

Astérisque

T. JEULIN

MARC YOR

Autour d'un théorème de Ray

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 145-158

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__145_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__145_0)

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AUTOUR D'UN THÉORÈME DE RAY

T. JEULIN ET M. YOR

INTRODUCTION

Soit (X_t) une diffusion réelle continue, issue de 0, associée à un opérateur $L = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx}$, et $(\mathbb{E}_t)$ sa filtration naturelle, dûment complétée et rendue continue à droite ; on note $T_a = \inf(t/X_t=a)$, et $(L_t^X)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$ le processus des temps locaux de la semi-martingale X . ((3), ch. VI).

Rappelons deux propriétés essentielles de (L_t^X) (cf. RPG) :

i). pour tout $t \geq 0$, $(L_t^X)_x \in \mathbb{R}$ peut être interprété comme "densité de temps d'occupation", car il vérifie :

$$(1) \text{ pour toute fonction } f \in b(\mathbb{R}), \int_0^t f(X_s) \sigma^2(X_s) ds = \int_{\mathbb{R}} f(a) L_t^a da$$

ii). pour tout x de $\mathbb{R}$, $(L_t^X)_{t \geq 0}$ est lié à la semi-martingale $(X-x)^+$ par la formule suivante, due à Tanaka lorsque X est le mouvement brownien réel (on note $a^+ = \sup(a, 0)$):

$$(2) (X_t - x)^+ = (X_0 - x)^+ + \int_0^t I_{(X_s > x)} dX_s + \frac{1}{2} L_t^x.$$

Le but de notre travail est de démontrer, en utilisant essentiellement ces deux propriétés, une caractérisation - due à D. Ray (4) - de la loi du processus

$Z_x = L_{T_1}^{1-x} (x \in \mathbb{R})$, qui s'énonce comme suit, dans le cas du mouvement brownien, et lorsque $x \in [0,1]$:

Théorème

Si X est le mouvement brownien réel, issu de $x=0$, le processus $L_{T_1}^{1-x}$, $0 \leq x \leq 1$ a même loi que le carré du module d'un mouvement brownien complexe issu de 0.

En fait, plusieurs démonstrations de ce théorème sont connues (cf. par exemple (4), (5)). La nôtre nous semble assez naturelle, et surtout on y dégage, au théorème 4 - qui est la clé de notre démarche - un résultat de représentation de certaines variables aléatoires comme intégrales stochastiques qui, à notre connaissance, est nouveau, et peut avoir son intérêt propre.

Signalons encore que l'article original de Ray ((4)) donne des résultats beaucoup plus complets que ceux que nous obtenons ici en fin d'article.

HYPOTHÈSES ET NOTATIONS

Nous utilisons les notations figurant dans l'introduction.

En outre, nous faisons sur σ et b les hypothèses suivantes :

- (a) σ et b sont localement lipschitziennes
- (b) σ est strictement positive
- (c) Il existe une constante $C > 0$, telle que $|\sigma(x)| + |b(x)| \leq C(1+|x|)$
- (d) Si f est la fonction strictement croissante définie par :

$$f(x) = \int_0^x \left(\exp - \int_0^z \frac{2 b(u)}{\sigma^2(u)} du \right) dz,$$

on suppose que : $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\infty$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = +\infty$.

Ω désigne l'espace $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ sur lequel on considère le processus (X_t) des coordonnées (défini par $X_t(\omega) = \omega(t)$) et la filtration $(\mathbb{F}_t^0)$ qu'il engendre.

D'après les hypothèses (a),(b), (c), (d), il est classique que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe une unique probabilité sur $(\Omega, \mathbb{F}_\infty^0)$ - que nous notons $\mathbb{P}_y$ - faisant de X un processus de diffusion issu de y , associé à L .

$(\mathbb{F}_t)$ désigne la filtration $(\mathbb{F}_t^0)$ rendue continue à droite, et convenablement complétée pour les $\mathbb{P}_y$.

Enfin, l'hypothèse (d) entraîne, d'après (2) (p. 115), que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\mathbb{P}_x(T_y < +\infty) = 1$.

I - RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES SUR LES TEMPS LOCAUX

Nous avons adopté dans l'introduction, en ce qui concerne les temps locaux, le point de vue des semi-martingales (nous garderons ce point de vue dans tout l'article).

Cependant nous travaillons ici avec toute la famille des probabilités $\mathbb{P}_y$, et l'existence d'un processus $(L_t^a, a \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+)$ de temps locaux, associés à X , et qui convienne pour toutes les probabilités $\mathbb{P}_y$ à la fois, nous est nécessaire. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 1

Il existe un processus $L :$

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (\omega, a, t) & \longmapsto & L_t^a(\omega) \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes, pour toute probabilité $\mathbb{P}_y (y \in \mathbb{R})$:

- 1). $\forall f \in b(\mathbb{R})$
 $\forall t \geq 0, \int_0^t f(X_s) \sigma^2(X_s) ds = \int_{\mathbb{R}} f(a) L_t^a da, \mathbb{P}_y \text{ ps}$
- 2). le processus L est, $\mathbb{P}_y$ p.s., bicontinu en (a,t)
- 3). pour tout $a \in \mathbb{R}$, L^a est un temps local (au sens de (1)) en a de
 (X_t) , considéré comme processus de Markov.

Démonstration : pour tout $y \in \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$, notons $y L_t^x$ le processus (en t) du temps local au point x de la semi-martingale (X_t) sous $\mathbb{P}_y$,

processus qui est défini par la formule (2).

D'après (6), σ ne s'annulant pas, on sait que pour tout y , il existe une version $\tilde{y}_t^x$ de y_t^x , qui est $\mathbb{P}_y$ ps bicontinue en (x, t) . Ainsi, d'après la formule (1), on a, $\mathbb{P}_y$ ps :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{y}_t^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^t I_{(x < X_s < x+h)} \sigma^2(X_s) ds$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{Posons } L_t^x(\omega) = \liminf_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^t I_{(x < X_s < x+h)} \sigma^2(X_s) ds \right\}(\omega)$$

Ce processus - indépendant de y - vérifie bien, par construction, les propriétés (1) et (2) (car elles étaient vérifiées par $\tilde{y}_t^x$).

D'autre part, pour tout y , on a, en fait

$$\mathbb{P}_y \text{ ps, } L_t^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^t I_{(x < X_s < x+h)} \sigma^2(X_s) ds.$$

On en déduit que, pour x fixé, L^x est une fonctionnelle additive continue du processus de Markov X . Par ailleurs, la mesure $dL^x_s(\omega)$ est portée par $\{s/X_s(\omega) = x\}$. X étant à trajectoires continues, on en déduit que le support de L^x (en tant que fonctionnelle additive, cf. (1), page 213) est contenu dans $\{x\}$, et donc identique à $\{x\}$, sinon L^x serait nulle ((1), p. 214), ce qui est contredit par les formules du lemme 2.

Par définition ((1), p. 216), L^x est donc bien un temps local en x du processus de Markov (X_t) . $\square$

Notons $M_t = X_t - X_0 - \int_0^t b(X_s) ds$; c'est une $(\mathbb{P}, \mathbb{F}_t)$ martingale locale - fonctionnelle additive, de processus croissant $\int_0^t \sigma^2(X_s) ds$. D'après (b), l'intégrale stochastique $\int_0^t \frac{1}{\sigma(X_s)} dM_s$ (qui est aussi une martingale - fonctionnelle additive) est bien définie ; de plus, c'est un $(\mathbb{P}, \mathbb{F}_t)$ mouvement brownien que l'on note B_t .

On peut alors écrire :

$$(3) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds.$$

Le lemme suivant donne l'expression explicite du premier moment de $L_{T_1}^a$:

Lemme 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. f désignant la fonction introduite en (d), on a les égalités :

$$\begin{aligned} - \text{ si } y \leq 1, E_y(L_{T_1}^a) &= \frac{2}{f'(a)} (f(1) - f(y)) \quad \text{si } a \leq y \\ &= \frac{2}{f'(a)} (f(1) - f(a)) \quad \text{si } y \leq a \leq 1 \\ &= 0 \quad \text{si } a \geq 1 \\ - \text{ si } 1 \leq y, E_y(L_{T_1}^a) &= 0 \quad \text{si } a \leq 1 \\ &= \frac{2}{f'(a)} (f(a) - f(1)) \quad \text{si } 1 \leq a \leq y \\ &= \frac{2}{f'(a)} (f(y) - f(1)) \quad \text{si } y \leq a \end{aligned}$$

Démonstration : la fonction f est de classe C^2 , et vérifie :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 f'' + b f' = 0.$$

Fixons $y \in \mathbb{R}$, et raisonnons relativement à la probabilité P_y .

La formule d'Ito permet d'écrire :

$$(4) \quad Y_t = f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t (\sigma f')(X_s) dB_s.$$

Notons $\mathcal{L}_t^a$ une version bicontinue du temps local associé à la martingale continue Y (voir, par exemple, (6)); alors, si $\bar{f}$ désigne l'application réciproque de f , on a, d'après (1), pour toute $\phi \in b(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \int \phi(a) L_t^a da &= \int_0^t \phi(X_s) \sigma^2(X_s) ds = \int_0^t \left[\frac{\phi}{(f')^2} \circ \bar{f} \right] (Y_s) (f'^2 \sigma^2)(X_s) ds \\ &= \int \frac{\phi}{f'^2} \circ \bar{f}(b) \mathcal{L}_t^b db = \int \phi(a) \frac{1}{f'(a)} \mathcal{L}_t^{f(a)} da \end{aligned}$$

En identifiant les deux membres extrêmes de cette suite d'égalités, on a donc :

$$(5) \quad L_t^a = \frac{1}{f'(a)} \mathcal{L}_t^{f(a)} \quad (\text{à une } \mathbb{P}_y\text{-indistinguabilité près en } (a, t)).$$

Remarquons que, pour $y \leq 1$, l'intégrale $\int_0^{t \wedge T_1} I_{(Y_s > f(a))} (\sigma f')^2 (X_s) ds$ est majorée par $t \times \sup_{u \in [a, 1]} (\sigma f')^2 (u)$, $\mathbb{P}_y$ ps.

La martingale $\int_0^{t \wedge T_1} I_{(Y_s > f(a))} (\sigma f') (X_s) dB_s$ est donc de carré intégrable; elle est, par suite, d'espérance nulle, pour tout t . On déduit alors de (2) (en remplaçant X par Y) l'égalité :

$$\frac{1}{2} \mathbb{E}_y(\mathcal{L}_{t \wedge T_1}^{f(a)}) + (f(y) - f(a))^+ = \mathbb{E}_y((f(X_{t \wedge T_1}) - f(a))^+).$$

Quand t tend vers $+\infty$, le membre de gauche croît vers $\frac{1}{2} \mathbb{E}_y(\mathcal{L}_{T_1}^{f(a)}) + (f(y) - f(a))^+$, tandis que celui de droite tend, par convergence dominée, vers $(f(1) - f(a))^+$, d'où les égalités annoncées dans le cas où $y \leq 1$.

Si $y \geq 1$, on procède de même, en utilisant

$$(2') \quad (Y_t - f(a))^- = (Y_0 - f(a))^- + \int_0^t I_{(Y_s < f(a))} dY_s + \frac{1}{2} \mathcal{L}_t^{f(a)}$$

Nota bene : la formule (5) $L_t^a = \frac{1}{f'(a)} \mathcal{L}_t^{f(a)}$, liant les temps locaux L et $\mathcal{L}$ relatifs respectivement à X et $Y=f(X)$ est encore utilisée dans les paragraphes suivants.

2 - UNE MARTINGALE REMARQUABLE

Remplaçons en (2) t par T_1 et x par $1-x$ ($x \geq 0$) ; on obtient :

$$x = (X_0 - 1 + x)^+ + \frac{1}{2} L_{T_1}^{1-x} + \int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-x)} \sigma(X_s) dB_s + \int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-x)} b(X_s) ds$$

Posons $Z_x = L_{T_1}^{1-x}$ ($x \geq 0$).

Si l'on transforme la dernière intégrale à l'aide de (1), il vient :

$$(6) \quad Z_x - 2 \inf(x, 1 - X_0) + 2 \int_0^x \frac{b}{\sigma^2} (1-u) Z_u du = -2 \int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-x)} \sigma(X_s) dB_s$$

Dans la suite, on s'intéresse au comportement de Z_x sous P_0 .

D'après l'identification de L^a à un temps local markovien de X en a (lemme 1, 3)), Z_x est strictement positif, P_0 p.s., pour x fixé ($x \in]0,1]$). Une première conséquence du lemme 2 est l'intégrabilité de Z_x par rapport à P_0 , pour tout x de R_+ . En voici une seconde :

Lemme 3 : soit $x \geq 0$.

Notons (M_t^x) la (F_t) -martingale locale $2 \int_0^{t \wedge T_1} I_{(X_s > 1-x)} \sigma(X_s) dB_s$.

On a les égalités :

$$\langle M^x, M^x \rangle_\infty = 4 \int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-x)} \sigma^2(X_s) ds = 4 \int_0^x Z_u du,$$

et la variable $\langle M^x, M^x \rangle_\infty$ est de carré intégrable sous P_0 . En conséquence,

$$E_0(\sup_t |M_t^x|^4) < +\infty.$$

Démonstration : l'expression de $\langle M^x, M^x \rangle_\infty$ en fonction de Z découle de (1) ; d'après l'inégalité de Schwarz, $E_0(\int_0^x Z_u du)^2$ est majoré par $x \times \int_0^x E(Z_u^2) du$, donc, d'après (5), par :

$$x \int_{1-x}^1 \frac{1}{f'^2(u)} E_0((\mathcal{L}_{T_1}^{f(u)})^2) du ;$$

il suffit donc de montrer que, pour $a \geq 0$, on a : $\sup_{u \in [-a,1]} E_0((\mathcal{L}_{T_1}^{f(u)})^2) < +\infty$.

Pour simplifier les expressions à écrire, on prend $a=0$ dans la suite.

Soit U^u la martingale $U_t^u = \int_0^{t \wedge T_1} I_{(Y_s > f(u))} \sigma f'(X_s) dB_s$.

D'après (2), on a, pour $u \in [0,1]$:

$$U_t^u = (Y_{t \wedge T_1} - f(u))^+ - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{t \wedge T_1}^{f(u)}, \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} E_0((\mathcal{L}_{T_1}^{f(u)})^2) &= E_0((f(1) - f(u) - U_\infty^u)^2) \\ &\leq 2(f(1))^2 + E_0((U_\infty^u)^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or, on a : } \mathbb{E}_0(\langle U^u, U^u \rangle_\infty) &= \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} I_{(Y_s > f(u))} \sigma^2 f'^2(X_s) ds\right) \\
&= \mathbb{E}_0\left(\int_{f(u)}^{f(1)} \mathcal{L}_{T_1}^b db\right) \\
&\leq \mathbb{E}_0\left(\int_0^{f(1)} \mathcal{L}_{T_1}^b db\right).
\end{aligned}$$

D'après (5), cette dernière intégrale est égale à :

$$\int_0^1 f'^2(v) \mathbb{E}_0(L_{T_1}^v) dv < +\infty, \text{ d'après le lemme (2).}$$

La fin du lemme découle des inégalités de Burkholder - Davis - Gundy.

3 - UN THÉORÈME DE REPRÉSENTATION ET SES CONSÉQUENCES

Soit $\mathcal{F}_x$ la filtration engendrée par le processus continu $(Z_x, x \geq 0)$, rendue continue à droite, et dûment complétée sous $\mathbf{P}_0$.

Le théorème suivant est la clé de notre démonstration du théorème de Ray :

Théorème 4

Soit $x \geq 0$.

i). Si $H \in L^2(\mathcal{F}_x, \mathbf{P}_0)$, il existe un processus $(\mathbb{E}_t)$ -prévisible ϕ tel que
l'on puisse écrire :

$$H = \mathbb{E}_0(H) + \int_0^{T_1} \phi_s I_{(X_s > 1-x)} dB_s, \mathbf{P}_0 \text{ ps,}$$

avec

$$\mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} \phi_s^2 I_{(X_s > 1-x)} ds\right) < +\infty.$$

ii). Si $H \in L^4(\mathcal{F}_x, \mathbf{P}_0)$, il existe un processus $(\mathbb{E}_t)$ -prévisible ψ
tel que la variable aléatoire $K \in L^2(\mathbf{P}_0)$, définie par :

$$K = \int_0^{T_1} \phi_s I_{(X_s > 1-x)} \sigma(X_s) ds, \text{ où } \phi \text{ est le processus obtenu précédemment,}$$

puisse s'écrire :

$$K = \mathbb{E}_0(K) + \int_0^{T_1} \psi_s I_{(X_s > 1-x)} dB_s, \mathbb{P}_0 \text{ ps,}$$

avec

$$\mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} \psi_s^2 I_{(X_s > 1-x)} ds\right) < +\infty.$$

Supposons démontré le théorème 4 (ce qui sera fait au paragraphe 4). On peut alors énoncer la :

Proposition 5

Le processus $(Q_x, x \geq 0)$, défini par

$$Q_x = Z_x - 2(x \wedge 1) + 2 \int_0^x \frac{b}{\sigma^2} (1-u) Z_u du$$

est une $(\mathcal{Z}_x, \mathbb{P}_0)$ martingale continue, telle que $Q_x \in L^4(\mathcal{Z}_x)$ pour tout x , et admettant pour processus croissant (relativement à $\mathcal{Z}_x$) $4 \int_0^x Z_u du$.

Démonstration : soit $H \in b(\mathcal{Z}_x)$, et $y \geq x$. On a :

$$Q_y = -M_{T_1}^y = -2 \int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-y)} \sigma(X_s) dB_s.$$

A l'aide de la représentation de H , obtenue dans la première partie du théorème 4, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0(H Q_y) &= -2 \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} \phi_s I_{(X_s > 1-x)} dB_s \cdot \int_0^{T_1} \sigma(X_s) I_{(X_s > 1-y)} dB_s\right) \\ &= -2 \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} \phi_s \sigma(X_s) I_{(X_s > 1-x)} I_{(X_s > 1-y)} ds\right) \\ &= -2 \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} \phi_s \sigma(X_s) I_{(X_s > 1-x)} ds\right) \\ &= \mathbb{E}_0(H Q_x) \end{aligned}$$

Q est donc une $\mathcal{G}$ -martingale. En outre, du lemme 3, on déduit aisément que

$\int_0^{t \wedge T_1} M_s^Y I_{(X_s > 1-y)} \sigma(X_s) dB_s$ est une $(\mathbb{F}_t)$ martingale de carré intégrable.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_0(H(Q_y^2 - 4 \int_0^y Z_u du)) \\ &= 4 \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} \phi_s I_{(X_s > 1-x)} dB_s \cdot \int_0^{T_1} M_s^Y I_{(X_s > 1-y)} \sigma(X_s) dB_s\right) \\ &= 4 \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} \phi_s M_s^Y I_{(X_s > 1-x)} \sigma(X_s) ds\right) \end{aligned}$$

Si K_t désigne le processus prévisible à variation finie

$\int_0^{t \wedge T_1} \phi_s \sigma(X_s) I_{(X_s > 1-x)} ds$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_0(H(Q_y^2 - 4 \int_0^y Z_u du)) = 4 \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} M_s^Y dK_s\right) = 4 \mathbb{E}_0(M_{T_1}^Y \cdot K_{T_1}) \\ &= 8 \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-y)} \sigma(X_s) dB_s \cdot \int_0^{T_1} \psi_s I_{(X_s > 1-x)} dB_s\right) \text{ (d'après le théorème 4, ii)} \\ &= 8 \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-x)} \psi_s \sigma(X_s) ds\right) = \mathbb{E}_0(H(Q_x^2 - 4 \int_0^x Z_u du)). \end{aligned}$$

Le processus croissant associé à la martingale Q est donc $4 \int_0^\cdot Z_u du$.

Afin de ne pas alourdir inutilement la rédaction, nous énonçons sans démonstration le résultat d'unicité suivant :

Théorème 6

Soit $T > 0$ et $\Omega_0^T = C([0, T], \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des applications continues
de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}_+$ muni de ses applications coordonnées (ξ_t) et de la filtra-
tion $(\mathbb{G}_t)$ qu'elles engendrent.

1). Si $\sigma = 1, b=0$ (i.e. : P_0 est la loi du mouvement brownien issu de 0),
la loi de $(Z_x, 0 \leq x \leq T)$ sous P_0 , soit $\pi_{1,0}^T$, est l'unique probabilité
 Q sur Ω_0^T telle que $Q(\xi_0 = 0) = 1$ et
 $(\xi_t - 2 \inf(1,t), t \leq T)$ soit une Q -martingale de processus croissant
 $4 \int_0^t \xi_u du$.

2). De même, dans le cas général, la loi de $(Z_x, 0 \leq x \leq T)$ sous P_0 ,
soit $\pi_{\sigma,b}^T$, est l'unique probabilité Q sur Ω_0^T telle que :
 $Q(\xi_0 = 0) = 1$ et
 $(\xi_t - 2 \inf(1,t) + 2 \int_0^t \frac{b}{\sigma^2} (1-u) \xi_u du, t \leq T)$ soit une Q martingale
de processus croissant associé $4 \int_0^t \xi_u du$.

Corollaire 7(Ray(4))

La loi de $(Z_x, 0 \leq x \leq 1)$ sous P_0 est celle du carré du module d'un
mouvement brownien complexe issu de 0.

Démonstration : d'après le théorème 6,1), appliqué pour $T=1$, il nous reste
à vérifier que si $C_t = U_t + iV_t$ ($0 \leq t \leq 1$) est un mouvement brownien complexe
issu de 0, $|C_t|^2$ a pour loi $\pi_{1,0}^1$.

Or, $|C_t|^2 = U_t^2 + V_t^2$ vérifie, d'après la formule d'Ito :

$$|C_t|^2 = 2 \int_0^t (U_s dU_s + V_s dV_s) + 2t$$

et la martingale (locale) $M_t = 2 \int_0^t (U_s dU_s + V_s dV_s)$ a pour processus croissant
 $4 \int_0^t (U_s^2 + V_s^2) ds = 4 \int_0^t |C_s|^2 ds$.

4 - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4

a). Si H admet la représentation donnée en i), alors

$$(7) \quad \mathbb{E}_0 \left(\int_0^{T_1} \phi_s^2 I_{(X_s > 1-x)} ds \right) + (\mathbb{E}_0(H))^2 = \mathbb{E}_0(H^2)$$

En outre, l'inégalité de Schwarz donne

$$\left(\int_0^{T_1} |\phi_s| I_{(X_s > 1-x)} \sigma(X_s) ds \right)^2 \leq \left(\int_0^{T_1} \phi_s^2 I_{(X_s > 1-x)} ds \right) \cdot \left(\int_0^{T_1} \sigma^2(X_s) I_{(X_s > 1-x)} ds \right)$$

d'où

$$\left\| \int_0^{T_1} |\phi_s| I_{(X_s > 1-x)} \sigma(X_s) ds \right\|_{L^2}^2 \leq \left\| \int_0^{T_1} \phi_s^2 I_{(X_s > 1-x)} ds \right\|_{L^2} \cdot \left\| \int_0^{T_1} \sigma^2(X_s) I_{(X_s > 1-x)} ds \right\|_{L^2}$$

expression qui, d'après le lemme (3) et les inégalités de Burkholder -

Davis - Gundy est majorée par une constante fois $\{\mathbb{E}_0(H^4)\}^{1/2}$; par suite,

si $H \in L^4(\mathbb{P}_0)$, $\int_0^{T_1} |\phi_s| I_{(X_s > 1-x)} \sigma(X_s) ds$ est de carré intégrable et si

on a la représentation indiquée en ii), alors :

$$\int_0^{t \wedge T_1} \psi_s I_{(X_s > 1-x)} dB_s \text{ appartient à } L^2(\mathbb{P}_0), \text{ et l'inégalité :}$$

$$(8) \quad \mathbb{E}_0 \left(\int_0^{T_1} \psi_s^2 I_{(X_s > 1-x)} ds \right) \leq k \{\mathbb{E}_0(H^4)\}^{1/2}$$

est vérifiée, avec k constante, ne dépendant que de σ et b .

Les inégalités (7) et (8) ci-dessus montrent qu'il suffit de démontrer le théorème 4, i) (resp. ii)) pour un sous-espace dense de $L^2(\mathcal{Z}_x)$ resp. $L^4(\mathcal{Z}_x)$.

b). On se limitera donc à des variables de la forme :

$$H = \exp \left(- \int_0^x g(a) Z_a da \right), \text{ où } g \text{ est une fonction positive à support}$$

compact inclus dans $]0, x[$, et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Posons $G(y) = \mathbb{E}_y(H)$.

En appliquant la propriété de Markov, on montre aisément que G est de classe C^1 , que $G'(y) = 0$ pour $y \leq 1-x$, ainsi que la formule :

$$H_t = \mathbb{E}(H | \mathcal{F}_t) = \left(\exp - \int_0^t g(1-X_s) \sigma^2(X_s) ds \right) G(X_t \wedge T_1).$$

La formule d'Ito appliquée à H_t permet alors d'écrire

$$H = \mathbb{E}_0(H) + \int_0^{T_1} \left(\exp - \int_0^u g(1-X_s) \sigma^2(X_s) ds \right) G'(X_u) \sigma(X_u) I_{(X_u > 1-x)} dB_u$$

d'où le théorème 4 i).

c). Il nous reste à représenter

$$K = \int_0^{T_1} \exp \left(- \int_0^u g(1-X_s) \sigma^2(X_s) ds \right) (G' \sigma^2)(X_u) du.$$

Notons $J(y) = \mathbb{E}_y(K)$.

La propriété de Markov permet de montrer que J est différence de deux fonctions convexes et que sa dérivée à gauche $J'(y)$ est nulle pour $y \leq 1-x$.

En outre, $\mathbb{E}(K | \mathcal{F}_t) = K_t + M_t J(X_t \wedge T_1)$ avec

$$M_t = \exp - \int_0^t g(1-X_s) \sigma^2(X_s) ds \quad \text{et} \quad K_t = \int_0^{t \wedge T_1} M_s (G' \sigma^2)(X_s) ds.$$

La formule d'Ito généralisée permet alors d'écrire

$$\mathbb{E}(K | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_0(K) + \int_0^{t \wedge T_1} I_{(X_s > 1-x)} M_s (J' \sigma)(X_s) dB_s,$$

ce qui termine la démonstration du théorème 4 (prendre $t=T_1$).

BIBLIOGRAPHIE

- (1) BLUMENTHAL R.M. & GETTOOR R.K. : Markov Processes and Potential Theory
Academic Press, 1968.
- (2) GIHMAN I.I. & SHOROHOD A.V. : Stochastic Differential Equations. Springer 1972

- (3) MEYER P.A. : Un cours sur les Intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. n° 511, Springer 1976.
- (4) RAY D. : Sojourn Times of Diffusion Processes, Illinois J. Math 7, p. 615 - 630, 1963.
- (5) WILLIAMS D. : Markov properties of Brownian local times.
Bull. Amer. Math. Soc. 75, p. 1035-1036, 1969.
- (6) YOR M. : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales, (dans ce volume).