Astérisque

MARC YOR

Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 23-35
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__23_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 52-53 (1978) p.23-35

SUR LA CONTINUITÉ DES TEMPS LOCAUX ASSOCIÉS À CERTAINES SEMI-MARTINGALES

MARC YOR

INTRODUCTION

Pour démontrer la formule de Tanaka relative au mouvement brownien réel, H.P. Mc Kean [1] (pages 68-69) commence en fait par montrer l'existence d'une version bicontinue en (x,t) des temps locaux (L_t^x) du mouvement brownien, en utilisant un lemme classique de Kolmogorov.

On montre ici, à l'aide de ce lemme, et des inégalités de Burkholder - Davis - Gundy (en abrégé : B-D-G), que, si une semi-martingale X vérifie la condition :

pour tout t, $\sum_{0 < s \leq t} |\Delta X_s(\omega)| < \infty$, P ps (ce qui équivaut à : X est la somme d'une martingale locale continue et d'un processus adapté à variation bornée), on peut choisir une version conjointement continue à droite en x, et continue en t, des temps locaux (L_t^x) $(x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ associés à X, de façon générale, par P.A. Meyer [2] (chapitre VI).

De plus, une telle version - que l'on note encore (L_t^x) - admet des limites à gauche en tout point $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, telles que :

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y < x}; \substack{s \to t \\ s < t}} L_s^y = \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} L_t^y$$

(on note cette limite L_t^{x-} , et $\Delta_x L_t^x = L_t^x - L_t^{x-}$).

D'autre part, la semi-martingale continue $X - \sum_{0 < s \leq .} (\Delta X_s)$ se décompose de façon canonique en une somme $X_0 + M+V$, où M est une martingale locale continue, nulle en 0, et V un processus continu, adapté, à variation bornée. Utilisant cette notation, on montre la formule :

$$\Delta_x L_t^x = 2 \int_0^t 1_{(X_s=x)} dV_s .$$

$(L_t^x)(x \in \mathbf{R},\ t \in \mathbf{R}_+)$ est donc bicontinu en (x,t), si, et seulement si : p.s, pour tous $x \in \mathbf{R},\ t \in \mathbf{R}_+$, $\int_0^t 1_{(X_s=x)} dV_s = 0$.

(On retrouve bien le résultat connu pour le mouvement brownien, pour lequel $V \equiv 0$!).

On donne ensuite quelques applications de ces propriétés de continuité.

Enfin, je remercie vivement Y. Le Jan et M. Maurel de leurs remarques fructueuses sur une première version de ce travail.

0 - $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, vérifiant les conditions habituelles.

$\mathcal{O}$ (resp. : $\mathcal{P}$) est la tribu optionnelle (resp.: prévisible) sur $\Omega \times \mathbf{R}_+$, associée à $(\mathcal{F}_t)$.

$\mathcal{M}_{loc}$ (resp : $\mathcal{V}$) désigne l'ensemble des martingales locales, resp : des processus prévisibles A à variation bornée sur $[0,t]$, pour tout $t \geq 0$. Si A est un tel processus, on note $|A| = \int_0^{\cdot} |dA_s|$.

1 - Enonçons tout d'abord le lemme de Kolmogorov que nous utiliserons par la suite :

<u>Lemme</u>

<u>Soit</u> $(X_t^x,\ t \geq 0)_{x \in \mathbf{R}^d}$ <u>un ensemble de processus tel que, pour tout</u> $x \in \mathbf{R}^d$, $(X_t^x,\ t \geq 0)$ <u>soit p.s continu en</u> t.

Si, pour tout t, on a : $E\left[\sup_{s \leq t} |X_s^x - X_s^y|^p\right] \leq a_{t,p}\, |x-y|^{d+\varepsilon}$ pour un $p \geq 1$, $\varepsilon > 0$ et $a_{t,p}$ constante positive, il existe alors un processus $\tilde{X}_t(x,\omega)$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}$ mesurable, qui est sûrement (en ω) bicontinu en (t,x), et tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ X_t^x = \tilde{X}_t(x,.)\ P \text{ ps}$$

(on peut échanger les positions de "$\forall t \in \mathbb{R}_+$" et "P ps").

2 - Soit $X = X_0 + N + A$ ($N \in \mathcal{M}_{loc}$, $A \in \mathcal{V}$) une semi-martingale spéciale, fixée dans tout ce paragraphe, écrite avec sa décomposition canonique.

Rappelons (cf. RPG), que, pour $1 \leq p < \infty$, on note :

$$||X||^p_{H^p} = E\left[[N,N]_\infty^{p/2} + \left(\int_0^\infty |dA_s|\right)^p\right]$$

Rappelons aussi (cf. RPG) les formules suivantes, valables pour tout $a \in \mathbb{R}$, et $t \geq 0$:

$$(1) \qquad (X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1_{(X_{s-} > a)}\, dX_s + \frac{1}{2}\mathcal{L}_t^a$$

$$(2) \qquad \mathcal{L}_t^a = \ell_t^a + L_t^a$$

$$(3) \qquad \ell_t^a = 2 \sum_{0 < s \leq t} \{I_{(X_{s-} > a)}(X_s - a)^- + I_{(X_{s-} \leq a)}(X_s - a)^+\}$$

Si Z est une autre semi-martingale, et $a \in \mathbb{R}$, on note :

$$\hat{Z}_t^a = \int_0^t 1_{(X_{s-} > a)}\, dZ_s.$$

Le théorème suivant permettra d'appliquer le lemme de Kolmogorov à $((\widehat{X^c})_t^x,\ t \geq 0)_{x \in \mathbb{R}}$, où X^c désigne la partie martingale continue de X :

<u>Théorème 1</u> : <u>soit</u> $1 \leq k < \infty$.

<u>Il existe une constante</u> C_k, <u>ne dépendant que de</u> k, <u>telle que</u> $0 < C_k < \infty$, <u>et, pour tout</u> $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(4) \qquad \| \widehat{(X^c)}^b - \widehat{(X^c)}^a \|^2_{H^{2k}} \leq C_k \, |b-a| \, \|X\|_{H^k}$$

<u>Démonstration</u> : on peut évidemment supposer $b > a$.

La constante C_k qui intervient varie de place en place.

Posons $\gamma_{t,k}(a,b) = E\left[\left(\int_0^t 1_{(b \geq X_{s-} > a)} \, d\langle X^c, X^c\rangle_s\right)^k\right]$

D'après RPG, les temps locaux $(L_t^u, u \in \mathbb{R})$ sont "densité de temps d'occupation", et vérifient donc, en particulier :

$$\int_0^t 1_{(b \geq X_{s-} > a)} \, d\langle X^c, X^c\rangle_s = \int_a^b L_t^u \, du$$

D'après la formule (2), on a : $L_t^u \leq \mathcal{L}_t^u$, et donc :

$$\begin{aligned}
\gamma_{t,k}(a,b) &= E\left[\left(\int_a^b L_t^u \, du\right)^k\right] \\
&= (b-a)^k \, E\left[\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b L_t^u \, du\right)^k\right] \\
&\leq (b-a)^k \, E\left[\frac{1}{b-a} \int_a^b (L_t^u)^k \, du\right] \\
&\leq (b-a)^k \sup_{u \in [a,b]} E\left[(L_t^u)^k\right] \\
&\leq (b-a)^k \sup_{u \in [a,b]} E\left[(\mathcal{L}_t^u)^k\right]
\end{aligned}$$

A partir de la formule (1), écrite avec $a=u$, on obtient :

$$E\left[(\mathcal{L}_k^u)^k\right] \leq C_k \{ E\left[|X_t - X_0|^k\right] + E\left[\left|\int_0^t 1_{(X_{s-} > u)} \, dX_s\right|^k\right] \}$$

D'après les inégalités de B-D-G, on a donc :

$$E\left[(\mathcal{L}^u_t)^k\right] \leq C_k(E(|X_t - X_o|^k) + E\{[N,N]^{k/2}_t + |A|^k_t\})$$

et
$$E\left[|X_t - X_o|^k\right] \leq C_k(E\left[[N,N]_t^{k/2} + |A|^k_t\right])$$

On en déduit finalement, en rapprochant toutes ces inégalités :

$$\gamma_{t,k}(a,b) \leq C_k(b-a)^k \; ||X||^k_{H^k},$$

ce qui entraîne, en faisant tendre t vers $+\infty$, l'inégalité (4).

Corollaire

Soit $1 < k < \infty$, et X une semi-martingale qui appartient à H^k.

Il existe une version $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$ mesurable de $(a,t,\omega) \to (\widehat{X^c})^a_t(\omega)$ qui est partout bicontinue en (a,t).

Démonstration : D'après la formule (4), et les inégalités de B-D-G, on a :

$$E\left[\sup_s |(\widehat{X^c})^b_s - (\widehat{X^c})^a_s|^{2k}\right] \leq C_k |b-a|^k \; ||X||^k_{H^k}$$

et donc, d'après le lemme, il existe un processus $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ mesurable $Z(a,t,\omega)$, bicontinu en (a,t), tel que :
$\forall a$, $\forall t$, $Z(a,t,\omega) = (\widehat{X^c})^a_t(\omega)$ P ps. En particulier, $Z(a,.,.)$ est $(\mathcal{F}_t)$ adapté, et on a :

$$Z(a,t,\omega) = \lim_{(n \to \infty)} \sum_k Z(a, \frac{k}{2^n}, \omega) \; 1_{]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}(t)$$, et donc Z est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$ mesurable. ∎

Remarques :

1). Soit $1 \leq k < \infty$, et $b > a$.

Posons $\Delta_k(a,b) = E\left[\{\sum_{0<s} 1_{(b \geq X_{s^-} > a)} (\Delta N_s)^2\}^k\right]$

On peut montrer, avec la méthode employée pour démontrer le théorème 1, qu'il existe deux constantes c'_k et C'_k, ne dépendant que de k, et vérifiant : $0 < c'_k < C'_k < \infty$, ainsi que :

$$(5) \qquad c'_k \, \Delta_k(a,b) \leq \| \hat{N}^b - \hat{N}^a \|^{2k}_{H^{2k}} \leq C'_k \{\Delta_k(a,b) + (b-a)^k \, \|X\|^k_{H^k}\}$$

Ces inégalités n'étant pas utilisées par la suite, on a omis leur démonstration.

2). Si Z est une martingale localement de carré intégrable, telle qu'il existe une constante γ pour laquelle

$$d < Z,Z >_s \;\leq \gamma \, d < X^c,X^c >_s ,$$

une légère modification de la démonstration du théorème 1 permet d'obtenir l'inégalité :

$$\| \hat{Z}^b - \hat{Z}^a \|^2_{H^{2k}} \leq C_k \, \gamma |b-a| \, \|X\|_{H^k},$$

où C_k est la constante qui figure en (4).

3 - Enonçons maintenant le résultat principal de cette étude :

Théorème 2

Soit X une semi-martingale telle que :

$$\forall t, \quad \sum_{s \leq t} |\Delta X_s(\omega)| < \infty \qquad P \text{ ps.}$$

Notons M et V respectivement la martingale locale continue, nulle en 0, et le processus adapté, continu, à variation bornée, tels que

$$X - \sum_{0 < s \leq .} \Delta X_s = X_0 + M + V.$$

Alors,

(i) il existe une version $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{G}$ mesurable de $(a,t,\omega) \to \mathcal{L}^a_t(\omega)$, qui est partout bicontinue à droite en (a,t). De plus, si l'on note encore $\mathcal{L}$ cette version, presque sûrement, les limites

$$\mathcal{L}_{t-}^{x-} \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} \; \lim_{\substack{s < t \\ s \to t}} \mathcal{L}_s^y \quad \underline{\text{et}} \quad \mathcal{L}_t^{x-} \overset{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} \mathcal{L}_t^y \quad \underline{\text{existent}}.$$

ii) il existe une version $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$ mesurable de $(a,t,\omega) \to L_t^a(\omega)$, qui est partout (en ω) conjointement continue à droite en a et continue en t. De plus, si l'on note encore L cette version, presque sûrement, les limites L_{t-}^{x-} et L_t^{x-} (définies de façon analogue à celles relatives à $\mathcal{L}$) existent et sont égales.

iii) pour le calcul des limites $\mathcal{L}_{t-}^{x-}$ et L_{t-}^{x-}, on peut intervertir les limites, c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}_{t-}^{x-} = (\mathcal{L}^{x-})_{t-} = (\mathcal{L}_{t-})^{x-},$$

et de même pour L.

iv) les formules suivantes explicitent les sauts des processus $\mathcal{L}$ et L :

a). $\mathcal{L}_t^{x-} - \mathcal{L}_{t-}^{x-} = 2(I_{(X_{t-} \geq a)}(X_t-a)^- + I_{(X_{t-} < a)}\,(X_t-a)^+)$

b). $\mathcal{L}_t^{x} - \mathcal{L}_t^{x-} = 2 \int_0^t 1_{(X_{s-}=x)} dX_s$

$$= 2 \int_0^t 1_{(X_s=x)} dV_s + 2 \sum_{0 < s \leq t} 1_{(X_{s-}=x)}\, \Delta X_s$$

c). $L_t^x - L_t^{x-} = 2 \int_0^t 1_{(X_s=x)} dV_s$

Démonstration : remarquons tout d'abord que, si T_n est une suite de temps d'arrêt croissant vers $+\infty$, la définition des temps "locaux" $\mathcal{L}^x$ et L^x peut se faire par recollement successif (en t) des temps "locaux" des semi-martingales X^{T_n}.

En conséquence, il suffit de démontrer le théorème pour X^{T_n}, avec $T_n=n$. Dorénavant, on note encore X pour X^{T_n}. On a alors :

$$[X,X]_\infty < \infty, \; P \text{ ps.}$$

Soit P' une probabilité équivalente à P, telle que $E_{P'}[[X,X]_\infty] < \infty$. D'après le théorème de Girsanov, X est encore une semi-martingale sous P' ; elle est en outre spéciale, car $[X,X]_\infty \in L^1(P')$. D'après les formules (1), (2) et (3), et l'égalité des intégrales stochastiques $\int_0^\cdot 1_{(X_{s-} > a)} dX_s$, calculées relativement à P et P', il suffit de démontrer le théorème sous P' (au moins en ce qui concerne les assertions (i), (ii) et (iii)).

Si $X = X_0 + N' + A'$ est la décomposition canonique de X sous P', on peut supposer que le processus prévisible $|A'|_t = \int_0^t |dA'_s|$ est borné (car il est localement borné), et que $N' \in H^2$ (également par localisation).

Finalement, on peut donc supposer que $X \in H^2(P')$. Notons $\Sigma_t = \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)$. Ce processus est bien défini P (et donc P') ps. Ainsi, la semi-martingale $X - \Sigma$ est continue, et s'écrit donc comme la somme $X_0 + M' + V'$, où M' est la partie martingale locale continue de X sous P', et V' un processus prévisible continu à variation bornée.

D'après le corollaire du théorème 1, il existe une version $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$ mesurable de : $(x,t,\omega) \to \widehat{(M')}{}_t^x(\omega)$, qui est partout bicontinue en (x,t). On ne considère plus désormais que cette version.

D'après la formule (1), on peut alors écrire :

$$(6) \qquad (X_t - x)^+ = (X_0 - x)^+ + \widehat{(M')}{}_t^x(\omega) + \widehat{\Sigma}{}_t^x(\omega) + \widehat{V'}{}_t^x(\omega) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_t^x(\omega).$$

Or, les intégrales $\widehat{\Sigma}{}_t^x(\omega)$ et $\widehat{V'}{}_t^x(\omega)$ qui interviennent sont des intégrales de Stieltjes (en t). Les assertions (i) et (ii) découlent alors simplement du théorème de convergence dominée de Lebesgue, des formules (2) et (3), et de la continuité en t de L_t^x.

L'assertion (iii) est une simple propriété d'analyse élémentaire, découlant de l'existence des limites $\mathcal{L}_{t-}^{x-}$, $\mathcal{L}_t^{x-}$, et $\mathcal{L}_{t-}^x$ (et de même pour L). Il nous reste donc à montrer l'assertion (iv). Des formules (6) et (1), on déduit :

$$(X_t-x)^+ = (X_o=x)^+ + \int_o^t 1_{(X_{s-}\geq x)}\, dX_s + \frac{1}{2}\, \mathcal{L}_t^{x-} .$$

Cette égalité est valable sous P' et P, et on travaille maintenant à nouveau sous P.

On déduit de cette égalité :

$$(X_t-x)^+ - (X_{t-}-x)^+ = 1_{(X_{t-}\geq x)}\, \Delta X_t + \frac{1}{2}\, (\mathcal{L}_t^{x-} - \mathcal{L}_{t-}^{x-})$$

d'où l'égalité (a).

On en déduit également :

$$\mathcal{L}_t^x - \mathcal{L}_t^{x-} = 2\int_o^t 1_{(X_{s-}=x)} dX_s$$

$$= 2\int_o^t 1_{(X_{s-}=x)} dV_s + 2 \sum_{0<s\leq t} 1_{(X_{s-}=x)}\, \Delta X_s ,$$

car $\int_o^t 1_{(X_{s-}=x)} d\, X_s^c = 0$. On a montré (b).

Enfin, d'après les formules (2) et (3), on a :

$$\mathcal{L}_t^x - \mathcal{L}_t^{x-} = \ell_t^x - \ell_t^{x-} + (L_t^x - L_t^{x-})$$

$$= 2 \sum_{0<s\leq t} 1_{(X_{s-}=x)}\, \Delta X_s + (L_t^x - L_t^{x-}).$$

On déduit alors (c) de (b). ∎

<u>Remarques</u> : - Notons R_t la $(\mathcal{F}_t, P')$ martingale positive, continue à droite, telle que $\left.\frac{dP}{dP'}\right|_{\mathcal{F}_t} = R_t$.

D'après le théorème de Girsanov, on a alors :

$$M_t = M_t' - \int_o^t \frac{1}{R_s}\, d\langle R, M'\rangle_s$$

$$\left(\text{et } V_t = V_t' + \int_o^t \frac{1}{R_s}\, d\langle R, M'\rangle_s\right).$$

Le processus $<R,M'>$ est continu en t (car M' est continue), et $d<R,M'>_s$ ne charge pas $\{s|X_s=x\}$, car cet ensemble n'est pas chargé par $d<M',M'>_s >> d<R,M'>_s$.

Ainsi, de même que $\hat{M}'$, le processus : $(x,t,\omega) \to \hat{M}_t^x(\omega)$ admet une version bicontinue en (x,t).

En fait, on a montré, grâce au raisonnement précédent, que si X est une semi-martingale (ne vérifiant aucune condition supplémentaire), il existe une version bicontinue de $(x,t,\omega) \to \widehat{(X^c)}_t^x(\omega)$, améliorant ainsi l'énoncé du corollaire du théorème 1. ∎

On déduit immédiatement du théorème 2 (dont on utilise les notations) les conséquences suivantes :

<u>Corollaire 1</u>

<u>Si</u> X <u>est une semi-martingale telle que pour tout</u> t, $\sum_{0<s\leq t} |\Delta X_s| < \infty$ P ps, <u>le temps local</u> (L_t^x) <u>est continu en</u> $x=x_0$ <u>si, et seulement si</u> :

$$\int_0^\infty 1_{(X_s=x_0)} |dV_s| = 0.$$

De la formule (cf. RPG) où le temps local intervient comme densité de temps d'occupation, on déduit le :

<u>Corollaire 2</u>

<u>Si</u> X <u>est une semi-martingale telle que, pour tout</u> t, $\sum_{0<s\leq t} |\Delta X_s| < \infty$ <u>on a pour tout couple</u> (x,t)

$$L_t^x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{(x \leq X_s \leq x+\varepsilon)} \, d<X^c,X^c>_s, \text{ P ps},$$

<u>et</u>

$$L_t^{x-} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{(x-\varepsilon \leq X_s \leq x)} \, d<X^c,X^c>_s, \text{ P ps}.$$

Bien entendu, si l'on tient à obtenir une formule "symétrique autour de x", on a :

$$\frac{1}{2}(L_t^x + L_t^{x-}) = \lim_{(\varepsilon \to 0)} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{|X_s - x| \leq \varepsilon} \, d < X^c, X^c >_s, \text{ P ps.}$$

Du corollaire précédent, on déduit le :

Corollaire 3

Si X est un processus à variation bornée, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le temps local $(L_t^x, t \geq 0)$ est identiquement nul.

De plus, si V désigne la partie continue (en tant que processus à variation bornée) de X, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^\infty 1_{(X_s = x)} \, |dV_s| = 0.$$

Démonstration : appliquer le corollaire 2, après avoir remarqué que $X^c = 0$, et donc $< X^c, X^c > = 0$.

La fin du corollaire découle alors du corollaire 1, et de la continuité en x du temps local $L_t^x \equiv 0$!. □

Une conséquence du corollaire 3 est que, si X est un processus à variation bornée, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la différence de deux fonctions convexes, la formule d'Ito généralisée prend la forme simplifiée suivante :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_g(X_{s-}) dX_s + \sum_{0 < s \leq t} \left[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'_g(X_{s-}) \, \Delta X_s \right]$$

(ce résultat est en particulier vrai dans le cas où X est déterministe ; remarquer que ce cas "particulier" implique la formule générale, car l'intégrale qui figure dans la formule est une intégrale de Stieltjes !).

Voici un dernier corollaire du théorème 2 :

Corollaire 4

Soit X une semi-martingale telle que pour tout t, on ait :

$$\sum_{0 < s \leq t} |\Delta X_s| < \infty \text{ , P ps.}$$

Notons $(L_t^x, t \geq 0)$ le temps local de X en x, et $(\tilde{L}_t^x, t \geq 0)$ le temps

<u>local de</u> $|X|$ <u>en</u> x.

<u>On a alors</u> :

- si $x \geq 0$, $\tilde{L}_t^x = L_t^x + L_t^{(-x)-}$
- si $x < 0$, $\tilde{L}_t^x = 0$.

<u>Démonstration</u> : notons $\tilde{X} = |X|$.

Remarquons que $|\Delta\tilde{X}| \leq |\Delta X|$, et donc, pour tout t, on a :

$$\sum_{0<s\leq t} |\Delta\tilde{X}_s| < \infty \ P \text{ p.s.}$$

D'après la formule de Tanaka appliquée à $\tilde{X} = |X|$, on sait que $\tilde{X}$ est une semi-martingale telle que

$$<(\tilde{X})^c, (\tilde{X})^c> = <X^c, X^c>.$$

Appliquons le corollaire 2 à $\tilde{X}$; il vient :

- si $x < 0$, $\tilde{L}_t^x = 0$
- si $x \geq 0$,

$$\tilde{L}_t^x = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{(x \leq |X_s| \leq x+\varepsilon)}\, d<X^c,X^c>_s$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left\{\int_0^t 1_{(x\leq X_s \leq x+\varepsilon)} d<X^c,X^c>_s + \int_0^t 1_{(-x-\varepsilon \leq X_s \leq x)} d<X^c,X^c>_s\right\}$$

$= L_t^x + L_t^{(-x)-}$, d'après le corollaire 2. ∎

Remarquons, avec les notations du corollaire 4, que si $X=(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien issu de 0, le processus $\tilde{X}_t=|B_t|$ fournit un exemple de semi-martingale continue dont le temps local n'est pas bicontinu, mais seulement cadcontinu en (x,t).

En effet, le temps local L de X est bicontinu (d'après le corollaire 1 par exemple, mais c'est le théorème de Trotter !).

Du corollaire 4, on déduit donc $\tilde{L}^0 = 2\,L^0$, et $\tilde{L}^x=0$, si $x < 0$. L'application $(x,t) \to \tilde{L}_t^x(\omega)$ n'est donc pas continue au point $(0,t)$ (de façon générale, d'après le corollaire 4, il en est de même pour toute semi-martingale X, telle que $\sum_{0<s\leq t} |\Delta X_s| < \infty$ P ps, pour tout t, et $L^0 \neq 0$, car $\tilde{L}^0 \geq L^0$).

Ceci se comprend également très bien si l'on observe que la condition du corollaire 1 n'est évidemment pas satisfaite pour $|B|$, puisqu'alors $V=L^0$ est porté par $\{s \mid |B_s| = 0\}$.

4 - Rappelons pour terminer que la définition des temps locaux en (2), par P.A. Meyer, comporte une part d'arbitraire : en effet, Meyer a choisi d'utiliser dans la formule de Tanaka pour les fonctions f, différence de deux fonctions convexes, la dérivée à <u>gauche</u> de f.

Sur des exemples, nous allons montrer que :

- si l'on choisit de prendre la dérivée <u>à droite</u> de f, c'est le processus L_t^{x-} qui intervient (il est continu à gauche en x)
- si l'on choisit de prendre $\frac{1}{2}(f'_g+f'_d)$, c'est le processus $\bar{L}_t^x = \frac{1}{2}(L_t^x+L_t^{x-})$ qui intervient (il n'est continu ni à droite, ni à gauche, en x).

En effet, si pour simplifier, on suppose que X est une semi-martingale continue, on déduit aisément de la formule (c) du théorème 2 les formules :

$$(X_t-x)^+ = (X_0-x)^+ + \int_0^t 1_{(X_{s-} \geq x)} dX_s + \frac{1}{2} L_t^{x-} \tag{7}$$

$$|X_t-x| = |X_0-x| + \int_0^t \overline{\mathrm{sgn}}\,(X_{s-}-x) dX_s + \bar{L}_t^x, \tag{8}$$

(où $\overline{\mathrm{sgn}}(u) = +1$ si $u > 0$, 0 si $u=0$, -1 si $u < 0$). Si X n'est pas continue, mais vérifie $\sum_{0<s\leq t} |\Delta X_s| < \infty$ P ps, pour tout t, les formules (7) et (8) sont encore vraies à condition de remplacer L_t^{x-} par $\mathcal{L}_t^{x-}$ et $\bar{L}_t^x$ par $\bar{\mathcal{L}}_t^x = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_t^x + \mathcal{L}_t^{x-})$.

RÉFÉRENCES

(1) H.P. McKEAN : "Stochastic Integrals". Academic Press, 1969.

(2) P.A. MEYER : Un cours sur intégrales stochastiques. Séminaire de Proba. Strasbourg X. Lecture Notes Math. 511, Springer-Verlag, Berlin, 1976.