

Astérisque

NICOLE EL KAROUI

Sur les montées des semi-martingales

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 63-72

http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__63_0

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES MONTÉES DES SEMI-MARTINGALES

par Nicole El Karoui .

Parmi les nombreuses caractérisations ou approximations du temps local en zéro du mouvement brownien décrites dans [1], nous nous intéressons à la suivante :

Désignant par U_t^ε le nombre des montées du mouvement brownien au-dessus de l'intervalle $]0, \varepsilon[$, il est établi, à partir de la loi de ce processus, que $2\varepsilon U_t^\varepsilon$ converge p.s uniformément en t sur tout intervalle borné, vers le temps local en zéro.

Nous nous proposons d'étendre ce résultat aux semi-martingales continues, mais par une méthode complètement différente.

Plus précisément, nous montrons d'abord que si la martingale X appartient à $H^p(p \geq 1)$, $\varepsilon U_t^\varepsilon$ converge uniformément en t dans L^p vers le temps local en zéro $L^0(X)_t$.

Nous en déduisons que $\varepsilon U_t^\varepsilon$ converge en probabilité vers $L^0(X)_t$, uniformément en t sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

Nous prouvons ensuite, en particulier, que $\frac{1}{n} U_t^{1/n}$ converge p.s, uniformément en t sur tout compact, vers la même limite.

M. Yor a relu avec un soin exceptionnel les différentes versions de ce travail, et a contribué grandement aux résultats de la deuxième partie de cette étude. Qu'il en soit ici remercié.

1 Etude de la convergence dans L^p

Nous utilisons systématiquement les notations de l'introduction de ce volume (RPG) .

En particulier, X désigne une semi-martingale continue de décomposition canonique $X = X_0 + M + V$, où M est une martingale locale continue et V un processus à variation finie continu. Le temps local de X au point a est désigné par $L^a(X)_t$.

Décrivons les montées de X au dessus de l'intervalle $I =]a, b[$ de la manière habituelle, à l'aide de la suite double de temps d'arrêt définis par la récurrence suivante :

$$S^a = \inf\{t > 0, X_t \leq a\} \quad T_1^b = \inf\{t > S^a, X_t \geq b\}$$

$$S_n^a = \inf\{t > T_{n-1}^b, X_t \leq a\} \quad T_n^b = \inf\{t > S_n^a, X_t \geq b\}$$

en faisant la convention usuelle : $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

Une montée est alors un des intervalles stochastiques

$]S_n^a, T_n^b[= \{(\omega, t) ; t \in \mathbb{R}^+, S_n^a(\omega) < t \leq T_n^b(\omega)\}$, pour lequel T_n^b est fini ; le nombre de montées de X au-dessus de l'intervalle I , pendant le temps t , que nous désignons U_t^I , est égal à :

$$U_t^I = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n^b \leq t\}}$$

Nous introduisons encore quelques notations importantes pour la démonstration . L^I est le sous-ensemble prévisible de $\Omega \times \mathbb{R}^+$, défini par :

$$L^I = \bigcup_{n \geq 1}]S_n^a, T_n^b[= \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \exists n \text{ t.q. } S_n^a(\omega) < t \leq T_n^b(\omega)\}$$

C'est l'ensemble des couples (ω, t) qui appartiennent soit à une montée

$(T_n^b < +\infty)$, soit au "dernier passage" dans l'intervalle I . Les inclusions

suivantes résultent directement de la définition des temps d'arrêt S_n^a, T_n^b .

$$(1) \{(\omega, t) ; t > S^a \text{ et } X_t < a\} \subseteq L^I \subsetneq \{(\omega, t) ; t > S^a, \text{ et } X_t \leq b\}$$

Nous désignons par K^I l'ensemble optionnel $\bigcup_{n \geq 1} [S_n^a, T_n^b]$ qui est encadré de la même façon par :

$$(2) \{(\omega, t) ; t \geq S^a \text{ et } X_t \leq a\} \subseteq K^I \subsetneq \{(\omega, t) ; t \geq S^a \text{ et } X_t < b\}$$

Enfin, nous notons $|I|$ la longueur de l'intervalle I .

Remarque : Pour simplifier l'écriture, il nous arrivera par la suite, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, de ne pas distinguer les ensembles et leurs indicatrices.

La proposition suivante est à la base de cette étude.

Proposition 1

Soit X une semi-martingale continue de H^p ($p \geq 1$). Lorsque a croît vers b , le processus croissant $|I| \bigcup_t^I$ converge uniformément en t dans L^p vers $\frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$.

Remarque : Dans [3], Yor montre que $L^{-b}(-X)_t$ est aussi égal à la limite à gauche de $L^a(X)_t$ lorsque a tend vers b .

Démonstration

(a) L'idée de la démonstration est d'exprimer $|I| \bigcup_t^I$ à l'aide des processus $X_{t \wedge T_n^b} - X_{t \wedge S_n^a}$. L'égalité suivante en est alors le fondement :

$$(3) (b-a)1_{\{T_n^b \leq t\}} = X_{t \wedge T_n^b} - X_{t \wedge S_n^a} - 1_{\{S_n^a \leq t < T_n^b\}} (X_t - a), \text{ si } n \geq 2$$

En effet, X étant continue, $X_{T_n^b} = b$ sur l'ensemble $\{T_n^b < +\infty\}$

(resp $X_{S_n^a} = a$ sur l'ensemble $\{S_n^a < +\infty\}$) si $n \geq 2$.

Si $n=1$, l'écriture est un peu différente, car si $X_0 < a$, S^a est nul mais X_{S^a} est différent de a . Toutefois, on a encore :

$$\begin{aligned} (4) \quad (b-a)1_{\{T_1^b \leq t\}} &= (X_{T_1^b} - X_{S^a})1_{\{T_1^b \leq t\}} + (X_{S^a} - a)1_{\{T_1^b \leq t\}} \\ &= X_{T_1^b \wedge t} - X_{S^a \wedge t} - 1_{\{S^a \leq t < T_1^b\}}(X_t - a) + (X_{S^a} - a)1_{\{S^a \leq t\}} \end{aligned}$$

$$\text{Or} \quad (X_{S^a} - a)1_{\{S^a \leq t\}} = (X_0 - a)1_{\{X_0 < a\}} = -(X_0 - a)^-.$$

Sommons sur n les identités (3) et (4) après avoir remarqué que

$$\begin{aligned} X_{t \wedge T_n^b} - X_{t \wedge S_n^a} &= \int_0^t 1_{\prod_{n=1}^n S_n^a, T_n^b}(s) dX_s. \text{ Il vient aisément que :} \\ (5) \quad |I|U_t^I &= -(X_0 - a)^- + \int_0^t L^I(s) dX_s - K^I(t)(X_t - a) \end{aligned}$$

Nous allons étudier la limite du membre de droite de (5) lorsque a croît vers b

b) Notons tout de suite que $(X_0 - a)^-$ tend vers $(X_0 - b)^-$, la différence étant bornée par $(b-a)$.

Plus généralement, d'après les inclusions précisées en (2),

$$(a - X_t)^+ \leq K^I(t)(a - X_t) \leq (b - X_t)^+ \text{ pour tout } t \geq 0.$$

La différence $|K^I(t)(a - X_t) - (b - X_t)^+|$ est majorée par $(b-a)$ et converge uniformément en t p.s et dans L^P vers zéro.

c) Etudions la limite de l'intégrale stochastique.

Remarquons tout d'abord que les temps d'arrêt S^a décroissent vers un temps d'arrêt $\bar{S}^b = \inf\{t; X_t < b\}$. Pour montrer cela, notons $\mathcal{S}_b^a = \inf\{t; X_t < b\}$.

Alors, si $t < S^a$, pour tout $a < b$, $X_t \geq a$ et t est donc inférieur strictement à $\mathcal{S}_b^a$, ce qui entraîne que $\bar{S}^b \leq \mathcal{S}_b^a$.

Or pour tout $a < b$, $S^a \geq \mathcal{S}_b^a$, ce qui entraîne l'égalité de $\bar{S}^b$ et de $\mathcal{S}_b^a$.

D'autre part, l'ensemble $L^I(\{\omega, s; X_s(\omega) = b\})$ est la réunion des graphes de T_n^b , par définition même de L^I . C'est donc un ensemble à coupes dénombrables, dont l'intégrale stochastique par rapport à la semi-martingale

continue X est nulle.

L'ensemble $L^1_n\{(\omega, s) ; X_s(\omega) < b\}$ converge, d'après les inégalités (1), vers l'ensemble $\{(\omega, s) ; s > \bar{S}^b(\omega) ; X_s(\omega) < b\} = \{(\omega, s) ; s > 0, X_s(\omega) < b\}$, par définition de $\bar{S}^b$.

Comme X est un élément de H^p , l'intégrale stochastique $\int_0^t L^I(s) dX_s$ converge, uniformément en t , dans L^p vers $\int_0^t 1_{\{X_s < b\}} dX_s$.

En résumé, nous venons d'établir que $|I| \cup_t^I$ converge uniformément dans L^p vers un processus croissant égal à p.s à

$$(X_t - b)^- - (X_0 - b)^- + \int_0^t 1_{\{X_s < b\}} dX_s.$$

Cette dernière expression est égale, d'après la formule de Tanaka-Meyer (RPG) à $\frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$.

Remarque : En fait, l'étude précédente peut être considérée comme une autre démonstration de la formule de Tanaka-Meyer : en effet, si nous désignons par K_t la limite continue à droite de $|I| \cup_t^I$ (dans L^p), K_t est indistinguable de $(X_t - b)^- - (X_0 - b)^- + \int_0^t 1_{\{X_s < b\}} dX_s$.

C'est donc un processus croissant continu, limite uniforme en t dans L^p de processus croissants à support inclus dans l'ensemble $\{X_s = b\}$.

Son support est donc aussi inclus dans cet ensemble.

Corollaire 1.1

Soit X une semi-martingale continue de H^p ($p \geq 1$). Lorsque b décroît vers a , le processus croissant $|I| \cup_t^I$ converge uniformément en t dans L^p vers $\frac{1}{2} L^a(X)_t$.

Démonstration

Le nombre de descentes de X au-dessus de l'intervalle $]a, b[$ diffère au plus de 2 du nombre de montées de X au-dessus du même intervalle.

Or ce nombre de descentes est égal au nombre de montées de $-X$ au-dessus de l'intervalle $] -b, -a[$. Nous sommes ainsi ramenés à l'étude précédente.

Remarque : Les montées de X au-dessus de l'intervalle $]a, b[$ sont aussi les montées de $(X-a)^+$ au-dessus de l'intervalle $]0, b-a[$. Les processus $|I| \cup_t^I$ sont donc adaptés à la filtration engendrée par $(X-a)^+$, complétée, et il en est de même de leur limite lorsque b décroît vers a .

On retrouve ainsi une partie d'un résultat de [2] :

Les filtrations engendrées par $(X-a)^+$, $\int_0^t 1_{\{X_s > a\}} dX_s$,

$\int_0^t 1_{\{X_s \geq a\}} dX_s$ ont même P -complétées.

2 Etude de la convergence en probabilité et presque sûre.

Dans la première partie de ce travail, nous avons établi un résultat de convergence sous l'hypothèse : X est une semi-martingale de H^p .

Cette hypothèse est inutile si nous étudions la convergence en probabilité.

Proposition 2

Soit X une semi-martingale continue. $|I| \cup_t^I$ converge en probabilité, uniformément en t sur tout compact, vers $\frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$ (resp $\frac{1}{2} L^a(X)_t$) lorsque a croît vers b (resp b décroît vers a).

Démonstration

X étant une semi-martingale continue, il existe une suite de temps d'arrêt T_k , qui tend vers $+\infty$, tels que pour tout k , la semi-martingale arrêtée à T_k , X^{T_k} , appartienne à H_1 .

Pour tout $\alpha > 0$, $P(\sup_{t \leq n} |I| U_t^I - \frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t | > \alpha)$

$$\leq P(T_{k \leq n}) + P(\sup_t |I| U_{t \wedge T_k}^I - \frac{1}{2} L^{-b}(-X)_{t \wedge T_k} | > \alpha) .$$

Le processus de $U_{t \wedge T_k}^I$ représente le nombre de montées de X^{T_k} au-dessus de l'intervalle $]a, b[$, et $L^{-b}(-X)_{t \wedge T_k}$ est égal à $L^{-b}(-X^{T_k})_t$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que $P(T_{k_0 \leq n}) < \varepsilon$.

D'autre part, d'après la proposition 1, $P(\sup_t |I| U_{t \wedge T_{k_0}}^I - \frac{1}{2} L^{-b}(-X)_{t \wedge T_{k_0}} | > \alpha)$

tend vers zéro lorsque a croît vers b .

Par suite, $P(\sup_{t \leq n} |I| U_t^I - \frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t | > \alpha)$ a une limite, lorsque a croît vers b , qui est inférieure ou égale à ε , pour tout $\varepsilon > 0$.

La proposition est donc démontrée.

En fait, lorsque X est un mouvement brownien, il est établi dans [1], à l'aide d'un argument de surmartingale, très lié à la loi du mouvement brownien, que $|I| U_t^I$ converge p.s vers $\frac{1}{2} L^a(X)_t$, uniformément sur tout compact, lorsque b décroît vers a .

Nous allons établir ici un résultat moins précis.

Théorème 3

Soit X une semi-martingale continue.

Nous désignons par $U_t^{\alpha, b}$ (resp $U_t^{a, \alpha}$) le nombre des montées de X au-dessus de l'intervalle $]b - \alpha, b[$ (resp $]a, a + \alpha[$).

Pour toute suite α_n de réels strictement positifs tels qu'il existe $p \geq 1$ pour

lequel $\sum_n \alpha_n^p < +\infty$, les processus croissants $\alpha_n U_t^{\alpha_n, b}$ (resp. $\alpha_n U_t^{a, \alpha_n}$) convergent p.s uniformément en t sur tout compact vers $\frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$ (resp. $\frac{1}{2} L^a(X)_t$) lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration

Remarquons tout d'abord que l'on peut procéder par localisation, c.à.d que si T_k est une suite de t.a qui tend p.s vers $+\infty$, il suffit d'établir, que pour tout N et tout k ,

$$\sup_{t \leq N} \left| \alpha_n U_{t \wedge T_k}^{\alpha_n, b} - \frac{1}{2} L^{-b}(-X)_{t \wedge T_k} \right| \text{ converge p.s vers } 0 \text{ si } n \rightarrow +\infty.$$

Or X étant continu, il existe une suite T_k de temps d'arrêt tendant vers $+\infty$, telle que X^{T_k} appartienne à $H^p(p \geq 1)$, pour tout k .

Il suffit donc d'établir le théorème pour X^{T_k} si la serie $\sum_n \alpha_n^p$ converge.

Pour simplifier la suite de la démonstration, nous ne considérons que des semi-martingales continues X appartenant à $H^p(p \geq 1)$.

Or, nous avons vu au cours de la démonstration de la proposition 1 que les processus croissants $|I| U_t^I$ peuvent se décomposer en la somme de deux termes dont l'un converge p.s uniformément en t et dont l'autre, égal à $\int_0^t L^I(s) 1_{\{X_s < b\}} dX_s$, converge dans L^p vers $\int_0^t 1_{\{X_s < b\}} dX_s$.

Toutefois, si nous considérons la décomposition canonique de X en $X_0 + M + V$ où M est une martingale locale et V un processus à variation finie, continu, l'intégrale de Stieltjes converge p.s uniformément en t sur tout compact vers $\int_0^t 1_{\{X_s < b\}} dV_s^M$. Il reste à établir que $Y_t^n = \int_0^t (1 - L^{\alpha_n, b}(s)) 1_{\{X_s < b\}} dM_s$

converge p.s vers zéro où $L^{\alpha_n, b}$ désigne l'ensemble L^I associé à

$$I =]b - \alpha_n, b[.$$

Or, $(1 - L^{\alpha_n, b}(s)) 1_{\{X_s < b\}} \leq 1_{\{0 < b - X_s \leq \alpha_n\}}$,

et donc $E(\sup_t |Y_t^n|^{2p}) \leq C E[(\int_0^\infty 1_{\{0 < b - X_s \leq \alpha_n\}} d\langle M, M \rangle)^p]$

d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy.

Admettons pour le moment que cette dernière expression soit majorée par

$$K \alpha_n^p \|X\|_{HP}^p.$$

La série $E(\sup_t |Y_t^n|^{2p})$ est convergente, ce qui entraîne d'après le lemme de Borel-Cantelli que la suite $\sup_t |Y_t^n|$ converge p.s vers zéro.

La majoration admise ci-dessus a été établie en toute généralité et utilisée dans [3], pour démontrer la continuité en y des temps locaux L_t^y .

Nous en redonnons ici une démonstration "plus élémentaire", en ce sens qu'elle n'utilise que la formule de Tanaka-Meyer et la formule d'Ito, mais qui n'est guère plus courte.

Proposition 4

Soit X une semi-martingale continue.

$$E(\int_0^\infty 1_{\{a \leq X_s < b\}} d\langle X^C, X^C \rangle_s)^p \leq K (b-a)^p \|X\|_{HP}^p.$$

Démonstration

D'après la formule de Tanaka-Meyer,

$$(X_t - a)^+ - (X_t - b)^+ = (X_t \wedge b - a)^+ = (X_0 \wedge b - a)^+ + \int_0^t 1_{\{a \leq X_s < b\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a - \frac{1}{2} L_t^b$$

$$\begin{aligned} \text{et } [(X_t \wedge b - a)^+]^2 &= ((X_0 \wedge b - a)^+)^2 + 2 \int_0^t (X_s - a) 1_{\{a \leq X_s < b\}} dX_s - \frac{1}{2} (b-a) L_t^b \\ &\quad + \int_0^t 1_{\{a \leq X_s < b\}} d\langle X^C, X^C \rangle_s. \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{1}{2} L_t^b = (X_t - b)^+ - (X_0 - b)^+ - \int_0^t 1_{\{X_s > b\}} dX_s$$

et donc d'après les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

$$E((L_t^b)^p) \leq K \|X\|_{HP}^p.$$

De même $E(\sup_t |\int_0^t (X_s - a) 1_{\{a \leq X_s < b\}} dX_s|^p) \leq c(b-a)^p \|X\|_{H^p}^p$

car sur l'ensemble $a \leq X_s < b$, $(X_s - a)$ est majoré par $(b-a)$.

De plus $[(X_t \wedge b - a)^+]^2 \leq (b-a) |X_t - a|$ et donc $E[(X_t \wedge b - a)^+]^{2p} \leq (b-a)^p \|X\|_{H^p}^p$.

Toutes ces inégalités impliquent que :

$$E\left[\left(\int_0^\infty 1_{\{a \leq X_s < b\}} d\langle X^c, X^c \rangle_s\right)^p\right] \leq C (b-a)^p \|X\|_{H^p}^p.$$

Remarque : D'après le théorème 3, les processus croissants $\frac{1}{n} U_t^{1/n, b}$ convergent p.s uniformément sur tout compact vers $\frac{1}{2} L^{-b}(-X)_t$.

Il en est de même des processus $\frac{1}{n} U_t^{a, 1/n}$, qui convergent vers $\frac{1}{2} L^a(X)_t$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. ITO et H.P. Mc KEAN Diffusion processes and their sample paths
Springer-Verlag 1965
- [2] M. CHALEYAT-MAUREL Les filtrations de $|X|$ et X^+ lorsque X
et M. YOR est une semi-martingale continue.
(dans ce volume)
- [3] M. YOR Sur la continuité des temps locaux associés à
certaines martingales. (dans ce volume)