math. Phys. 20 (1971) 167-192 - A note concerning our paper on the nature of turbulence. Commun. Math. Phys. 23 : 343-344.
- [24] C.L. Siegel : Über die Normalform analytischer Differential gleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. (1952) 21-30.
- [25] S. Sternberg : Local contractions and a theorem of Poincaré. Amer. J. of Math. vol. 79, (1957) 809-824.
- [26] S. Sternberg : On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space II. Amer. J. of Math., vol. 80 (1958), 623-631.
- [27] F. Takens : Singularities of functions and vector fields, Nieuw Arch. Wisk. (3) 20 (1972), 107-130.
- [28] F. Takens : A nonstabilizable jet of a singularity of a vector field. In "Dynamical Systems", Proc. of the Salvador Symposium 1971, Ed. by M.M. Peixoto, Academic Press, New York 1973.
- [29] F. Takens : Singularities of vector fields, Publ. Math. I.H.E.S. 43 (1974).
- [30] F. Takens : Unfoldings of certain singularities of vector fields. Generalized Hopf bifurcations. Journal of Diff. Equations 14 (1973). 476-493.

- [31]. F. Takens : Forced Oscillations and bifurcations. In: Applications of Global Analysis I, Communications of Mathematical Institute Rijksuniversiteit Utrecht 3 (1974).
- [32] R. Thom : Stabilité structurelle et morphogénèse, Benjamin, New York, 1972.
- [33] E.C. Zeeman-D.J.A. Trotman : The classification of the elementary catastrophes of codimension ≤ 5 in "Structural Stability, the theory of catastrophes, and applications in sciences, Seattle 1975, Lecture Notes in Math. N° 525, Springer-Verlag (1976).

DUMORTIER Freddy
Limburgs Universitair Centrum
Universitaire Campus
3610 DIEPENBEEK
Belgique.

ROUSSARIE Robert
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences-Mirande
214 rue de Mirande
21000 DIJON, France.

* Les auteurs ont achevé la rédaction de cet article lors d'un séjour à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques à Bures-sur-Yvette.