

Astérisque

I. KUPKA

**L'indice d'un point singulier d'un champ
selon V. Arnold, ([o])**

Astérisque, tome 59-60 (1978), p. 151-172

http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__59-60__151_0

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'INDICE D'UN POINT SINGULIER D'UN CHAMP

selon V. ARNOLD, ([O])

par I. KUPKA.

INTRODUCTION : Dans ce travail Arnold se propose de donner des évaluations de l'indice d'un champ de vecteur, en un point singulier isolé, pour des familles de champs particulières (en général polynomiaux homogènes ou même gradients de polynômes homogènes). Les méthodes, qu'il utilise, lui donnent des sous produits intéressants, en eux-mêmes, par exemple, une nouvelle démonstration des inégalités de Petrowsky-Oleinik, une estimation de certains nombres de Hodge par les nombres de Petrowsky, une estimation, par les nombres de Hodge, de la caractéristique d'Euler-Poincaré, du bord de la fibre singulière locale d'une fonction analytique, ayant un point singulier algébriquement isolé.

Essentiellement, deux méthodes sont présentées pour évaluer l'indice.

La première est fondée sur le travail de Eisenbud-Levine. Elle donne une nouvelle démonstration des inégalités de Petrowsky-Oleinik (voir énoncé plus bas). La deuxième méthode s'applique à des champs gradients et repose sur deux conjectures, l'une d'Arnold, l'autre de Steenbrink. La conjecture de Steenbrink relie certains nombres de Hodge au polygone de Newton. La conjecture d'Arnold majore l'indice d'un gradient par un nombre de Hodge. Arnold démontre sa conjecture dans le cas du gradient d'un polynôme homogène et donne des idées très intéressantes sur de possibles démonstrations. Il termine son article par des considérations topologiques sur les bords des fibres singulières locales.

Dans la suite nous exposerons les principaux résultats d'Arnold ou plutôt ce que nous avons réussi à en comprendre. Ensuite nous tenterons de justifier ces assertions, en développant les indications assez succinctes d'Arnold sur les démonstrations. Nous assumons aussi la responsabilité de toute erreur contenue dans l'exposition qui suit. Des conversations avec nos collègues, R. Moussu et B. Perron nous ont été très utiles. Qu'ils trouvent ici nos remerciements.

(1) EXPOSÉ DES RÉSULTATS.

Introduisons les nombres de Petrowsky :

$$\Pi_n(d) = \# \{ \alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, 0 < \alpha_i < d \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = \frac{nd}{2} \}$$

$$\Pi_n(d) = \# \{ \alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}, 0 < \alpha_i < d \quad \frac{n-1}{2}d < \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i < \frac{nd}{2} \}$$

Que les nombres dans les membres de droite de ces égalités sont égaux, est une proposition prouvée par Arnold, dont nous laissons la démonstration à l'amusement du lecteur.

THÉORÈME I : La valeur absolue de l'indice en 0 d'un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n à composantes polynomiales homogènes toutes de degré $d-1$, et ayant en 0 un point singulier algébriquement isolé, est inférieure ou égale à $\Pi_n(d)$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un polynôme homogène de degré d . Soit Z l'hypersurface réelle de $\mathbb{P}R(n-1)$ définie par les zéros de f . Dans le cas où le degré d de f est pair, le signe de f sur toute droite passant par l'origine est constant (sauf en 0) et on peut définir dans ce cas les ensembles semi-algébriques V_+ et V_- de $\mathbb{P}R(n-1)$:

$$V_+ = \{ f \geq 0 \} \quad V_- = \{ f \leq 0 \} .$$

Notation : Si X est un espace "raisonnable", on désignera par $E(X)$ sa caractéristique d'Euler Poincaré.

Inégalités de Petrowsky-Oleinik. Si 0 est une singularité algébriquement isolée, alors :

$$\begin{aligned} |E(Z) - 1| &\leq \Pi_d(n) && \text{si } n \text{ est pair} \\ |E(V_+) - E(V_-)| &\leq \Pi_d(n) && \text{si } n \text{ est impair et } d \text{ pair.} \end{aligned}$$

Notons que l'hypothèse sur 0 entraîne que Z, V_+, V_- sont des variétés lisses (V_+, V_- avec bord Z).

THÉORÈME 2 : Si 0 est un point singulier, algébriquement isolé du polynôme homogène $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de degré d , l'indice en 0 du gradient de f est égal à $1 - E(Z)$ si n est pair et à $E(V_+) - E(V_-)$ si n est impair et d pair.

INDICE D'UN CHAMP

La conjonction des théorèmes 1 et 2 démontre les inégalités de Petrowsky-Oleinik.

THÉORÈME 3 : La valeur absolue en 0, du gradient d'une fonction analytique réelle f , de deux variables, définie dans un voisinage de 0 et dont 0 est un point singulier algébriquement isolé, est inférieure ou égale au nombre de points à coordonnées entières, situées sur l'ensemble des arêtes compactes du polygone de Newton de la fonction f en 0.

Corollaire : Sous les hypothèses du théorème 3, si μ est la multiplicité de 0 comme point singulier, la valeur absolue de l'indice en 0 est inférieure ou égale à $C\sqrt{\mu}$ où C est une constante universelle (indépendante de f).

Si $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction polynome ayant 0 comme point singulier algébriquement isolé, la variété de niveau générique de u est une variété affine lisse, sur laquelle on peut mettre une structure de Hodge mixte (à deux niveaux d'ailleurs, dans ce cas). On désigne par $h^{p,q}(u)$ le nombre de Hodge de type (p,q) de cette structure.

THÉORÈME 4 : Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est un polynome homogène de degré d ayant 0 comme point singulier algébriquement isolé, alors si n est pair, $h^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(f_{\mathbb{C}}) = \Pi_d(n)$ où $f_{\mathbb{C}}$ est le complexifié de f et si n est impair, $h^{\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}}(g) = \Pi_d(n)$, où g est le polynome à $n+1$ variables x_1, \dots, x_n, t ; $g(x, t) = f(x) + t^2$.

De ce théorème et du théorème 1, il résulte, que dans les conditions du théorème 4, la valeur absolue de l'indice en 0 du gradient de f , est inférieure ou égale à $h^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(f_{\mathbb{C}})$, si n est pair. Cette remarque conduit Arnold à faire la conjecture suivante :

Conjecture 1 : Si n est pair et si $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ est un germe de fonction ana-

lytique en 0 ayant en ce point une singularité algébriquement isolée, alors la valeur absolue de l'indice du gradient de f en 0 est inférieure ou égale à $h_1^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(f_C)$.

Ce nombre est la dimension du sous espace de l'espace des cycles de type de Hodge $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ de la structure de Hodge mixte de la fibre locale générique de la complexifiée f_C de f , formée des cycles invariants par la monodromie de 0. (Voir dans la partie 3 de ce papier une explication plus détaillée sur ce point).

Une conjecture de Steenbrink ([24]) relie ce nombre $h_1^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}(f_C)$ à un nombre $p_{\frac{n}{2}, 0}(\Gamma)$ qui peut être défini et calculé uniquement à partir des propriétés combinatoires du polyèdre de Newton de f , si la fonction f est non dégénérée au sens de Kushnirenko ([18]).

En réunissant ces deux conjectures on obtient :

Conjecture 2 : Soit n un entier pair. Si $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ est un germe en 0 de fonction analytique, ayant 0 comme singularité algébriquement isolée, de polyèdre de Newton Γ , et si f est Γ -non dégénérée au sens de Kushnirenko, alors la valeur absolue de l'indice en 0 du gradient de f est inférieure ou égale à $p_{\frac{n}{2}, 0}(\Gamma)$, nombre qui ne dépend que du polyèdre de Newton Γ et défini dans Steenbrink.

En un sens, cette conjecture est une généralisation du corollaire du théorème 3. Arnold donne plusieurs exemples à l'appui de cette conjecture et offre plusieurs idées pour la démontrer. Bien que très intéressantes, nous ne pourrions entrer dans le détail de ces questions, faute de temps et de place.

Arnold termine son article sur des résultats qui précisent la structure topologique des variétés de niveau d'une fonction analytique réelle ou complexe au voisinage d'une fibre singulière à singularité algébriquement isolée. Pour cela, il a besoin des "structures de Clemens" introduites par Clemens dans [5].

Structure de Clemens : Soit X une variété projective complexe ou réelle réunion finie de sous variétés lisses Y_1, \dots, Y_m en position générale. Cela veut dire que pour tout sous ensemble S de $\{1, 2, \dots, m\}$ tel que $Y(S) = \bigcap_{j \in S} Y_j$ soit non vide, les Y_j $j \in S$ se coupent transversalement le long de l'intersection commune $Y(S)$. La variété X est stratifiée de façon naturelle : à toute partie S de $\{1, 2, \dots, m\}$ on fait correspondre

INDICE D'UN CHAMP

la variété $Y(S)$, si $Y(S)$ n'est pas vide et \emptyset dans le cas contraire. La strate ouverte $X(S)$, correspondant à la partie S , est $Y(S) - \bigcup_{T \in S} Y(T)$ si $Y(S) \neq \emptyset$ et \emptyset dans le cas contraire. A la partie \emptyset correspond la strate $X(\emptyset) = X - \bigcup_S Y(S)$. Les strates $X(S)$ sont des variétés lisses ouvertes non connexes en général.

Une structure de Clemens, complexe ou réelle sur une variété X du type précédent est un triple (M, u, X) d'une variété lisse réelle M et d'une application continue $u : M \rightarrow X$ satisfaisant à la condition suivante :

Pour toute strate ouverte, non vide, $X(S)$ de X le triple $(u^{-1}(X(S)), u|_{u^{-1}(X(S))}, X(S))$ est un espace fibré localement trivial de classe C dont la fibre type est un tore réel T^s de dimension $s = \text{Cardinal de } S$, dans le cas de la structure de Clemens complexes et un ensemble discret de cardinal 2^s (c'est à dire un "tore" $(S^0)^s$) dans le cas de la structure de Clemens réelle. M est appelé l'espace de la structure de Clemens et X sa base.

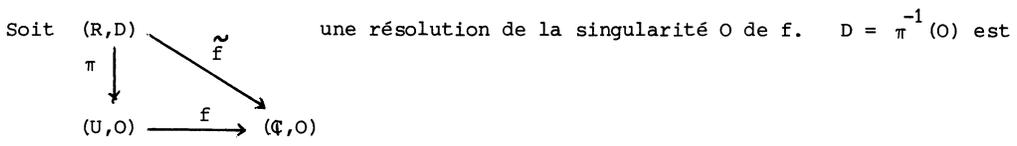
La proposition suivante est amusante et sa démonstration (facile!) est laissée au lecteur.

Proposition 1 : Si (M, u, X) est une structure de Clemens réelle

$$E(M) = \Sigma \{ E(Y(S)) \mid Y(S) \text{ strate fermée, card}(S) \text{ impair} \}$$

Le théorème suivant décrit la structure topologique des bords des fibres singulières locales. Nous l'énoncerons dans le cas complexes et nous nous contenterons de donner des indications sur les modifications à y apporter dans le cas réel.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur un voisinage ouvert U de 0 dans \mathbb{C}^n ayant 0 comme singularité isolée.



la réunion d'un nombre fini de sous variétés projectives de codimension 1 D_1, \dots, D_m . $\pi^{-1}(0) = D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_m$ où D_0 est la sous variété de codimension 1 de R , clôture, dans R , de la sous variété $f^{-1}(0) - D$ de $R - D$. D_0, D_1, \dots, D_r sont en position géné-

rale. Si X désigne l'intersection $D_0 \cap D$ et Y_j l'intersection $D_0 \cap D_j$ pour $j = 1, 2, \dots, m$ alors X est une variété projective réunion des variétés projectives lisses Y_1, \dots, Y_m et les Y_1, \dots, Y_m sont en position générale. X est stratifié de la manière explicite plus haut.

THÉOREME 5 : Si $f : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est une fonction holomorphe définie dans le voisinage U de 0 dans \mathbb{C}^n ayant en 0 une singularité isolée et si M est l'intersection de $f^{-1}(0)$ avec une sphère S_a^{n-1} de centre 0 et de rayon a assez petit, M est une variété analytique réelle lisse (d'après Milnor [29]) et il existe une structure de Clemens complexe (M, u, X) sur M de base X et de projection u .

Dans le cas où la fonction f est réelle et 0 est algébriquement isolée on a un résultat analogue : une structure de Clemens réelle (M, u, X) remplaçant la structure de Clemens complexe. La base X de la structure s'obtient comme suit : on complexifie la fonction f . Après résolution des singularités on obtient un $X_{\mathbb{C}}$ comme précédemment. La conjugaison canonique σ laisse l'espace R de la résolution, le diviseur exceptionnel D et $\tilde{f}^{-1}(0)$ invariants. Donc $X_{\mathbb{C}}$ sera invariant par σ . On prendra pour X l'ensemble des points fixés de σ sur $X_{\mathbb{C}}$.

(2) ESSAI DE JUSTIFICATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

THÉOREME 1 : Soit $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$ le champ de vecteurs polynomial sur \mathbb{R}^n ayant 0 comme singularité algébriquement isolée et soit i l'indice de 0 . Désignons par Q la R -algèbre finie $R[[X_1, \dots, X_n]] / \text{idéel } (f_1, \dots, f_n)$. D'après Eisenbud-Levine [9], si I est un élément maximal de l'ensemble des idéaux de Q dont le carré est nul,

$$|i| = \dim_{\mathbb{R}} Q - 2 \dim_{\mathbb{R}} I.$$

Il faut donc estimer $\dim_{\mathbb{R}} Q$ et $\dim_{\mathbb{R}} I$ dans le cas où les composantes de \vec{f} sont homogènes de même degré $d-1$.

Dans ce cas l'idéal engendré par f_1, \dots, f_n est homogène et donc Q est une algèbre graduée $Q = \bigoplus_{j=0}^{\infty} Q_j$. La partie b) du corollaire du lemme 1 montre que :

INDICE D'UN CHAMP

1) $Q_j = 0$ si $j > n(d-2)$,

2) $\dim_{\mathbb{R}} Q_j = \dim_{\mathbb{R}} Q_{m-j}$ pour tout $j = 0, 1, \dots, m$ où on pose $m = n(d-2)$ pour simplifier,

3) $\dim_{\mathbb{R}} Q_{\frac{m}{2}} = \Pi_n(d)$ (si m est impair $\Pi_n(d) = 0$ et $Q_{\frac{m}{2}} = \{0\}$)

Soit alors J l'espace $\bigoplus_{j > \frac{m}{2}} Q_j$. Il est immédiat que J est un idéal de carré nul. Un tel idéal est contenu dans un idéal I maximal parmi ceux de carré nul. Donc $\dim_{\mathbb{R}} I \geq \dim_{\mathbb{R}} J$. Il résulte de là et de la formule d'Eisenbud-Levine que :

$$|i| \leq \dim_{\mathbb{R}} Q - 2 \dim_{\mathbb{R}} J = \dim_{\mathbb{R}} Q - \sum_{j \neq \frac{m}{2}} \dim Q_j$$

d'après 2) plus haut.

De cette inégalité et de 3), il résulte que

$$|i| \leq \dim Q_{\frac{m}{2}} = \Pi_n(d).$$

Pour démontrer les assertions 1-2-3 sur Q , remarquons d'abord que $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ est un anneau régulier. O étant algébriquement isolé, l'idéal engendré par les f_1, \dots, f_n est de détermination. Comme il est engendré par n éléments et $n =$ la hauteur de l'idéal maximal de $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$, les f_1, \dots, f_n forment une $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ -suite maximale ([28] appendice 6 théorème 2).

Plaçons nous alors dans le cadre suivant, un peu plus général que nos besoins actuels, mais utile plus tard. Soit A un anneau local noetherien gradué, dont le radical est l'ensemble des éléments de degré positif. Mais on n'exige pas qu'il soit engendré par les éléments de degré 1. En particulier, A_0 l'ensemble des éléments homogènes de degré 0 est un corps. Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ un système de paramètres qui soient homogènes et qui forment une A -suite. On peut former le complexe de Koszul $K(A, u_1, \dots, u_n)$ associé à la suite u_1, \dots, u_n . Il est acyclique en degrés ≥ 1 et $H_0(K(A, u_1, \dots, u_n)) = A/\text{idéal}(u_1, \dots, u_n)$. On peut énoncer le lemme

Lemme 1 : a) Il existe une unique graduation sur $K = K(A, u_1, \dots, u_n)$, qui fait de chaque terme de K , un A -module gradué et telle que :

1) Sur $K_0 = A$ la graduation coïncide avec la graduation donnée sur A ,

I. KUPKA

2) la différentielle de K est homogène de degré 0.

b) Cette graduation ne dépend pas de la A -suite u_1, \dots, u_n mais seulement des degrés des éléments u_1, \dots, u_n ;

c) L'anneau quotient $Q = H_0(K) = A/\text{idéal}(u_1, \dots, u_n)$ est gradué $Q = \bigoplus_j Q_j$ et

$$\dim_{A_0} Q_j = \sum_{s=0}^n (-1)^s \dim_{A_0} K_{s,j}$$

où $K_{s,j}$ est la composante homogène de degré j du terme K_s de K .

En particulier $\dim_{A_0} Q_j$ ne dépend pas de la suite u_1, \dots, u_n mais seulement des degrés des u_1, \dots, u_n .

Preuve : La preuve est à peu près triviale. La preuve de l'unicité de la graduation est laissée au lecteur car nous n'en aurons pas besoin. L'existence de cette graduation se voit comme suit : $K(A, u_1, \dots, u_n) = \bigotimes_{j=1}^n K(A, u_j)$ où $K(A, u_j)$ est un complexe à 2 termes $K_0(A, u_j) = A$ et $K_1(A, u_j) = A$ et la différentielle est $d : K_1(A, u_j) \rightarrow K_0(A, u_j)$, $a \rightarrow au_j$. Sur $K_0(A, u_j)$ on met la graduation induite par A , sur $K_1(A, u_j)$ on met la graduation décalée par $-\delta_j$ de la graduation de A , δ_j étant le degré de u_j . Cette graduation sur $K_0(A, u_j)$ satisfait à toutes les conditions de a. Sur le produit tensoriel sur A , $\bigotimes_{j=1}^n K(A, u_j)$ on met la graduation produit tensoriel. Celle-ci vérifie toutes les conditions de a), b) est une conséquence immédiate de cette construction. Quand à c) , il résulte de a), de l'acyclicité en dimensions ≥ 1 du complexe de Koszul et des propriétés bien connues de la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Ce lemme a plusieurs corollaires. Mentionnons en un qui nous est utile. Soit k un corps , f_1, \dots, f_n n polynomes de $k[X_1, \dots, X_n]$ tels que 0 soit une singularité algébriquement isolée du morphisme $f : k^n \rightarrow k^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ et que f_1, \dots, f_n soit quasi homogènes de degrés $\delta_1, \dots, \delta_n$ pour un système de poids de la forme $(\frac{1}{q_1}, \dots, \frac{1}{q_n})$ q_1, \dots, q_n entiers ≥ 1 . On gradue alors $A = k[X_1, \dots, X_n]$ de la manière suivante de g $X_j = \frac{q_j}{q}$ $q = q_1 \dots q_n$. Les f_1, \dots, f_n sont alors homogènes de degrés $\delta_1 q, \dots, \delta_n q$ respectivement et d'après l'hypothèse sur f , ils forment un système de paramètres de A . Le théorème de Macaulay montre qu'ils forment aussi une A -suite.

INDICE D'UN CHAMP

Corollaire : a) L'algèbre quotient $Q = A/\text{idéal}(f_1, \dots, f_n)$ est graduée $Q = \bigoplus_s Q_s$.

Si on fait l'hypothèse simplificatrice que $\delta_j q_j$ est entier pour tout j , $1 \leq j \leq n$ alors

$$\dim_k Q_s = \#\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, 0 \leq \alpha_j \leq \delta_j q_j, \sum_{j=1}^n \alpha_j / q_j = s/q \}$$

b) Dans le cas particulier où $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 1$,

$$Q_s = \{0\} \quad \text{si } s > \sum_{j=1}^n \delta_j - n = m$$

$$\dim_k Q_s = \dim_k Q_{m-s}, \quad \text{et si } m \text{ est pair}$$

$$\dim_k Q_{\frac{m}{2}} = \{ \alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, 0 \leq \alpha_j \leq \delta_j - 1 = \sum_{j=1}^n \alpha_j = \frac{m}{2} \}$$

Preuve : En appliquant le lemme 1, on voit qu'on peut remplacer f_1, \dots, f_n par une autre suite g_1, \dots, g_n ayant les mêmes propriétés. Prenons $g_j = x_j^{\delta_j q_j}$. Si

$Q' = A/\text{idéal}(g_1, \dots, g_n)$, Q' est graduée $Q' = \bigoplus_s Q'_s$ et $\dim_k Q_s = \dim_k Q'_s$ pour tout s (ici $A_0 = k$). Or il est trivial de voir qu'une base de Q' comme espace k-

vectoriel est formée de tous les monomes X^α tels que $0 \leq \alpha_j \leq \delta_j q_j - 1$ pour tout $j = 1, \dots, n$. Comme ces monomes sont homogènes on obtient le résultat a). b) est

à peu près trivial. Pour voir que $\dim_k Q_s = \dim_k Q_{m-s}$, il suffit de remarquer que l'application $X^\alpha \rightarrow X^{\tilde{\alpha}}$ où $\tilde{\alpha}_j = \delta_j - 1 - \alpha_j$ pour tout $j = 1, \dots, n$ induit une bijection $Q_s \rightarrow Q_{m-s}$.

Passons maintenant à des résultats plus géométriques.

THÉOREME 2 : Soit S_ϵ^{n-1} une sphère de centre 0 et de rayon ϵ assez petit pour être transverse à $f^{-1}(0)$ et ne contenir que la singularité 0 de f . $S_\epsilon^{n-1} = \hat{V}_+ \cup \hat{V}_-$ où $\hat{V}_+ = \{x \mid x \in S_\epsilon^{n-1}, f(x) \geq 0\}$ et $\hat{V}_- = \{x \mid x \in S_\epsilon^{n-1}, f(x) \leq 0\}$. Si on désigne par $v : S_\epsilon^{n-1} \rightarrow S_\epsilon^{n-1}$ l'application $v(x) = \frac{\epsilon \text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$, l'indice en 0 du gradient de f est le degré de l'application v , S_ϵ^{n-1} étant convenablement orientée.

Pour calculer le degré de v , il suffit de remarquer que $1 + (-1)^{n-1} \text{deg } v = \text{Lef}(v)$ où $\text{Lef}(v)$ est le nombre de Lefschetz de v . Il nous faut donc étudier les points fixés de v . Si $x \in S_\epsilon^{n-1}$ est un tel point, alors (Euler)

$$f(x) = \langle \text{grad } f(x), x \rangle = \epsilon \|x\|^2 \|\text{grad } f(x)\| > 0. \quad \text{Donc tous les points fixés de } v$$

appartiennent à l'intérieur de \widehat{V}_+ . On va montrer que $\text{Lef}(v) = E(\widehat{V}_+)$. Pour cela, on va déformer v en une application de \widehat{V}_+ en \widehat{V}_+ . Considérons la famille à un paramètre bien connue $v_t : \widehat{V}_+ \rightarrow S_\varepsilon^{n-1}$, $0 \leq t \leq 1$, $v_t(x) = \varepsilon \frac{(1-t)x + tv(x)}{\|(1-t)x + tv(x)\|}$. Elle est bien définie car si elle ne l'était pas, il y aurait un $x \in \widehat{V}_+$ tel que $v(x) = -x$. Mais alors (Euler) $f(x) = \langle \text{grad } f(x), x \rangle = -\varepsilon \|x\|^2 \text{grad } f(x) < 0$. x serait dans l'intérieur de \widehat{V}_- ce qui contredit $x \in \widehat{V}_+$.

Il existe un $t_0 > 0$ tel que si $0 \leq t \leq t_0$, $v_t(\widehat{V}_+) \subset \widehat{V}_+$. Admettons ceci pour un instant. L'expression de v_t montre que v_t et $v = v_1$ ont les mêmes points fixés pour tout t . Comme $v_1 = v$, et que l'indice d'un point fixe est invariant par déformation, les indices de v et v_t aux points fixes sont les mêmes. Comme tous les points fixes de v et donc de v_t sont contenus dans \widehat{V}_+ , la somme des indices des points fixes de v_t est égale au nombre de Lefschetz de v_t considérée comme application de \widehat{V}_+ en lui-même, ceci pour $0 \leq t \leq t_0$. Comme $v_0 = \text{Id}$, ce nombre est $E(\widehat{V}_+)$. Par conséquent $\text{deg } v = (-1)^n (1 - \text{Lef}(v)) = (-1)^n (1 - \text{Lef}(v_t)) = (-1)^n (1 - E(\widehat{V}_+))$.

Pour voir l'existence de t_0 , remarquons d'abord que \widehat{V}_+ est une variété compacte à bord, de bord l'intersection $\widehat{Z} = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{n-1}$. Désignons pour tout $x \in \widehat{Z}$, par $\nu(x)$ le vecteur normal unitaire à \widehat{Z} pointant dans l'intérieur de \widehat{V}_+ et tangent à S_ε^{n-1} . Comme $f^{-1}(0)$ est transverse à S_ε^{n-1} , pour tout $x \in \widehat{Z}$, $\text{grad } f(x)$ n'est pas normal à S_ε^{n-1} et sa projection sur $T_x(S_\varepsilon^{n-1})$ est $\lambda \nu(x)$ où λ est un scalaire positif puisque f est positif sur \widehat{V}_+ . Donc $\langle \text{grad } f(x), \nu(x) \rangle > 0$ pour tout $x \in \widehat{Z}$. Il résulte de là que $\langle v_t(x), \nu(x) \rangle > 0$ pour tout $x \in \widehat{Z}$ et tout $t \in [0, 1]$. Comme v_0 est l'identité, pour tout $x \in \widehat{Z}$, $\langle v_t(x) - v_0(x), \nu(x) \rangle > 0$. Il résulte de là que, pour t assez petit, $v_t(\widehat{Z}) \subset \widehat{V}_+$. L'existence de t_0 s'ensuit puisque pour t petit, v_t est voisin de v_0 .

En considérant l'application $w : S_\varepsilon^{n-1} \rightarrow S_\varepsilon^{n-1}$, $w(x) = -v(x)$, un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait montre que les points fixes de w sont tous contenus dans l'intérieur de \widehat{V}_- et que $\text{deg } w = (-1)^n (1 - E(\widehat{V}_-))$. De plus, vu la relation entre v et w , $\text{deg } w = (-1)^n \text{deg } v$.

Puisque $S_\varepsilon^{n-1} = \widehat{V}_+ \cup \widehat{V}_-$, $\widehat{Z} = \widehat{V}_+ \cap \widehat{V}_-$, $E(\widehat{V}_+) + E(\widehat{V}_-) = E(\widehat{Z}) + E(S_\varepsilon^{n-1})$. Soit alors i l'indice du gradient de f en O . Si n est pair, $\text{deg } v = \text{deg } w$ et $i = \text{deg } v =$

$= \deg w = \frac{1}{2}(\deg v + \deg w) = 1 - \frac{1}{2} E(\hat{Z})$, puisque $E(S_{\epsilon}^{n-1}) = 0$. Si n est impair puisque la dimension de \hat{Z} est $n-2$ elle est impaire, $E(\hat{Z}) = 0$, $E(S_{\epsilon}^{n-1}) = 2$. Donc $E(\hat{V}_{+}) + E(\hat{V}_{-}) = Z$. Dans ce cas $\deg w = -\deg v$. $i = \frac{1}{2}(\deg v - \deg w) = \frac{1}{2}(E(\hat{V}_{+}) - E(\hat{V}_{-}))$.

Si $\pi : S_{\epsilon}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}R(n-1)$ est la projection canonique, $\pi^{-1}(Z) = \hat{Z}$. \hat{Z} est un revêtement à deux feuillets de Z et donc $E(\hat{Z}) = 2 E(Z)$. Donc si n est pair, $i = 1 - E(Z)$. Si n est impair, mais d pair, $\pi^{-1}(V_{+}) = \hat{V}_{+}$, $\pi^{-1}(V_{-}) = \hat{V}_{-} \cdot V_{+}$ (resp. \hat{V}_{-}) est donc un revêtement à deux feuillets de V_{+} (resp. V_{-}) : $E(\hat{V}_{\pm}) = 2 E(V_{\pm})$ et $i = E(V_{+}) - E(V_{-})$.

Passons maintenant à la preuve du théorème 3.

THÉORÈME 3 : Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique définie dans un voisinage ouvert U de 0 dans \mathbb{R}^2 , ayant en 0 une singularité algébriquement isolée. Dans le cas très particulier où f est un polynôme homogène, le théorème 3 est une conséquence immédiate du théorème 2. Dans le cas général, on peut donner une preuve géométrique très élémentaire du théorème 3. Nous allons en donner une preuve qui sera plus semblable à celle utilisée pour démontrer le théorème 2.

On peut supposer que 0 est la seule singularité de f dans U et que U est un disque de centre 0 . Si $U^* = U - \{0\}$, on définit une application analytique $v : U^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la manière suivante $v(x) = \frac{\|x\| i}{\|\text{grad } f(x)\|} \text{grad } f(x)$. v transforme tout cercle S de centre 0 contenu dans U en lui-même. On peut donc définir le degré, $\deg(v, S)$, et le nombre de Lefschetz, $\text{Lef}(v, S)$, de la restriction de v à S . Comme précédemment $\deg(v, S) = 1 - \text{Lef}(v, S)$. Si i est l'indice du gradient de f en 0 , $i = \deg(v, S)$ pour tout S . Pour calculer i , il suffit d'évaluer $\text{Lef}(v, S)$ pour un S convenable.

Remarquons d'abord que les points fixés de $v|_S$ ne sont autres que les extremas z de la restriction de f à S où $\langle \text{grad } f(z), z \rangle > 0$ ($\langle \rangle =$ produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^2). Supposons alors qu'on puisse choisir des cercles $S \subset U$ de centre 0 et de rayon arbitrairement petit tels que les extremas de $f|_S$ soient non dégénérés et que S coupe $f^{-1}(0)$ transversalement. Les points fixés de $v|_S$ sont alors non dégénérés et l'indice d'un tel point est -1 ou $+1$ suivant qu'il est un minimum ou un maximum

de $f|S$. Donc $\text{Lef}(v, S) = -(m_+ - M_+)$ où m_+ (resp. M_+) est le nombre de minimas (resp. maximas) z tels que $\langle \text{grad } f(z), z \rangle > 0$. On a $i = 1 + m_+ - M_+$.

Si on prend des cercles S satisfaisant aux deux conditions du paragraphe précédent et de rayon assez petit, alors tous les points de $f^{-1}(0) \cap S$ seront situés sur des branches passant par O . Si $a \in f^{-1}(0) \cap S$, $f|S$ change de signe en a car, dans le cas contraire, comme $f^{-1}(0)$ est transverse à S , la branche de $f^{-1}(0)$ passant par a serait multiple et O ne serait pas une singularité isolée. L'ensemble $f^{-1}(0) \cap S$ contient un nombre pair de points qu'on numérotera dans un ordre cyclique sur S , a_1, a_2, \dots, a_{2k} de telle manière que $f|S$ est > 0 (resp. < 0) sur l'arc $a_j a_{j+1}$ si j est impair (resp. pair). Si z est un extremum de $f|S$, et si $f(z) > 0$ (resp. < 0) alors $f > f(z)$ du côté de la courbe de niveau $f = f(z)$ qui ne rencontre pas l'intérieur du cercle S au voisinage de z (resp. qui rencontre l'intérieur du cercle au voisinage de z). En conséquence $\langle \text{grad } f(z), z \rangle > 0$ si et seulement si $f(z) > 0$.

Donc m_+ (resp. M_+) est le nombre de minimas (resp. maximas) situé sur les arcs $a_j a_{j+1}$ avec j impair. Sur un arc $\widehat{a_j a_{j+1}}$: nombre des minimas de $f|_{\widehat{a_j a_{j+1}}}$ - nombre des maximas de $f|_{\widehat{a_j a_{j+1}}} = - \text{signe de } f|_{\widehat{a_j a_{j+1}}}$. Il résulte de là que $m_+ - M_+ = -k$ et donc $i = 1 - k$. Mais chaque branche de $f^{-1}(0)$ passant par O rencontre S en deux points. Donc k est le nombre de branches de $f^{-1}(0)$ passant par O .

Si E est l'ensemble des points à coordonnées entières situés sur le polygone de Newton de f et m son cardinal, E divise le polygone de Newton en $m-1$ segments compacts et deux demi-droites. A chaque segment compact correspond au plus une branche réelle passant par O . Donc $k-1 \leq m-2$. Mais $m-2$ est exactement le nombre de points à coordonnées entières situés dans l'intérieur de la partie compacte du polygone de Newton.

Pour achever la démonstration, il faut encore montrer qu'on peut choisir des cercles S de centre O et de rayon arbitrairement petit tels que les extremas de $f|S$ soient non dégénérés et que $f^{-1}(0)$ soit transverse à S . Comme O est algébriquement isolé en faisant un changement linéaire de coordonnées préalable, on peut supposer ~~*~~ éventuellement vide (alors $k = 0$ et le raisonnement fait plus bas s'applique)

que le germe en 0 de la complexifiée de la fonction $g : (x, y) \rightarrow -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}$ n'a pas de facteur multiple s'annulant en 0. En restreignant U au besoin on pourra supposer que la courbe $g^{-1}(0)$ n'a pas de branche multiple dans U et la fibre singulière $f^{-1}(0)$ non plus. De plus on pourra, en diminuant U au besoin, supposer que $g^{-1}(0)$ n'a pas de composante qui soit un cercle centré à l'origine contenu dans U. Un point $z \in U$ sera un point fixé dégénéré de $v|S$ où S est le cercle de centre O passant par Z si et seulement si il appartient à l'ensemble $\Sigma = \{p \mid p \in U, \frac{\partial f}{\partial \theta}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(p) = 0, \frac{\partial f}{\partial r}(p) > 0\}$, où (r, θ) sont les coordonnées polaires en O. Si Σ n'est pas discret ; d'après le lemme de l'arc (voir lemme 2.5 [28]), Σ contiendrait un arc analytique C. Comme C ne peut pas être un arc de cercle centré en O, $C \subset g^{-1}(0)$ et g est singulière le long de C (noter que $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{g}{x^2 + y^2}$). Ceci contredirait les choix faits plus haut. D'après Milnor tout cercle assez petit centré en 0 est transverse à $f^{-1}(0)$. Comme Σ est discret, ceci achève la démonstration.

Corollaire du théorème 4 : Soit (r, r) le point du polygone de Newton de f situé sur la bissectrice principale et soit E_+ (resp. E_-) l'ensemble des points à coordonnées entières situés dans l'intérieur de la partie compacte du polygone de Newton et au dessus (resp. au dessous) de la bissectrice principale. La projection de E_+ (resp. E_-) sur l'axe des x (resp. des y) est injective et son image est situé dans l'ensemble des points $\{(i, 0) \mid 0 < i \leq r\}$ (resp. $\{0, i\} \mid 0 < i \leq r\}$). Donc $m-2 = \text{card } E_+ + \text{card } E_- \leq 2r$.

Les monômes $x^i y^j$ tels que $0 \leq i, j \leq r-1$ sont certainement linéairement indépendants modulo l'idéal engendré par $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Ces monômes sont en nombre plus grand ou égal à $|r|^2$ où $|r|$ est la partie entière de r. Le corollaire résulte de là et de l'inégalité $m-1 \leq 2r$.

Passons maintenant aux relations entre les indices et les nombres de Hodge.

THÉORÈME 4 : Dans son travail [24], Steenbrink a mis une structure de Hodge mixte sur la variété de niveau locale de f, variété qui coïncide essentiellement avec la variété qu'il désigne par B_∞ dans le travail cité. Il démontre dans le paragraphe 3.12 loco citato que cette structure de Hodge coïncide avec la structure de Hodge

mixte canonique sur l'hypersurface affine lisse $V = \{Z \mid Z \in \mathbb{C}^n \text{ f}(Z) = 1\}$ qui est la fibre générique de f . Cette structure est décrite à son tour dans le théorème 1 du travail de Steenbrink [23] comme suit.

D'après Milnor, V n'a de l'homologie qu'en dimension $n-1$. On définit une application linéaire $\tilde{\varphi}$ de l'algèbre des polynomes $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ dans $H^{n-1}(V, \mathbb{C})$ de la manière suivante : si P est un polynome homogène de degré q

$$\tilde{\varphi}(P) = \text{res} \left(\frac{P}{(f-1)^{u(q)}} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \right)$$

où $u(q)$ est la partie entière de $-\frac{q+n}{d}$ (rappelons que d est le degré du polynome homogène f) et l'application résidu, res , de l'espace $\Omega^n(\mathbb{C}^n - V)$ des formes homomorphes de degré n sur $\mathbb{C}^n - V$ dans $H^{n-1}(V; \mathbb{C})$ est classique (voir par exemple le travail de Griffiths [10]). Griffiths démontre que $\tilde{\varphi}$ passe au quotient Q de $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ par l'idéal engendré par $\frac{\partial f}{\partial Z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial Z_n}$ et cette application $\varphi : Q \rightarrow H^{n-1}(V; \mathbb{C})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Dans la filtration par poids W de $H^{n-1}(V; \mathbb{C})$, le gradué associé $gr^W H^{n-1}(V; \mathbb{C})$ n'a que deux niveaux $n-1$ et n : $gr_j^W H^{n-1}(V; \mathbb{C}) = 0$ si $j \neq n-1, n$. Si $gr_p^F gr_{p+q}^W H^{n-1}(V; \mathbb{C})$ désigne la partie homogène de degré $(p, p+q)$ du bigradué associé aux filtrations par poids W et de Hodge F de $H^{n-1}(V; \mathbb{C})$ alors, toujours d'après Steenbrink :

$$(I) \quad gr_p^F gr_{p+q}^W H^{n-1}(V; \mathbb{C}) = \begin{cases} \bigoplus_{pd-n < r < (p+1)d-n} \varphi(Q_r) & \text{si } p+q = n-1 \\ \varphi(Q_{pd-n}) & \text{si } p+q = n \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

où Q_r est la partie homogène de degré r de l'algèbre graduée

$$Q = \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n] / \text{idéal} \left(\frac{\partial f}{\partial Z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial Z_n} \right).$$

Pour calculer les nombres de Hodge $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} gr_p^F gr_{p+q}^W H^{n-1}(V; \mathbb{C})$, il suffit donc de calculer les dimensions des Q_r . Ceci est possible grâce au lemme 1 et son corollaire qui nous disent que $\dim_{\mathbb{C}} Q_r$ ne dépend pas de f mais seulement de son degré d . Pour déterminer $\dim_{\mathbb{C}} Q_r$, il suffit de prendre un polynome commode à savoir

$\sum_{j=1}^n x_j^d$. Dans ce cas $\dim_{\mathbb{C}} Q_r = \{ \alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n \ 0 \leq \alpha_j \leq d-2 \ \sum_{j=1}^n \alpha_j = r \}$. On en déduit :

$$h^{p,q} = \begin{cases} \# \{ \alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n \ 0 \leq \alpha_j \leq d-2 \ \text{pd} < |\alpha|+n < (p+1)d \} & \text{si } p+q=n-1 \\ \# \{ \alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n \ 0 \leq \alpha_j \leq d-2 \ \ |\alpha|+n = \text{pd} \} & \text{si } p+q = n \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

En particulier si n est pair , on peut prendre $p = q = \frac{n}{2}$.

$$h^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} = \{ \alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n \ 0 \leq \alpha_j \leq d-2 \ |\alpha| = \frac{n(d-2)}{2} \} = \{ \beta \mid \beta \in \mathbb{N}^n \ 1 \leq \beta_j \leq d-1, \ |\beta| = \frac{nd}{2} \}$$

$$h^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} = \Pi_n(d).$$

Si n est impair on se ramène au cas n pair par l'artifice suivant : on ajoute une variable à f et on considère le polynome $g(Z_0, \dots, Z_n) = Z_0^2 + f(Z_1, \dots, Z_n)$. g n'est plus homogène mais quasi homogène de poids $(\frac{1}{2}, \frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d})$. Les résultats de Steenbrink s'appliquent à ce cas et donnent

$$h^{p,q} = \begin{cases} \Sigma \{ \dim_{\mathbb{C}} Q_r \mid p < \frac{r}{2d^n} + \frac{n}{d} + \frac{1}{2} < p+1 \} & \text{si } p+q = n \\ \dim_{\mathbb{C}} Q_a \quad a=2pd^n-d^n-2nd^{n-1} & \text{si } p+q = n+1 \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Rappelons ici que les Z_0, Z_1, \dots, Z_n ont été affectés des degrés $d^n, 2d^{n-1}, \dots, 2d^{n-1}$ respectivement, dans le lemme 1 et son corollaire. En particulier si n est impair on peut prendre $p = q = \frac{n+1}{2}$ et le corollaire du lemme 1 montre que (ici $\delta_j = 1 - \frac{1}{d}$ si $j \geq 1$ $\delta_0 = \frac{1}{2}$) :

$$h^{\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}} = \# \{ \alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \ \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \ \alpha_0 = 0, \ 0 \leq \alpha_j \leq d-1 \ \text{si } j \geq 1, \ |\alpha| + n = d(p - \frac{1}{2}) \}$$

$$h^{\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}} = \Pi_n(d).$$

Nous pouvons maintenant passer à la conjecture d'Arnold et donner quelques explications là dessus. On utilisera les notations de la preuve du théorème 4. L'action de la monodromie sur la cohomologie de V est particulièrement facile à déterminer du fait que f est homogène. Si $\gamma : \theta \in [0, 1] \rightarrow e^{2\pi i \theta} \in C^*$ est le lacet canonique de C^* . Par homogénéité, $f(e^{\frac{1}{d} Z}) = e^{2\pi i \theta} f(Z)$. La famille à un paramètre

$\theta \in [0, 1]$ de transformations $T_\theta : f^{-1}(1) \rightarrow f^{-1}(e^{2\pi i \theta})$, $Z \rightarrow e^{\frac{2\pi i \theta}{d}} Z$ est donc un relèvement de γ dans le fibré $(\mathbb{C} - f^{-1}(0), f, \mathbb{C}^n)$. $T_1 : f^{-1}(1) \rightarrow f^{-1}(1)$ induit un générateur de la monodromie $T_1^* : H^n(V, \mathbb{C}) \rightarrow H^n(V, \mathbb{C})$.

De la définition de l'application résidu dans Griffiths [10], il résulte sans peine que $T_1^* \circ \text{res} = \text{res} \circ \tau$ où τ est l'application sur les formes différentielles de $\mathbb{C}^n - V$ induite par le difféomorphisme $Z \rightarrow e^{\frac{2\pi i}{d}} Z$ de $\mathbb{C}^n - V$ en lui-même. Si

$P \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ est un polynôme homogène de degré q et $\omega_p = \frac{P}{(f-1)^u(q)} dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_n$ la forme holomorphe sur $\mathbb{C}^n - V$ associée alors il est trivial de voir que

$\tau \omega_p = e^{\frac{2\pi i(q+n)}{d}} \omega_p$. Il résulte de là que $T_1^* \psi(\omega_p) = e^{\frac{2\pi i(q+n)}{d}} \psi(\omega_p)$. Les formules (I) de la démonstration du théorème 4 montrent que l'espace vectoriel

$\text{gr}_p^F \text{gr}_{p+q}^W H^{n-1}(V, \mathbb{C})$ est stable par T_1^* et $T_1^* = e^{2\pi i p}$ Identité. En particulier si n est pair et si $\frac{n}{2} = q = \frac{n}{2}$, $\text{gr}_{\frac{n}{2}}^F \text{gr}_{\frac{n}{2}}^W H^{n-1}(V, \mathbb{C})$ est fixé ponctuellement par T_1^* .
Donc $h_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} = h_1$. Ceci prouve la conjecture 1 pour les polynômes homogènes et explique le pourquoi de la conjecture. On peut étendre, sans difficultés, la démonstration faite ci-dessus aux polynômes quasi homogènes.

Dans son article, Arnold mentionne des démonstrations des conjectures 1 et 2 dans d'autres cas d'ailleurs très partiels, il présente aussi plusieurs "ansätze" de démonstration de ces conjectures qui paraissent très intéressantes. Malheureusement faut de temps nous ne pourrons nous étendre là-dessus.

Structure de Clemens et théorème 5 : Nous nous bornerons à discuter le cas complexe Le cas réel s'en déduit, essentiellement en complexifiant et en prenant les points fixés de la conjugaison.

Arnold ne donne aucune indication sur la démonstration du théorème 5. La démonstration que nous allons esquisser utilise le théorème du h-cobordisme et n'est valable que si le nombre de variables n de f est supérieur ou égal à 4. Il est possible qu'une démonstration directe existe.

Soit donc $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un voisinage U de 0 dans \mathbb{C}^n ayant en 0 une singularité isolée. Comme on l'a vu dans la partie (0), le théorème

de résolution des singularités nous dit qu'il existe un espace analytique R , un morphisme π de R sur U et une fonction holomorphe $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{C}$ tels que : 1) $\tilde{f} \circ \pi$, 2) $\pi^{-1}(0)$ est la réunion d'un nombre fini de variétés projectives lisses de codimension 1, D_1, D_2, \dots, D_r , 3) $\pi^{-1}(f^{-1}(0)) = \tilde{f}^{-1}(0) = D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_r$ où D_0 est une variété lisse de codimension 1. C'est la clôture de $\tilde{f}^{-1}(0) - \{0\} = \pi^{-1}(f^{-1}(0)) - \{0\}$ dans R . 4) Les variétés D_0, D_1, \dots, D_r sont en position générale.

5) L'espace D_0 muni du morphisme restriction de π à D_0 est une résolution des singularités de l'espace analytique réduit porté par $f^{-1}(0)$. Le diviseur exceptionnel C de cette résolution est la réunion $C_1 \cup C_2 \dots \cup C_r$ où C_j est la variété projective lisse intersection de D_0 et D_j .

6) π restreint à $R - \bigcup_{j=1}^r D_j$ est un isomorphisme de $R - \bigcup_{j=1}^r D_j$ sur $U - \{0\}$.

Une légère extension du théorème 4.1 de Clemens ([5]) affirme qu'il existe un voisinage W de $C = \bigcup_{j=1}^r C_j$ dans D_0 et une métrique riemannienne C^∞ sur W tels que :

1) $W = \bigcup_{j=1}^r W_j$, W_j est un ouvert de D_0 et porte une structure de voisinage tubulaire normal de C_j de projection C^∞ , $\pi_j : \bar{W}_j \rightarrow C_j$ où \bar{W}_j est la fermeture de W_j .

2) Pour tout ensemble $I \subset \{1, 2, \dots, r\}$ tel que $C_I = \bigcap_{j \in I} C_j \neq \emptyset$, l'ensemble ouvert $W_I = \bigcap_{j \in I} W_j$ porte une structure de voisinage tubulaire normal de la variété lisse C_I de projection C^∞ $\pi_I : \bar{W}_I \rightarrow C_I$, \bar{W}_I fermeture de W_I .

3) Si $J \subset I \subset \{1, 2, \dots, r\}$, $\pi_I \circ \pi_J = \pi_I$ sur \bar{W}_I .

4) Si $1 \leq j \leq r$ et si $\rho_j : W_j \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la fonction distance à C_j , alors pour tout (j, k) , $1 \leq j, k \leq r$, $j \neq k$, les variétés de niveau de ρ_j rencontrent celles de ρ_k orthogonalement.

Soit $\rho : W \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction $\rho(z) = \min \{\rho_j(z) \mid \text{tout } j \text{ tel que } z \in W_j\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, l'ensemble $W(\varepsilon) = \rho^{-1}([0, \varepsilon])$ est un voisinage ouvert de C . C'est une variété "à coins" (voir Douady [7]) dont le bord est la variété de niveau $T(\varepsilon) = \rho^{-1}(\varepsilon)$. Nous allons faire un lissage de ρ , $W(\varepsilon)$ et $T(\varepsilon)$. Pour cela, construisons un champ de vecteurs Z transverse à ρ . Ceci a un sens car ρ est C^∞ par morceaux. Soit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ positive sur $[0, +\infty[$ à support compact telle que : 1) $0 \leq |\alpha(t)| \leq |t|$ pour tout t ; 2) $\alpha(t) = t$ dans un voisinage

de 0. Pour tout j $1 \leq j \leq r$ désignons par $r_j : R \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction égale à $\alpha \circ \rho_j$ sur W_j et 0 à l'extérieur de W_j . Si on a choisi le support de α assez petit, toutes les fonctions r_j seront C^∞ sur $R - C_j$. On définit alors un champ Z sur R ainsi :

$$Z(x) = - \sum_{j=1}^r r_j(x) \text{ gradient } \rho_j(x).$$

Z est C^∞ et nul sur C . La condition 4 ci-dessus implique qu'il existe un $\epsilon_0 > 0$ tel que :

- 1) Pour tout ϵ $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et tout $t \geq 0$, $e^{tZ}(W(\epsilon)) \subset W(\epsilon)$.
- 2) Z est transverse aux fonctions ρ_j et donc à ρ sur $W(\epsilon_0)$.
- 3) Pour tout j , ρ_j décroît sur les trajectoires de Z dans $W(\epsilon_0)$.
- 4) Si en un $x \in W(\epsilon_0)$, $\rho_j(x) = \rho_k(x)$ pour un couple j, k alors $\rho_j = \rho_k$ sur toute la trajectoire de Z dans $W(\epsilon_0)$ passant par x . Ceci résulte de la condition 4) sur W ci-dessus.
- 5) Pour tout $x \in W(\epsilon_0)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tZ}(x)$ existe et appartient à C . Si $q : W(\epsilon_0) \rightarrow C$ désigne l'application $x \rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tZ}(x)$, alors pour tout sous ensemble $I \subset \{1, 2, \dots, r\}$ tel que $C_I = \bigcap_{j \in I} C_j \neq \emptyset$, la restriction $q|_{q^{-1}(C_I)} : C_I \rightarrow C_I$ est une immersion C^∞ .

En utilisant le fait que Z est transverse à ρ sur $W(\epsilon_0)$ on peut construire une fonction tapissante de ρ au sens de Thom [25], c'est à dire une fonction continue $\ell\rho : W(\epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}_+$, nulle sur C , C^∞ sur $W(\epsilon_0) - C$, et qui soit C^0 proche de ρ partout, C^∞ proche de ρ sauf au voisinage de l'ensemble de discontinuité de ρ , ensemble qui d'après la condition 4) sur Z est invariant par Z . Enfin Z sera transverse à $\ell\rho$ et $\ell\rho$ décroîtra sur les trajectoires de Z dans $W(\epsilon_0)$.

De cette construction, il résulte que si $\epsilon < \epsilon_0$, la variété lisse à bord $LW(\epsilon) = \ell\rho^{-1}([0, \epsilon[)$ sera un lissage de $W(\epsilon)$ (on "arrondit" les coins) et le bord $LT(\epsilon) = \ell\rho^{-1}(\epsilon)$ de $LW(\epsilon)$ sera un lissage du bord $T(\epsilon)$ de $W(\epsilon)$. Z sera transverse aux variétés $LT(\epsilon)$ pour tout ϵ , $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et pour tout $t > 0$ et tout ϵ , $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $e^{tZ}(LW(\epsilon)) \subset LW(\epsilon)$. Les trajectoires de Z permettent donc de définir deux retractions par déformation : l'une de $LW(\epsilon)$ sur C et l'autre de $LW(\epsilon) - C$ sur $LT(\epsilon)$ ceci pour tout ϵ , $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Il est maintenant facile de voir que la restriction de q à $LT(\epsilon)$ définit, pour tout ϵ , $0 < \epsilon < \epsilon_0$, une structure de Clemens sur $LT(\epsilon)$ de base C . Pour en

INDICE D'UN CHAMP

construire une sur le bord de la fibre singulière de f , il suffira de montrer que celui-ci est difféomorphe à $LT(\epsilon)$ pour un ϵ convenable. Soit $a > 0$ un nombre assez petit pour que :

- 1) la sphère $S(a) \subset \mathbb{C}^n$ de centre O et de rayon a , coupe $f^{-1}(0)$ transversalement ;
- 2) O est l'unique singularité de f dans la boule fermée $B(a)$ de centre O et de rayon a ;
- 3) La restriction à $f^{-1}(0) \cap B(a)$ de la fonction $d : x \in f^{-1}(0) \rightarrow \|x\|^2 \in \mathbb{R}$ n'a pas de point singulier autre que O . Si $M = f^{-1}(0) \cap S(a)$, pour démontrer le théorème 5 il suffit de démontrer que M et $LT(\epsilon)$ sont difféomorphes. Soient $N = \pi^{-1}(M)$, $V = \pi^{-1}(f^{-1}(0) \cap B(a))$, $V_0 = V - C = \pi^{-1}(f^{-1}(0) \cap B(a) - \{O\})$. π applique N et V_0 difféomorphiquement sur M et $(f^{-1}(0) \cap B(a) - \{O\})$. On va démontrer que N et $LT(\epsilon)$ sont difféomorphes.

Pour cela on choisit d'abord un ϵ , $0 < \epsilon < \epsilon_0$, assez petit pour que $LW(\epsilon) \subset$ intérieur V . Si $V(\epsilon) = V - LW(\epsilon)$, $V(\epsilon)$ est une variété lisse à bord réunion de N et de $LT(\epsilon)$. On va appliquer le théorème du h-cobordisme au triple $(V(\epsilon), N, LT(\epsilon))$ Pour cela il faut deux conditions :

- 1) $\dim_{\mathbb{R}} V(\epsilon) \geq 6$; cela implique que $n \geq 4$;
- 2) N , $LT(\epsilon)$ et $V(\epsilon)$ doivent être simplement connexes.

D'après Milnor ([29]), M et donc N sont simplement connexes. A cause de la condition 2) sur a , ci-dessus, les lignes de gradient de la fonction $\tilde{d} = d \circ \pi$ permettent de définir une rétraction par déformation de V_0 sur N . Donc V_0 est simplement connexe. Je dis que si on montre que $\overline{LW(\epsilon)} - C$ est simplement connexe alors $LT(\epsilon)$ et $V(\epsilon)$ sont simplement connexes. En effet, les trajectoires de Z permettent de définir une rétraction par déformation de $\overline{LW(\epsilon)} - C$ sur $LT(\epsilon)$. Donc $LT(\epsilon)$ est simplement connexe. Il est clair que $V(\epsilon)$ est connexe. Comme $V_0 = V(\epsilon) \cup (\overline{LW(\epsilon)} - C)$, $LT(\epsilon) = V(\epsilon) \cap (\overline{LW(\epsilon)} - C)$ et que V_0 , $LT(\epsilon)$ et $\overline{LW(\epsilon)} - C$ sont simplement connexes Van Kampen montre qu'il en est de même de $V(\epsilon)$.

Pour montrer que $\overline{LW(\epsilon)} - C$ est simplement connexe, il est d'abord clair qu'il est connexe. Soit G le champ-gradient $\frac{de}{dt} \tilde{d}$ sur V_0 , relèvement par π du champ-gradient de d sur $f^{-1}(0)$. Il existe un $t_0 > 0$ assez grand pour que $e^{t_0 G}(V_0) \subset$ Intérieur de $LW(\epsilon) - C$.

Ensuite il existe un $t_1 > 0$ assez grand pour que $e^{t_1 Z} (\overline{LW(\epsilon)} - C) \subset e^{t_0 G} (V_0)$. Prenons alors un point de base $z_0 \in e^{t_1 Z} (\overline{LW(\epsilon)} - C)$ et soit $\gamma : (S^1, 1) \rightarrow (\overline{LW(\epsilon)} - C, z_0)$ un lacet. Par une déformation le long des trajectoires de Z , on peut déformer γ en un lacet $\gamma_1 : (S^1, 1) \rightarrow (e^{t_1 Z} (\overline{LW(\epsilon)} - C), z_0)$ en laissant z_0 fixe. (S^1 est le cercle unité dans \mathbb{C}), γ et γ_1 ont même classe d'homotopie dans $\pi_1(\overline{LW(\epsilon)} - C, z_0)$. Puisque $\pi_1(V_0, z_0) = \{1\}$, γ_1 possède une extension $\tilde{\gamma}_1 : \Delta \rightarrow V_0$ où Δ est le disque unitaire de \mathbb{C} . En utilisant une déformation le long des trajectoires du champ G , on peut déformer $\tilde{\gamma}_1$ en une application $\tilde{\gamma}_2 : \Delta \rightarrow e^{t_0 G} (V_0)$ en laissant $\tilde{\gamma}_1|_{S^1}$ fixe. Donc $\tilde{\gamma}_2$ est une extension de γ_1 au disque Δ . Comme $\gamma_2(\Delta) \subset \overline{LW(\epsilon)} - C$, γ_1 et donc γ sont homotopes à zéro.

INDICE D'UN CHAMP

BIBLIOGRAPHIE

J'ai repris la bibliographie d'Arnol'd en ajoutant quelques références marquées d'un astérisque.

0. V.I. ARNOL'D "Index of a singular point..." *Funct. Analiz y ego prilozhenya* 12 (1) 1-14, 1978.
1. V.I. ARNOL'D, "Normal forms of functions in the neighborhood of degenerate critical points," *Usp. Mat. Nauk*, 29, N° 2, 11-49 (1974).
2. V.I. ARNOL'D, "Some unsolved problems of the theory of singularities. The theory of cubic formulas and the application of functional analysis to problems of mathematical physics," *Tr. Sem. S.L. Soboleva*, N° 1, Novosibirsk (1976)
3. V.I. ARNOL'D, "Modern development of the work of I. G. Petrovskii in the topology of real algebraic manifolds," *Usp. Mat. Nauk*, 32, N° 3, 215-216 (1977)
4. M.F. ATIYAH and I.M. SINGER, "The index of elliptic operators. III," *Usp. Mat. Nauk*, 26, N° 1, 127-182 (1969)
- 5* H. CLEMENS "Picard-Lefschetz theorems..." *Trans. A.M.S.*, 136, 93-108 (1969)
6. P. DELIGNE, "Poids dans la cohomologie des variétés algébriques," in : Proceedings of the International Congress of Math., Vol. I, Vancouver (1974), pp. 79-85.
- 7* A. DOUADY et L. HERAULT, Appendice à l'article de Borel-Serre "Corners and arithmetic groups", *Comm. Math. Helv.*, 48, 436-491 (1973)
8. F. EHLERS, "Eine Klasse Komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflösung einiger isolierten Singularitäten," *Math. Ann.*, 218, 127-156 (1975).
9. D. EISENBUD and H. LEVINE, "The topological degree of a finite C^∞ -map germ," *Ann. Math.*, 106, N° 1, 19-38 (1977).
- 10* Ph. GRIFFITHS, "Periods of Integrals" I.II, *Annals of Math.*, 90, fasc. 3, 460-495 (1969).
11. S.M. GUSEIN-ZADE, "Monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces," *Usp. Mat. Nauk*, 32, N° 2, 23-65 (1977).
12. A. HURWITZ, "Über Riemannsche Fläschen mit gegebenen Verzweigungspunkten," *Math. Ann.*, 39, 1-61 (1891).
13. V.M. KHARLAMOV, "A generalization of Petrovskii's inequality," *Funkts. Anal. Prilozhen.*, 8, N° 2, 5Q-56 (1974).
14. V.M. KHARLAMOV, "A generalization of Petrovskii's inequality. II," *Funkts. Anal. Prilozhen.*, 9, N° 3, 93-94 (1975).
15. G.N. KHMISHASHVILI, "On the local degree of a smooth map," *Soobshch. Akad. Nauk GruzSSR*, 85, N° 2, 309-311 (1977).
16. V. KLEE, "A combinatorial analog of Poincaré duality theorem," *Can. J. Math.*, 16, 517-531 (1964).
17. F. KLEIN, "Riemannsche Flächen (lit.) Vorlesungen, Vols. I, II, Göttingen (1892, new printing 1906).

I. KUPKA

18. A.G. KUCHNIRENKO, "Polyhedres de Newton et nombres de Milnor," *Invent. Math.*, 32, N° 1, 1-32 (1976).
19. I.G. PETROVSKII, "On the topology of real plane algebraic curves," *Ann. Math.*, 39, 187-209 (1938).
20. I.G. PETROVSKII and O. A. OLEINIK, "On the topology of real algebraic surfaces," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 13, 389-402 (1949).
21. G.A. REISNER, "Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings", Ph. D. Thesis, Minn. Univ. (1974).
22. R.P. STANLEY, "The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings," *Stud. Appl. Math.*, 54, N° 2, 135-142 (1975).
23. J.H.M. STEENBRINK, "Intersection form for quasihomogeneous singularities," *Composition Math.* 34, p. 211-223 (1977).
24. J.H.M. STEENBRINK, "Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology," "Real and complex singularities" Oslo 1976. P. Holm editor.
25. ^{*}R. THOM, "Ensembles et morphismes stratifiés", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75, fasc.2, 240-284 (1969).
26. A. N. VARCHENKO, "The characteristic polynomial of the monodromy and the Newton diagram," *Invent. Math.*, 37, 253-262 (1976).
27. ^{*}O. ZARISKI and P. SAMUEL, "Commutative algebra", Vol. 2, Van Nostrand.
28. ^{*}H. HIRONAKA, "Subanalytic sets", *Proc. Int. Conf. on Manifolds. Tokyo 1973.*
29. ^{*}J. MILNOR, "Singular points of complex hypersurfaces" *Annals of Math. Studies* Princ. Univ. Press.

I. Kupka

Département de Mathématiques

Université de Dijon

21000 DIJON