

Astérisque

CH. YOEURP

Compléments sur les temps locaux et les quasi-martingales

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 197-218

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__197_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__197_0)

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLÉMENTS SUR LES TEMPS LOCAUX ET LES QUASI-MARTINGALES

CH. YOEURP

INTRODUCTION

Dans la première partie de l'article, on examine le caractère dissymétrique (en a , paramètre spatial) des temps locaux $(L_t^a, t \in \mathbb{R}_+)_a \in \mathbb{R}$ associés à une semi-martingale $X = (X_t)$.

Ensuite, on étudie un deuxième type de temps locaux $(\mathcal{L}_t^a, t \in \mathbb{R}_+)_a \in \mathbb{R}$ (ainsi que leurs projections duales prévisibles $(\Lambda_t^a, t \in \mathbb{R}_+)_a \in \mathbb{R}$, si elles existent) associés à X , qui, malheureusement, ne possèdent pas de propriété de densité de temps d'occupation, mais par contre, vérifient la relation :

$$[X, X]_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_t^a da.$$

Enfin, on dégage, à l'aide des processus $(\mathcal{L}_t^a)_a \in \mathbb{R}$, une classe de fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, laissant stable l'ensemble des quasi-martingales. En particulier, on montre que X est une quasi-martingale si, et seulement si, X^+ et X^- sont des quasi-martingales.

Un appendice rassemble quelques résultats complémentaires, en particulier, on exhibe une classe de processus prévisibles $V = (V_t)$ tels que, si X est une quasi-martingale, l'intégrale stochastique $V.X$ en est encore une.

0 - NOTATIONS

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace probabilisé complet, muni d'une famille croissante $(\mathcal{F}_t)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, satisfaisant aux conditions habituelles.

D'une façon générale, nous adoptons le langage et les notations du cours de

P.A. Meyer (2) sur les intégrales stochastiques :

$\mathcal{L}$: ensemble des martingales locales

$\mathcal{S}$: ensemble des semi-martingales

$\mathcal{S}_p$: ensemble des semi-martingales spéciales

Mais, contrairement à (2), nous convenons que les intégrales stochastiques sont nulles en 0, ainsi que les crochets $[X, X]$ et $\langle X, X \rangle$.

1 - COMPLÉMENTS SUR LES TEMPS LOCAUX

Soit $X = (X_t) \in \mathcal{S}$, et $a \in \mathbb{R}$. En (2), P.A. Meyer a introduit comme suit les temps locaux $(L_t^a, t \in \mathbb{R}_+)$ $a \in \mathbb{R}$ associés à X : pour a fixé, L^a est un processus croissant, adapté, continu, nul en 0, vérifiant :

$$(1) \quad |X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \text{sig}(X_{s-} - a) dX_s \\ + 2 \sum_{0 < s \leq t} [(X_{s-} - a)^- 1_{\{X_{s-} > a\}} + (X_{s-} - a)^+ 1_{\{X_{s-} \leq a\}}] + L_t^a$$

avec la convention : $\text{sig}(0) = -1$.

Mireille Maurel a remarqué que si X est continue et positive ou nulle, le temps local L^0 n'est pas nul, en général. Cette remarque est à l'origine du résultat suivant :

Proposition 1

Soit $X = (X_t) \in \mathcal{S}$. On note (*) ici $(L_t^a(X), t \in \mathbb{R}_+)$ $a \in \mathbb{R}$ les temps locaux associés à X .

(*) Quand il n'y a pas de risque de confusion, on note tout simplement (L_t^a) au lieu de $(L_t^a(X))$.

Alors, on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$L_t^a(X) - L_t^{-a}(-X) = 2 \left[\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}} dX_s - \sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_{s-}=a\}} \Delta X_s \right]$$

En particulier, si X est une semi-martingale continue, de décomposition canonique $X=M+A(**)$, on a :

$$L_t^a(X) = L_t^{-a}(-X) + 2 \int_0^t 1_{\{X_s=a\}} dA_s$$

Ainsi, pour toute martingale locale continue $N=(N_t)$, on a :

$$L_t^a(N) = L_t^{-a}(-N)$$

Démonstration :

1). Réécrivons la formule (1)

$$\begin{aligned} (2) \quad |X_t - a| &= |X_0 - a| + \int_0^t 1_{\{X_{s-} > a\}} dX_s - \int_0^t 1_{\{X_{s-} \leq a\}} dX_s \\ &\quad + 2 \sum_{0 < s \leq t} [(X_{s-} - a)^- 1_{\{X_{s-} > a\}} + (X_{s-} - a)^+ 1_{\{X_{s-} \leq a\}}] + L_t^a(X) \end{aligned}$$

En remplaçant dans (2), X par $-X$, et a par $-a$, on obtient :

$$\begin{aligned} (3) \quad |X_t - a| &= |X_0 - a| - \int_0^t 1_{\{X_{s-} < a\}} dX_s + \int_0^t 1_{\{X_{s-} \geq a\}} dX_s \\ &\quad + 2 \sum_{0 < s \leq t} [(X_{s-} - a)^+ 1_{\{X_{s-} < a\}} + (X_{s-} - a)^- 1_{\{X_{s-} \geq a\}}] + L_t^{-a}(-X) \end{aligned}$$

On retranche membre à membre (2) et (3), et on trouve le résultat voulu,

en remarquant que : $(X_{s-} - a) 1_{\{X_{s-}=a\}} = \Delta X_s 1_{\{X_{s-}=a\}}$.

2). Si X est continue, on a :

$$\begin{aligned} L_t^a(X) - L_t^{-a}(-X) &= 2 \int_0^t 1_{\{X_s=a\}} dX_s \\ &= 2 \int_0^t 1_{\{X_s=a\}} dM_s + 2 \int_0^t 1_{\{X_s=a\}} dA_s. \end{aligned}$$

(**) Une semi-martingale continue est spéciale ; de plus, dans la décomposition canonique, M et A sont continus (voir RPG).

Ainsi, $\int_0^t 1_{\{X_s=a\}} dM_s$ est à la fois une martingale locale continue et à variation finie sur tout compact. Elle est donc nulle. D'où le résultat désiré. ■

Remarques :

1°). La proposition 1 nous donne aussi l'information suivante :

$\int_0^t 1_{\{X_{s-}=a\}} dX_s$ est un processus à variation finie sur tout compact.

2°). Dans la démonstration de la seconde partie de la proposition, on aurait également pu utiliser l'égalité (cf RPG) :

$$\int_0^t 1_{\{X_s=a\}} d\langle M, M \rangle_s = \int_{\{a\}} L_t^u du = 0$$

3°). Si la semi-martingale X vérifie $\sum_{0 < s \leq t} |\Delta X_s| < +\infty$, le processus $a \rightarrow L_t^a(X)$ admet une version continue à droite et limitée à gauche (cf (6)). On montre alors facilement que $L_t^{-a}(-X) = L_t^a(X)$. La première formule figurant dans la proposition 1 est donc identique à la formule (c) du théorème 2 de (6). ■

La proposition suivante donne une expression simple du temps local en 0, associé à une semi-martingale ayant un signe constant.

Proposition 2

1°). Si $X=(X_t)$ est une semi-martingale positive ou nulle, alors, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$L_t^0(X) = 2 \left[\int_0^t 1_{\{X_{s-}=0\}} dX_s - \sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_{s-}=0\}} \Delta X_s \right]$$

2°). Si $Y=(Y_t)$ est une semi-martingale négative ou nulle, alors, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $L_t^0(Y) = 0$.

Démonstration :

1°). X étant positive ou nulle, la formule (1) s'écrit, pour $a = 0$:

$$X_t = X_0 + \int_0^t 1_{\{X_{s-} > 0\}} dX_s - \int_0^t 1_{\{X_{s-}=0\}} dX_s + 2 \sum_{0 < s \leq t} X_s 1_{\{X_{s-}=0\}} + L_t^0(X)$$

Comme $\int_0^t 1_{\{X_{s-} > 0\}} dX_s = X_t - X_0 - \int_0^t 1_{\{X_{s-} = 0\}} dX_s$, on obtient la formule désirée.

2°). Y étant négative ou nulle, la formule (1) s'écrit, pour $a=0$:

$$-Y_t = -Y_0 - \int_0^t dY_s + L_t^0(Y).$$

$$\text{Donc, } L_t^0(Y) = 0 \quad \blacksquare$$

Soit $X = (X_t) \in \mathcal{F}$. On définit maintenant, pour a fixé, un second processus croissant $\mathcal{L}^a = (\mathcal{L}_t^a)$, au moyen des formules :

$$(4) \quad \mathcal{L}_t^a = \ell_t^a + L_t^a$$

$$(5) \quad \ell_t^a = 2 \sum_{0 < s \leq t} [(X_s - a)^- 1_{\{X_{s-} > a\}} + (X_s - a)^+ 1_{\{X_{s-} \leq a\}}]$$

L'introduction du processus $\mathcal{L}^a$ permet d'écrire la formule (1) sous la forme condensée suivante :

$$(1') \quad |X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \text{sig}(X_{s-} - a) dX_s + \mathcal{L}_t^a$$

Notons en passant que les trois processus ℓ^a , L^a et $\mathcal{L}^a$ sont croissants, et que L^a et ℓ^a sont respectivement la partie continue et la partie purement discontinue de $\mathcal{L}^a$.

La mesure aléatoire dL^a étant portée par l'ensemble $\{s/X_s = X_{s-} = a\} \setminus \{2\}$, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 3

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la mesure $d\mathcal{L}^a$ est portée par l'ensemble
 $\{s/X_s = X_{s-} = a\} \cup \{s/X_{s-} \leq a < X_s\} \cup \{s/X_s < a < X_{s-}\}.$

Remarque : Il existe des sauts de X , enjambant a , qui ne chargent pas la mesure $d\mathcal{L}^a$. C'est le cas des sauts tels que $X_s = a < X_{s-}$, $X_{s-} < a = X_s$, et $X_s < a = X_{s-}$. ■

En (5), M. Yor a montré que l'on peut choisir des versions de (L_t^a) , donc de $(\mathcal{L}_t^a)$, qui dépendent mesurablement du triplet (a, t, ω) . C'est toujours sur ces versions que nous travaillons dans la suite. La proposition suivante donne une relation liant $[X, X]$ et $(\mathcal{L}_t^a)$:

Proposition 4

Soit $X=(X_t) \in \mathcal{L}$. Alors, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$[X, X]_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_t^a da$$

Démonstration : on sait que ((2)), p. 368) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a da = \langle X^C, X^C \rangle_t$$

Il suffit donc de démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_t^a da = \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2$.

En appliquant le théorème de Fubini-Tonnelli, on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_t^a da = 2 \sum_{0 < s \leq t} \int_{-\infty}^{+\infty} [(X_s - a)^- 1_{\{X_{s-} > a\}} + (X_s - a)^+ 1_{\{X_{s-} \leq a\}}] da$$

Examinons séparément les cas où ΔX_s est positif ou nul (resp. négatif ou nul) :

a) $\Delta X_s \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [(X_s - a)^- 1_{\{X_{s-} > a\}} + (X_s - a)^+ 1_{\{X_{s-} \leq a\}}] da &= \int_{-\infty}^{X_{s-}} 0 + \int_{X_{s-}}^{X_s} (X_s - a) da + \int_{X_s}^{+\infty} 0 \\ &= \frac{1}{2} (\Delta X_s)^2 \end{aligned}$$

b) $\Delta X_s \leq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [(X_s - a)^- 1_{\{X_{s-} > a\}} + (X_s - a)^+ 1_{\{X_{s-} \leq a\}}] da = \int_{X_s}^{X_{s-}} (-X_s + a) da$$

D'où finalement : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_t^a da = \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2$. ■

2- TEMPS LOCAUX ET QUASI-MARTINGALES

Nous nous intéressons maintenant à la propriété d'intégrabilité de $\mathcal{L}^a(X)$, pour a fixé, lorsque X est une semi-martingale spéciale ou une quasi-martingale.

Rappelons que $X=(X_t)$ est une semi-martingale spéciale si X peut s'écrire (de manière unique) comme $X=M+A$, où $M=(M_t) \in \mathcal{L}$, et $A=(A_t)$ est un processus prévisible, nul en 0, à variation localement intégrable.

En ce qui concerne les quasi-martingales nous renvoyons à l'article de K.M. Rao (3), et surtout à celui de C. Stricker (4).

Définition 5

Soit $X=(X_t)$ un processus adapté continu à droite. On dit que X est une quasi-martingale si

$$\text{Var}(X) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} E(|X_{t_i} - E(X_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i})|) + E(|X_{t_n}|)$$

est fini, le sup étant pris sur l'ensemble des suites finies $0=t_0 < t_1 < \dots < t_n < +\infty$.

Rappelons encore la notion, utilisée dans la suite de l'article, de processus borné dans L^1 .

Définition 6 ((1)) et (4))

Soit $X=(X_t)$ un processus adapté continu à droite. On pose
 $||X||_1 = \sup_T E(|X_T|)$, T parcourant l'ensemble des temps d'arrêt finis.

On dit que X est borné dans L^1 si $||X||_1 < +\infty$.

En (1), N. Kazamaki a montré que, si $M=(M_t)$ est une martingale locale, alors, on a $||M||_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} E(|M_{T_n}|)$, pour toute suite de t.a. T_n croissant vers $+\infty$, P-p.s., réduisant M .

A la fin de l'article, en appendice, nous montrerons qu'une semi-martingale est spéciale si, et seulement si, elle est localement bornée dans L^1 .

Voici une caractérisation des quasi-martingales démontrée en (4) :

Théorème 7 ((4))

- 1°). Une semi-martingale $X=(X_t)$ est une quasi-martingale si, et seulement si, X peut s'écrire d'une manière canonique sous la forme : $X=M+A$ où $M=(M_t)$ est une martingale locale bornée dans L^1 , et $A=(A_t)$ est un processus prévisible, nul en 0, et à variation intégrable.
- 2°). Une martingale locale $M=(M_t)$ est une quasi-martingale si, et seulement si, M est bornée dans L^1 .

Il résulte de la première partie de ce théorème qu'une semi-martingale spéciale de décomposition canonique $X=M+A$ est une quasi-martingale si, et seulement si, X est bornée dans L^1 , et $E(\int_{-\infty}^{+\infty} |dA_s|) < +\infty$.

L'énoncé suivant permet de vérifier assez facilement si une semi-martingale est une quasi-martingale.

Corollaire 8

Soit $X=(X_t)$ une semi-martingale bornée dans L^1 admettant une décomposition (non canonique) $X=M+A$, avec A processus càdlàg, adapté, à variation intégrable.

Alors, X est une quasi-martingale.

Démonstration : A est à l'évidence une quasi-martingale. M est bornée dans L^1 ; c'est donc une quasi-martingale (théorème 7, 2°)). $X=M+A$ est donc une quasi-martingale (utiliser la définition 5).

On est maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer la proposition suivante :

Proposition 9

- 1°). Si $X=(X_t)$ est une semi-martingale spéciale, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^a = (\mathcal{L}_t^a)$ est un processus croissant localement intégrable.
- 2°). Si $X=(X_t)$ est une quasi-martingale, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^a = (\mathcal{L}_t^a)$ est un processus croissant intégrable (i.e. $E(\mathcal{L}_\infty^a) < +\infty$).

3°). Une martingale locale $M=(M_t)$ telle que $E(|M_0|) < +\infty$, est une quasi-martingale si, et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $E(\mathcal{L}_\infty^a(M)) < +\infty$.

Démonstration :

1°). Soit $X=M+A$ la décomposition canonique de X . La martingale locale M est localement dans $\mathcal{H}^1$, et A est à variation localement intégrable. On peut donc choisir une suite de t.a. $T_n \uparrow +\infty$ telle que $(M-M_0)^{T_n}$ soit dans $\mathcal{H}^1$, et que $E(\int_0^{T_n} |dA_s|) < \infty$. (Notons en passant que $X_0=M_0$ n'est pas nécessairement intégrable). Alors, il est immédiat que $(\int_0^{T_n} \wedge^{T_n} \text{sig}(X_{s-}-a)dM_s)$ est dans $\mathcal{H}^1$. D'après la formule (1'), on a :

$$\mathcal{L}_t^a = |X_t-a| - |X_0-a| - \int_0^t \text{sig}(X_{s-}-a)dM_s - \int_0^t \text{sig}(X_{s-}-a)dA_s$$

D'où :

$$E(\mathcal{L}_{T_n}^a) = E(|X_{T_n}-a| - |X_0-a|) - E(\int_0^{T_n} \text{sig}(X_{s-}-a)dA_s)$$

$$(6) \quad E(\mathcal{L}_{T_n}^a) \leq E(|X_{T_n}-X_0|) + E(\int_0^{T_n} |dA_s|) < +\infty$$

D'où le résultat désiré.

2°). Si X est une quasi-martingale, la relation (6) ci-dessus donne :

$$E(\mathcal{L}_{T_n}^a) \leq 2 \|X\|_1 + E(\int_0^{+\infty} |dA_s|) < +\infty$$

On en déduit que $E(\mathcal{L}_\infty^a) < +\infty$

3°). La condition est évidemment nécessaire, d'après 2°). Pour prouver la condition suffisante, il suffit de montrer que $\|M\|_1 < +\infty$, compte tenu du théorème 7, 2°). Soit $T_n \uparrow +\infty$ une suite de t.a. telle que M^{T_n} soit dans $\mathcal{H}^1$. La formule (1') s'écrit, pour tout t.a. T fini :

$$|M_{T \wedge T_n} - a| = |M_0 - a| + \int_0^{T \wedge T_n} \text{sig}(M_{s-}-a)dM_s + \mathcal{L}_{T \wedge T_n}^a(M)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } E(|M_{T \wedge T_n} - a|) &= E(|M_0 - a|) + E(\mathcal{L}_{T \wedge T_n}^a(M)) \\ &\leq E(|M_0 - a|) + E(\mathcal{L}_\infty^a(M)) < +\infty. \end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme de Fatou :

$$\sup_T E(|M_T - a|) \leq E(|M_0 - a|) + E(\mathcal{L}_\infty^a(M))$$

On en déduit que $\|M\|_1 < +\infty$. ■

Remarque : la proposition précédente entraîne des conséquences assez intéressantes pour les martingales locales :

$M=(M_t)$ étant une martingale locale, on note $\hat{M}_t = \int_0^t \text{sig}(M_{s-}) dM_s$.

1°. Si M est bornée dans L^1 (resp. uniformément intégrable), alors $\hat{M}$ l'est aussi.

2°. Si $\hat{M}$ est uniformément intégrable et M bornée dans L^1 , alors $\hat{M}$ est uniformément intégrable.

En effet, d'après la proposition 9, puisque M est bornée dans L^1 , $\mathcal{L}_\infty^0(M)$ est intégrable. Il suffit alors d'écrire la formule (1') pour $a=0$ et $X=M$:

$$|M_t| = |M_0| + \hat{M}_t + \mathcal{L}_t^0(M)$$

D'où le résultat désiré. ■

Nous obtenons par la suite une extension (*) de la seconde assertion de la proposition 9. Pour cela, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 10

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe (β) , si sa dérivée seconde, au sens des distributions, est une mesure μ bornée (i.e. $\int_{\mathbb{R}} |d\mu(x)| < +\infty$).

(*) Je remercie M. Yor d'avoir dégagé pour moi la classe de fonctions (β) permettant ainsi de généraliser les résultats précédents concernant la fonction valeur absolue. Il a aussi éclairci de nombreux points obscurs figurant dans une première rédaction.

Rappelons que, d'après (2) (voir aussi RPG), si $X=(X_t)$ est une semi-martingale, et f une fonction de classe (β) , on a les formules :

$$(7) \quad f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_g(X_{s-}) dX_s + \mathcal{L}_t^f$$

$$(8) \quad \mathcal{L}_t^f = \sum_{0 < s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'_g(X_{s-}) \Delta X_s] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^a \mu(da)$$

où f'_g désigne la dérivée à gauche de f .

Voici l'extension évoquée précédemment :

Proposition 11

Soient $X=(X_t)$ une quasi-martingale, et $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe (β) . Alors, on a :

$$E\left(\int_0^{+\infty} |d\mathcal{L}_s^f|\right) < +\infty.$$

Démonstration : si μ est la dérivée seconde de f au sens des distributions, d'après la théorie des distributions, il existe deux constantes réelles a et b telles que :

$$f(x) = ax + b + \int_0^x dy \left(\int_{]-\infty, y]} \mu(dz) \right)$$

On peut alors écrire $f=f_1-f_2$, avec f_1 et f_2 deux fonctions convexes de classe (β) (prendre, par exemple, $f_2(x) = \int_0^x dy \mu^-([-\infty, y])$).

Si f est une fonction convexe, le processus $\mathcal{L}^f$ est croissant. On est donc ramené à montrer que si f est une fonction convexe de classe (β) , alors $E(\mathcal{L}_\infty^f) < +\infty$.

Soit $X=M+A$ la décomposition canonique de X , et (T_n) une suite de t.a. croissant vers $+\infty$ telle que $(M-M_0)^{T_n} \in \mathcal{H}^1$.

f étant de classe (β) , on a $\|f'_g\|_\infty = \sup_x |f'_g(x)| < +\infty$. La formule (7) permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned}
E(\mathcal{L}_{T_n}^f) &= E(f(X_{T_n}) - f(X_0)) - E\left(\int_0^{T_n} f'_g(X_{s-}) dA_s\right) \\
&\leq E(|f(X_{T_n}) - f(X_0)|) + E\left(\int_0^{T_n} |f'_g(X_{s-})| |dA_s|\right) \\
&\leq \|f'_g\|_\infty [E(|X_{T_n} - X_0|) + E\left(\int_0^{+\infty} |dA_s|\right)] \\
&\leq \|f'_g\|_\infty [2\|X\|_1 + E\left(\int_0^{+\infty} |dA_s|\right)] < +\infty
\end{aligned}$$

D'où $E(\mathcal{L}_\infty^f) < +\infty$. ■

La proposition 11 permet d'obtenir le résultat de stabilité suivant pour les quasi-martingales :

Théorème 12

Si f est une fonction de classe (β) , et $X=(X_t)$ une quasi-martingale, alors $f(X)$ est une quasi-martingale.

Démonstration : soit $X=M+A$ la décomposition canonique de X . Réécrivons la formule (7) :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_g(X_{s-}) dM_s + \left(\int_0^t f'_g(X_{s-}) dA_s + \mathcal{L}_t^f\right)$$

Compte tenu de la proposition 11, le processus $\left(\int_0^t f'_g(X_{s-}) dA_s + \mathcal{L}_t^f\right)$ est à variation intégrable. Donc, d'après le corollaire 8, il nous reste à montrer que la semi-martingale $f(X)$ est bornée dans L^1 .

Or, il existe deux constantes réelles c et d telles que

$$|f(x)| \leq c|x| + d. \text{ Donc, } |f(X_t)| \leq c|X_t| + d, \text{ et } \|f(X)\|_1 \leq c\|X\|_1 + d. \blacksquare$$

Remarque : il résulte de la proposition 11 et du théorème 12 que si

$X=(X_t)$ est une quasi-martingale, et ϕ la primitive continue à gauche d'une mesure bornée (i.e. $\phi(y) = \mu(\mathbb{I}^{-\infty}, y\mathbb{I})$), alors $\left(\int_0^t \phi(X_{s-}) dX_s\right)$ est une quasi-martingale.

Nous verrons en appendice, une autre classe de processus prévisibles V jouant le rôle de $\phi(X_-)$, et possédant la même propriété. ■

Voici des conséquences importantes du théorème 12. Notons que, d'après la définition 5, il n'est pas du tout évident que la valeur absolue d'une quasi-martingale est encore une quasi-martingale.

Corollaire 13

Soit $X=(X_t)$ une semi-martingale.

Alors, X est une quasi-martingale si, et seulement si, X^+ et X^- sont des quasi-martingales. En particulier :

si $X=(X_t)$ est une quasi-martingale, alors $|X|$ est aussi une quasi-martingale.

Démonstration : les fonctions $x \rightarrow x^+$ et $x \rightarrow x^-$ sont de classe (β) . ■

Après ce corollaire, il est naturel de se poser la question :

si X est une semi-martingale telle que $|X|$ soit une quasi-martingale, X est-elle une quasi-martingale ? La réponse à cette question est, en toute généralité, négative (voir le contre-exemple qui suit le corollaire 14). Cependant, si l'on se restreint aux semi-martingales continues, la réponse est positive :

Corollaire 14

Soit $X=(X_t)$ une semi-martingale continue.

Alors, X est une quasi-martingale si, et seulement si, $|X|$ en est également une.

Démonstration : il nous reste à démontrer la condition suffisante. On suppose donc que $|X|$ est une quasi-martingale. Sa décomposition canonique est donnée par la formule (1) :

$$|X_t| = |X_0| + \int_0^t \text{sig}(X_s) dM_s + \left(\int_0^t \text{sig}(X_s) dA_s + L_t^0(X) \right),$$

où $X=M+A$ est la décomposition canonique de X . Donc, d'après le théorème 7, si

on pose $B_t = \int_0^t \text{sig}(X_s) dA_s + L_t^0(X)$, on a :

$$E\left(\int_0^{+\infty} |dB_s|\right) < +\infty.$$

D'autre part ((6), corollaire 4) : $L_t^0(X) \leq L_t^0(|X|)$.

Comme $E(L_\infty^0(|X|)) < +\infty$ (proposition 9, 2°), on a :

$$E\left(\int_0^{+\infty} |dA_s|\right) \leq E\left(\int_0^{+\infty} |dB_s|\right) + E(L_\infty^0(X)) < +\infty.$$

$|X|$ étant borné dans L^1 , X l'est aussi. Donc, X est une quasi-martingale (corollaire 8). ■

Voici maintenant le contre-exemple promis :

Contre-exemple : on va construire une fonction $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, à variation finie sur tout compact, mais à variation infinie sur $[0, +\infty]$, telle que $|A|$ soit à variation finie sur $[0, +\infty]$. Il suffit de prendre

$$A_t = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} 1_{[n, n+1[}(t). \text{ Alors, on a :}$$

$$|A_t| = 1_{[1, +\infty[}(t).$$

On voit facilement que $\text{var}(|A|) = 1$, alors que $\text{var}(A) = +\infty$. ■

3 - TEMPS LOCAUX ET DENSITÉS DE TEMPS D'OCCUPATION

Etudions maintenant un troisième type de temps locaux (Λ_t^a) définis comme suit : pour a fixé appartenant à $\mathbb{R}$, $\Lambda^a = (\Lambda_t^a)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est la projection duale prévisible de $\mathcal{L}^a$, si elle existe. Ici encore, M. Yor a montré en (5) que l'on peut choisir des versions de (Λ_t^a) dépendant mesurablement de (a, t, ω) . C'est sur ces versions que nous allons travailler.

Proposition 15

Soit $X = (X_t) \in \mathcal{S}_p$, et soit $\Lambda = (\Lambda_t^a, a \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+)$, les temps locaux associés à X , définis (*) comme ci-dessus.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_t^a da$ est finie, si, et seulement si, le crochet $[X, X]$ est localement intégrable.

Dans ces conditions, la projection duale prévisible $\langle X, X \rangle$ de $[X, X]$ existe, et l'on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\langle X, X \rangle_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_t^a da$$

(*) L'existence de $\Lambda = (\Lambda_t^a)$ est assurée par la proposition 9, 1°).

Démonstration :

1°). D'après la définition de Λ^a , $\mathcal{L}^a - \Lambda^a$ est une martingale locale nulle en 0. Soit donc $T_n \uparrow_{+\infty}$ une suite de t.a. telle que $(\mathcal{L}^a - \Lambda^a)^{T_n}$ soit une martingale uniformément intégrable. On a alors :

$$E(\Lambda_t^a \wedge T_n) = E(\mathcal{L}_t^a \wedge T_n)$$

Intégrons les deux membres de l'égalité par rapport à da , en appliquant le théorème de Fubini-Tonnelli :

$$E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_t^a \wedge T_n \, da\right) = E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_t^a \wedge T_n \, da\right), \text{ donc :}$$

$$(9) \quad E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_t^a \wedge T_n \, da\right) = E([X, X]_t \wedge T_n) \quad (\text{proposition 4})$$

On en conclut que si $[X, X]$ est localement intégrable, il en est de même pour $\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_t^a \, da$. Réciproquement, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_t^a \, da$ est finie, alors elle est localement intégrable, car c'est un processus croissant prévisible. Donc, $[X, X]$ est localement intégrable d'après la relation (9).

Pour démontrer la dernière partie de la proposition, on remarque que la relation (9) reste vraie si l'on remplace t par un t.a. T , ce qui montre que $([X, X]_t \wedge T_n - \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_t^a \wedge T_n \, da)$ est une martingale. D'où le résultat. ■

Ainsi, on a montré dans cet article, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [X, X]_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_t^a \, da \\ \langle X, X \rangle_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_t^a \, da \end{aligned}$$

D'autre part, il est montré en (2) que (L_t^a) possède la propriété de densité de temps d'occupation (en abrégé : D.T.O.) suivante :

$$\forall f \in b(\mathbb{R}), \int_0^t f(X_s) \, d\langle X^c, X^c \rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \, L_t^a \, da$$

A la lumière de ces résultats, il est naturel de se demander si les processus $(\mathcal{L}_t^a)$ et (Λ_t^a) possèdent les propriétés de D.T.O. suivantes :

$$(10) \quad \forall f \in b(\mathbb{R}), \int_0^t f(X_s) d[X, X]_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \mathcal{L}_t^a da$$

$$(11) \quad \forall f \in b(\mathbb{R}), \int_0^t f(\check{X}_s) d\langle X, X \rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \Lambda_t^a da$$

(X étant la projection prévisible de $X=(X_t) \in \mathcal{F}_p$)

$$(11') \quad \forall f \in b(\mathbb{R}), \int_0^t f(X_{s-}) d\langle X, X \rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \Lambda_t^a da$$

Supposons que la relation (10) soit vraie. Par un argument de classe monotone, on montre aisément que, pour toute fonction bornée $f: \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable, on a :

$$\int_0^t f(s, \omega, X_s) d[X, X]_s = \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t f(s, \omega, a) d\mathcal{L}_s^a$$

En prenant $f(s, \omega, a) = 1_{\{X_s(\omega) \neq a\}}$, on a alors :

$$(12) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_s \neq a\}} d\mathcal{L}_s^a = 0$$

De là, on tire le résultat suivant :

Proposition 16

Soit $X=(X_t) \in \mathcal{F}$ telle que $(\mathcal{L}_t^a)$ possède la propriété de D.T.O. (10).

Alors, X est continue, et l'on a $\Lambda^a = \mathcal{L}^a = L^a$.

Démonstration : on a vu que si $(\mathcal{L}_t^a)$ vérifie la relation (10), alors $(\mathcal{L}_t^a)$ vérifie aussi la relation (12), qui s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_s \neq a\}} d(L_s^a + \mathcal{L}_s^a) = 0$$

ou encore $\int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_s \neq a\}} d\mathcal{L}_s^a = 0$, (dL_s^a est portée par $\{X_s = X_{s-} = a\}$).

Or, $d\mathcal{L}_s^a$ est portée par l'ensemble $\{s/X_s \neq a\}$, d'après la formule (5). On a donc, d'après la proposition 4 :

$$\sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t d\mathcal{L}_s^a = 0 \quad \blacksquare$$

On a un énoncé analogue pour (Λ_t^a) :

Proposition 17

Soit $X=(X_t) \in \mathcal{L}_P$ telle que (Λ_t^a) possède la propriété de D.T.O. (11) ou (11').

Alors, X est continue, et l'on a $\Lambda^a = \mathcal{L}^a = L^a$.

Démonstration : toujours par un argument de classe monotone, si (Λ_t^a) vérifie les relations (11) ou (11'), alors (Λ_t^a) vérifie respectivement l'une des deux relations suivantes :

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{\dot{X}_s \neq a\}} d\Lambda_s^a = 0$$

$$(13') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_{s-} \neq a\}} d\Lambda_s^a = 0$$

Donc, en intégrant les deux membres de (13) et (13') par rapport à P , et en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} da E\left(\int_0^t 1_{\{\dot{X}_s \neq a\}} d\Lambda_s^a\right) = 0 \\ \text{resp.} & \int_{-\infty}^{+\infty} da E\left(\int_0^t 1_{\{X_{s-} \neq a\}} d\Lambda_s^a\right) = 0 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} da E\left(\int_0^t 1_{\{\dot{X}_s \neq a\}} d\mathcal{L}_s^a\right) = 0 \\ \text{resp.} & \int_{-\infty}^{+\infty} da E\left(\int_0^t 1_{\{X_{s-} \neq a\}} d\mathcal{L}_s^a\right) = 0, \end{aligned}$$

car $d\Lambda_s^a$ et $d\mathcal{L}_s^a$, pour a fixé, coïncident sur la tribu prévisible. On

remarque ensuite que $1_{\{\dot{X}_s \neq a\}} d\mathcal{L}_s^a = 1_{\{\dot{X}_s \neq a\}} d\ell_s^a$, et que

$1_{\{X_{s-} \neq a\}} d\mathcal{L}_s^a = 1_{\{X_{s-} \neq a\}} d\ell_s^a$ car $d\Lambda_s^a$ ne charge pas les ensembles dénombrables, et que $\dot{X}$ et X_- diffèrent seulement sur un ensemble dénombrable.

Donc, en appliquant de nouveau le théorème de Fubini-Tonelli, les deux relations précédentes deviennent :

$$(14) \quad E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{\dot{X}_s \neq a\}} d\ell_s^a\right) = 0$$

$$(14') \text{ resp. } E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_s \neq a\}} d\ell_s^a\right) = 0$$

Mais, on a d'autre part :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_s = a\}} d\ell_s^a &= \int_{-\infty}^{+\infty} da \left(\sum_{0 < s \leq t} 1_{\{X_s = a\}} \Delta \ell_s^a \right) \\ &= \sum_{0 < s \leq t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\{a = X_s\}} \Delta \ell_s^a da \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{resp. } \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t 1_{\{X_s = -a\}} d\ell_s^a = 0.$$

Donc, en vertu de la proposition 4, les relations (14) et (14') s'écrivent

$$E\left(\sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2\right) = 0 \quad \blacksquare$$

Appendice :

1°). On peut caractériser une semi-martingale spéciale à l'aide de la norme $||\cdot||_1$ (cf. définition 6) :

Proposition A.1.

Soit $X=(X_t) \in \mathcal{J}$.

Alors, X est une semi-martingale spéciale si et seulement si, $X-X_0$ est localement bornée dans L^1 .

Démonstration : soit $X=M+A$ une décomposition non nécessairement canonique de X . On a :

$$X-X_0 = (M-M_0) + A$$

On sait que $M-M_0$ est localement dans $\mathcal{H}^1$, donc localement bornée dans L^1 . On se ramène donc à montrer que : A est à variation localement intégrable si, et seulement si, A est localement borné dans L^1 . La condition nécessaire est évidente. Pour prouver que la condition est suffisante, soit $R_n \nearrow +\infty$ une suite de t.a. telle que $||A^{R_n}||_1 < +\infty$. Posons :

$$S_n = \inf\{t / \int_0^t |dA_s| \geq n\} \wedge n$$

$$T_n = S_n \wedge R_n : \text{t.a. finis croissant vers } +\infty.$$

On a alors :

$$\int_0^{T_n} |dA_s| \leq n + |\Delta A_{T_n}| \leq 2n + |A_{T_n}|$$

$$\text{Or } E(|A_{T_n}|) \leq \|A^{R_n}\|_1$$

$$\text{Donc, } E\left(\int_0^{T_n} |dA_s|\right) \leq 2n + \|A^{R_n}\|_1 < +\infty. \quad \blacksquare$$

2°). En (1), N. Kazamaki a montré qu'étant donnée une martingale locale $M=(M_t)$, bornée dans L^1 , il existe deux martingales locales positives, $\hat{M}=(\hat{M}_t)$ et $\bar{M}=(\bar{M}_t)$, bornées dans L^1 telles que $M=\hat{M}-\bar{M}$, et que $\|M\|_1 = \|\hat{M}\|_1 + \|\bar{M}\|_1$. Cette décomposition (dite de Krickeberg) est unique.

D'autre part, C. Stricker a montré, en (4), qu'il existe deux surmartingales positives $M'=(M'_t)$ et $M''=(M''_t)$ telles que $M=M'-M''$, et que $\text{Var}(M)=\text{Var}(M')+\text{Var}(M'')$. Cette décomposition (dite de Rao) est également unique.

En fait, il s'agit d'une même décomposition :

Proposition A.2.

Soit $M=(M_t)$ une martingale locale, bornée dans L^1 .

Alors, on a $\|M\|_1 = \text{Var}(M)$, et la décomposition de Krickeberg de M coïncide avec celle de Rao de M .

Démonstration :

a). Remarquons d'abord que si $X=(X_t)$ est une surmartingale positive, alors on a $\text{Var}(X) = \|X\|_1 = E(X_0)$.

Soit $M=\hat{M}-\bar{M}$ (resp. $M=M'-M''$) la décomposition de Krickeberg (resp. de Rao) de M . On peut alors écrire :

$$\text{Var}(M) \leq \text{Var}(\hat{M}) + \text{Var}(\bar{M}) = \|\hat{M}\|_1 + \|\bar{M}\|_1 = \|M\|_1,$$

et

$$\|M\|_1 \leq \|M'\|_1 + \|M''\|_1 = \text{Var}(M') + \text{Var}(M'') = \text{Var}(M)$$

$$\text{Donc, } \|M\|_1 = \text{Var}(M).$$

b). Maintenant il est facile de voir que la décomposition de Krickeberg de M est aussi une décomposition de Rao de M . L'unicité de la décomposition entraîne que $\tilde{M}=M'$ et $\bar{M}=M''$. ■

3°). En dehors de cet article, le problème suivant ne nous semble pas avoir été considéré jusqu'alors : soit $X=(X_t)$ une quasi-martingale. Pour quels processus prévisibles $V=(V_t)$, l'intégrale stochastique $(\int_0^t V_s dX_s)$ est-elle une quasi-martingale ?

Le théorème suivant, communiqué par M. Yor, complète la remarque qui suit le théorème 12, et est une réponse partielle à cette question :

Théorème A.3

Soit $X=(X_t)$ une quasi-martingale, et $V=(V_t)$ un processus càdlàg adapté, à variation bornée, tel que $\int_0^{+\infty} |dV_s| \leq c$, pour une certaine constante c . Alors ,

1°). si V est prévisible, $\int_0^\bullet V_s dX_s$ est une quasi-martingale.

2°). sinon, $\int_0^\bullet V_{s-} dX_s$ est une quasi-martingale.

De plus, on a $\|\int_0^\bullet W_s dX_s\|_1 \leq 2c\|X\|_1$, avec $W=V$, dans le 1er cas, et $W=V_-$, dans le second cas.

Démonstration : elle est fondée sur deux formules d'intégration par parties :

- si V est prévisible, $XV = \int_0^\bullet V_s dX_s + \int_0^\bullet X_{s-} dV_s$
- si V est optionnel, $XV = \int_0^\bullet V_{s-} dX_s + \int_0^\bullet X_s dV_s$

Ces formules rappelées, nous ne démontrerons que la seconde assertion. Soit $X=M+A$ la décomposition canonique de X . On a :

$$\int_0^\bullet V_{s-} dX_s = \int_0^\bullet V_{s-} dM_s + \int_0^\bullet V_{s-} dA_s.$$

Comme, $E(\int_0^{+\infty} |V_{s-}| |dA_s|) \leq c E(\int_0^{+\infty} |dA_s|) < +\infty$; en vertu du corollaire 8, il nous reste à prouver que $\int_0^\bullet V_{s-} dX_s$ est bornée dans L^1 . D'après la formule d'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} || \int_0^\cdot V_{s-} dX_s ||_1 &\leq ||XV||_1 + E(\int_0^{+\infty} |X_s| |dV_s|) \\ &\leq c ||X||_1 + E(\int_0^{+\infty} |X_s| |dV_s|) \end{aligned}$$

Notons $U = \int_0^\cdot |dV_s|$, et soit τ le changement de temps continu à droite associé à U , on a alors :

$$\begin{aligned} E(\int_0^{+\infty} |X_s| |dV_s|) &= E(\int_0^{+\infty} |X_s| dU_s) \\ &= E(\int_0^{U_s} |X_{\tau_u}| du) \\ &\leq E(\int_0^C |X_{\tau_u}| du) \\ &\leq c ||X||_1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } || \int_0^\cdot V_{s-} dX_s ||_1 \leq 2c ||X||_1 \quad \blacksquare$$

Finalement, en rapprochant le théorème A.3 de la remarque qui suit le théorème 12, on sait intégrer par rapport à une quasi-martingale X , une classe relativement vaste de processus prévisibles $H = (H_t)$ tels que $H.X$ soit une quasi-martingale :

Soient $(V^i)_{i=1, \dots, n}$ n processus prévisibles satisfaisant aux conditions du théorème A.3, et $(\phi_i)_{i=1, \dots, n}$ n primitives continues à gauche de mesures bornées. On pose :

$$\begin{aligned} X^1 &= (V^1 \phi_1(X_-)).X \\ X^2 &= (V^2 \phi_2(X_-^1)).X^1 \\ &\vdots \\ X^n &= (V^n \phi_n(X_-^{n-1})).X^{n-1} \end{aligned}$$

On voit donc que $X^n = (\prod_{i=1}^n V^i \phi_i(X_-^i)).X$ est une quasi-martingale.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) N. KAZAMAKI : "Krickeberg's decomposition for local martingales".
Séminaire de Proba. VI, Lecture Notes in Math. 258 (1972).
- (2) P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques.
Séminaire de Proba. X, Lecture Notes in Math. 511 (1976).
- (3) K.M. RAO : "Quasi-martingales". Math. Scand. 24, pp. 79-92.
- (4) C. STRICKER : "Quasimartingales, martingales locales, semi-martingales
et filtration naturelle". Z. für Wahr. 39, 55-63 (1977).
- (5) M. YOR : "Calcul stochastique dépendant d'un paramètre". A paraître (1977).
- (6) M. YOR : "Sur la continuité des temps locaux associés à certaines
semi-martingales (dans ce volume)".