Astérisque

ALBERT FATHI
MICHAEL R. HERMAN

Existence de difféomorphismes minimaux

Astérisque, tome 49 (1977), p. 37-59
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__49__37_0>

© Société mathématique de France, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 49 (1977) p.37-59

EXISTENCE DE DIFFÉOMORPHISMES MINIMAUX

par

Albert FATHI et Michael R. HERMAN

Nous démontrons des théorèmes d'existence de difféomorphismes minimaux sur les variétés C^∞ compactes connexes possédant une action localement libre de $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La démonstration s'inspire d'Anosov et Katok [2]. Une partie de ces résultats a été annoncée par Katok [11].

§ 1. - INTRODUCTION

Soit G un groupe topologique agissant continûment comme groupe d'homéomorphismes sur un espace topologique X.

1.1. DÉFINITION. L'action de G est minimale sur X si l'orbite par G de tout $x \in X$ (i.e. $Gx = \{gx \mid g \in G\}$) est dense dans X.

Soit G une action minimale sur X, si $G = \mathbb{Z}$ et $f \in \mathrm{Homeo}(X)$ est un générateur de G, alors f est appelé un homéomorphisme minimal de X ; si $G = \mathbb{R}$, on a un flot minimal (ou encore un groupe à un paramètre minimal).

1.2. PROPOSITION. Les affirmations i) et ii) sont équivalentes :

i) L'action de G sur X est minimale.

ii) Si F est un fermé invariant pour G (i.e. $g(F) = F$ pour tout $g \in G$), alors

$F = \emptyset$ ou X (i.e. X est minimal pour la relation d'inclusion parmi les ensembles fermés non vides invariants par G).

1.3. PROBLÈME. Quels espaces topologiques X admettent un homéomorphisme (resp. flot) minimal ?

En fait, il est assez naturel de se limiter au cas où X est une variété compacte connexe. On a des exemples de flots minimaux sur une variété ouverte : les flots de Stepanoff [16] ; on obtient un tel flot en partant d'un flot minimal sur une variété C^∞ compacte X ; on considère $Y = X - \{1 \text{ point}\}$ et on "reparamètre" le flot pour obtenir un flot minimal sur Y.

1.4. PROPOSITION. Soit X un espace topologique de Lindelöf, alors i) et ii) sont équivalents :

i) L'action de G sur X est minimale.

ii) Pour tout ouvert non vide U de X, il existe un ensemble dénombrable $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset G$ tel que $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_i(U)$. Si X est compact, il existe un nombre fini $g_1,\dots,g_n$ tel que $X = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(U)$.

Rappelons que X est Lindelöf si tout recouvrement par des ouverts contient un sous-recouvrement dénombrable.

1.5. Remarquons que s'il existe $V \subset X$ ouvert et homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ et si X admet une action minimale, alors X est une variété topologique de dimension n.

Pour des exemples d'espace X compact métrique non homogène avec un homéomorphisme minimal, voir [9, § 14.24].

1.6. PROBLÈME. Est-ce qu'il existe un C^∞ difféomorphisme f d'une variété compacte, tel que f ait un ensemble minimal qui ne soit pas localement homéomorphe à $\mathbb{R}^p \times$ Cantor ? Quelle mesure de Lebesgue peut avoir un ensemble minimal ? (On ne connaît pas la réponse à la dernière question, même dans le cas où l'ensemble minimal est une variété topologique ou un Cantor.)

§ 2. - OBSTRUCTIONS A L'EXISTENCE D'ACTION MINIMALE

Fuller [7] a montré le théorème suivant (qui est une application du théorème du point fixe de Lefschetz) :

2.1. THÉORÈME. Soient M^n une variété compacte et f un homéomorphisme de M^n. Si $\chi(M^n)$, la caractéristique d'Euler-Poincaré de M^n, est non nulle, alors f a un point périodique (et on peut majorer la période par la somme des nombres de Betti).

Anosov & Katok [2] et Anosov [1], généralisant au cas C^∞ des théorèmes d'Oxtoby & Ulam [17, 18], ont démontré le théorème remarquable suivant (voir aussi l'article de Katok [12]).

2.2. THÉORÈME. Toute variété C^∞ compacte connexe M^n admet un difféomorphisme f de classe C^∞ avec une orbite dense. De plus, on peut supposer que f préserve une mesure μ, ayant une densité C^∞ strictement positive, et que f est μ-ergodique.

Anosov [1] et Blohin [3] ont montré que le théorème 2.2 reste vrai pour les flots C^∞ à l'exclusion de S^2, $P_2(\mathbb{R})$ et de la bouteille de Klein.

Le théorème 2.2 a un corollaire (presque) immédiat :

2.3. COROLLAIRE. Toute variété C^∞ compacte connexe M^n admet une action minimale du groupe libre non commutatif à 2 générateurs $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Démonstration : Soit f un difféomorphisme C^∞ de M^n ayant une orbite dense. L'ensemble $D = \{x \in M^n \mid (f^k(x))_{k\geq 0}$ est dense$\}$ est un G_δ dense dans M^n ; il a, en particulier, un nombre infini de points.

Soit g un difféomorphisme de Morse-Smale de M^n, par exemple le temps 1 du flot du gradient (pour une métrique riemannienne) d'une fonction de Morse sur M^n. Par définition $\Omega(g)$, l'ensemble des points de M^n non errants pour g, est fini. Quitte à conjuguer g, nous pouvons supposer que $\Omega(g) \subset D$, et par conséquent l'ensemble ω-limite $\omega_g(x) \subset D$ pour tout $x \in M^n$. Considérons l'action de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ sur M^n engendrée par f et g, on vérifie sans peine qu'elle est minimale. □

Les théorèmes 2.1 et 2.2 montrent que la difficulté avec la minimalité est évidemment qu'il faut que toute orbite soit dense. Nous allons voir que la méthode d'Anosov & Katok va nous permettre, en fait, de construire dans certains cas des difféomorphismes minimaux.

2.4. Les obstructions connues sur les variétés.

2.4.1. $\mathbb{R}$ admet un flot minimal mais pas d'homéomorphisme minimal.

2.4.2. $\mathbb{R}^2$ n'admet pas, par le théorème de Poincaré-Bendixson, de feuilletage de codimension 1 avec une feuille dense. Il résulte d'un théorème profond de Brouwer [6] que $\mathbb{R}^2$ n'a pas d'homéomorphisme minimal (Brouwer montre que, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme préservant l'orientation et sans point fixe, alors il existe un disque D^2_ε tel que les ensembles $\{f^n(D^2_\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ soient 2 à 2 disjoints).

2.4.3. La bouteille de Klein K n'admet pas de flot minimal bien que $\chi(K) = 0$ (tout feuilletage de la bouteille de Klein a une feuille compacte, voir [13]). La bouteille de Klein admet en contrepartie un difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique minimal et même strictement ergodique, voir par exemple [19] (cela résulte, dans le cas C^∞, du théorème 1 énoncé plus loin).

§ 3. - RÉSULTATS

3.1. On suppose dans la suite que M^n est une variété C^∞ compacte connexe de dimension n. Toutes les actions de groupe de Lie que l'on considèrera seront des actions C^∞ et effectives (i.e. $G \hookrightarrow \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$).

3.2. DÉFINITION. Soit G un groupe de Lie agissant sur M^n, l'action est dite localement libre (resp. libre) si, pour tout $x \in M^n$, le stabilisateur de x $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ est un sous-groupe discret de G (resp. est réduit à l'élément neutre de G).

Les orbites de G définissent alors un feuilletage C^∞ sur M^n de codimension $n - \dim G$.

3.3. Soit $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ $(k \geq 1)$. Donnons-nous une action localement libre de T^k sur M^n, que l'on écrira $t \in T^k \longmapsto R_t \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$. Dans ce cas, la réunion des stabilisateurs $S = \bigcup_{x \in M^n} T^k_x$ est un sous-ensemble fini de T^k. (En effet [14, § 5.3] $x \in M^n$ et U est un ouvert de T^k contenant T^k_x, il existe un voisinage V de x dans M^n, tel que, si $y \in V$, alors $T^k_y \subset U$. Comme T^k/T^k_x n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit, on a $T^k_y \subset T^k_x$, si U est assez petit. On conclut par compacité de M^n.)

DÉFINITION. Dans la situation précédente, si H est un sous-groupe fermé de T^k, on dit que H est premier aux stabilisateurs si $H \cap S = \{0\}$. Si $k = 1$ et si H est engendré par $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$, on dit que $\frac{p}{q}$ est premier à S.

DÉFINITION. Une action C^∞ de T^k sur M^n $(k \geq 2)$ localement libre est dite spéciale, si $\{\varphi \in \mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, T^k) \mid \mathrm{Im}\,\varphi \cong T^{k-1}, \mathrm{Im}\,\varphi \cap S = \{0\}\}$ est dense dans $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, T^k)$, l'ensemble des C^∞ homomorphismes de $\mathbb{R}^{k-1}$ dans T^k muni de la C^∞-topologie.

3.4. Les théorèmes que nous démontrons sont les suivants :

THÉORÈME 1. Toute variété M^n compacte connexe qui admet une action C^∞ localement libre effective de T^1 admet un difféomorphisme de classe C^∞ (isotope à l'identité) qui est minimal.

THÉORÈME 2. Toute variété M^n compacte connexe admettant une action localement libre spéciale C^∞ de T^k $(k \geq 2)$ admet une action C^∞ de $\mathbb{R}^{k-1}$ libre et minimale.

Dans le cas où l'action est libre, les théorèmes 1 et 2 ont été annoncés par Katok en 1972, [11]. La démonstration de Katok du théorème 1, dans le cas où $M^n = T^1 \times N^{n-1}$, se trouve dans [5, § 11.44].

3.5. Rappelons que, par le théorème de Markov-Kakutani, si G est un groupe abélien agissant sur un espace compact, alors il existe une mesure de probabilité μ sur X invariante par G (i.e. pour tout $g \in G$, $g_*\mu = \mu$) ; plus généralement, il existe une mesure de probabilité invariante si G est moyennable.

3.6. PROPOSITION. Soit G un groupe (topologique) abélien (ou moyennable) agissant continûment sur un espace compact X, alors i) et ii) sont équivalents :

i) L'action de G sur X est minimale.

ii) Toute mesure de probabilité μ invariante par G vérifie $\text{support}(\mu) = X$.

3.7. DÉFINITION. Toujours sous les mêmes hypothèses que 3.6, G est une action uniquement (resp. strictement) ergodique si G a une unique mesure de probabilité invariante (resp. si de plus $\text{support}(\mu) = X$).

Remarquer que l'action de G est strictement ergodique si et seulement si cette action est minimale et uniquement ergodique.

EXEMPLE : Les translations ergodiques sur les tores.

Soit $R_\alpha : T^k \to T^k$ définie par $R_\alpha(x) = x + \alpha$, où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in T^k$. La translation R_α est strictement ergodique si et seulement si $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$ (dans $\mathbb{R}$).

Noter que la minimalité, l'unique ergodicité et la stricte ergodicité sont des propriétés invariantes par conjugaison topologique.

3.8. Nous esquissons la démonstration des théorèmes suivants :

THÉORÈME 3. Toute variété M^n admettant une action localement libre C^∞ de T^1 admet un difféomorphisme C^∞ strictement ergodique.

THÉORÈME 4. Toute variété M^n admettant une action localement libre spéciale C^∞ de T^k $(k \geq 2)$ admet une action libre C^∞ de $\mathbb{R}^{k-1}$ strictement ergodique.

Le premier auteur sait même montrer les théorèmes 3 et 4 en imposant à l'unique mesure invariante d'avoir une densité C^∞ strictement positive.

3.9. EXEMPLES. a) Si V est une variété compacte connexe, alors $T^k \times V$ admet une action libre C^∞ de T^k.

b) Tout groupe de Lie compact connexe G $(\neq \{0\})$ admet une action libre de T^k $(k \geq 1)$ car il contient un tore maximal. Si $G \neq T^1$, $SO(3)$ ou S^3, le groupe G admet une action libre de T^2, car dans ce cas $k \geq 2$.
Si Γ est un sous-groupe fini de G, le quotient G/Γ a une action localement libre de T^k.

c) Toutes les sphères impaires S^{2n+1} (resp. espaces lenticulaires) admettent une action libre de T^1 (resp. localement libre) ; et tout produit de sphères impaires $S^{2n_1+1} \times S^{2n_2+1}$ admet donc une action libre de T^2.

d) En dimension 3, M^3 admet une action localement libre de T^1, si M^3 est une "fibration de Seifert orientable". Pour la classification de ces "fibrations", voir [15].

e) Toute action libre de T^k sur M^n est spéciale.

f) Si $M_1^{n_1}$ a une action localement libre de T^1 et $M_2^{n_2}$ a une action libre de T^k, l'action produit de T^{1+k} sur $M_1^{n_1} \times M_2^{n_2}$ est spéciale. Par contre, si M^n a une action localement libre de T^1 non libre, l'action produit de T^2 sur $M^n \times M^n$ n'est pas spéciale.

§ 4. - GÉNÉRALITÉS

Soit X un espace métrique compact non vide, en particulier X a une base dénombrable d'ouverts $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (on suppose que $\forall\, i \in \mathbb{N},\ U_i \neq \emptyset$). Nous munissons Homeo(X), le groupe des homéomorphismes de X, de la topologie compacte ouverte. Le groupe Homeo(X) est alors un groupe topologique polonais (i.e. homéomorphe à un espace métrique complet séparable). Soit $\mathfrak{m} = \{f \in \text{Homeo}(X) \mid f \text{ est minimal}\}$.

4.1. PROPOSITION. L'ensemble $\mathfrak{m}$ des homéomorphismes minimaux de X est un G_δ dans Homeo(X) (éventuellement vide).

Démonstration : Soit $\mathfrak{w}_{U_i} = \{f \in \text{Homeo}(X) \mid \exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $U_i \cup f(U_i) \cup \ldots \cup f^n(U_i) = X\}$. Par 1.4, $\mathfrak{m} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{w}_{U_i}$. Il suffit alors de démontrer que $\mathfrak{w}_{U_i}$ est ouvert dans Homeo(X), ou encore que, $\forall\, i \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$\mathfrak{w}^n_{U_i} = \{f \in \text{Homeo}(X) \mid U_i \cup \ldots \cup f^n(U_i) = X\}$ est ouvert.

Soit $f \in \mathfrak{w}^n_{U_i}$ et $\{K_j\}_{0\le j\le n}$ des compacts avec $K_j \subset f^j(U_i)$ tels que $\bigcup_{0\le j\le n} K_j = X$. Visiblement $\bigcap_{0\le j\le n} \{g \in \text{Homeo}(X) \mid g^{-j}(K_j) \subset U_i\}$ est un voisinage ouvert de f contenu dans $\mathfrak{w}^n_{U_i}$. □

4.2. Unique ergodicité. Soit T une translation de $\mathbb{R}^n$, $T \neq \text{Id}$, alors T se prolonge en $\tilde{T} : S^n \to S^n$ avec $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. $\tilde{T}$ est uniquement ergodique avec pour unique mesure de probabilité invariante δ_∞, la mesure de Dirac concentrée au point ∞.

Plus généralement, toute variété C^∞ compacte connexe a un difféomorphisme (resp. flot) C^∞ uniquement ergodique. En effet, soient $x_o \in M^n$ et φ une fonction C^∞ sans point critique sur la variété ouverte $M^n - x_o$. On considère X un champ de vecteurs sur $M^n - x_o$ tel que $X(f) > 0$, par exemple $X = \text{grad } f$ pour une métrique riemannienne sur $M^n - x_o$. Soit ψ une fonction C^∞ sur M^n, strictement positive sur $M^n - x_o$, telle que ψX prolongé par 0 en x_o soit un champ de vecteurs C^∞ sur M^n. L'ensemble non errant du flot de ce champ de vecteurs est réduit à x_o.

4.3. PROPOSITION. Soit X un espace compact métrique et $f \in \text{Homeo}(X)$. Les affirmations (i) et (ii) sont équivalentes :

(i) f est uniquement ergodique avec, pour unique mesure de probabilité invariante, μ.

(ii) Pour toute fonction $\varphi \in C^o(X)$, $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i$ converge uniformément, quand $n \to \infty$, vers une constante (qui est obligatoirement égale à $\int_X \varphi d\mu$).

Démonstration : Voir [8] ou [20]. □

Pour les actions de $\mathbb{R}^k$, on a la même proposition en remplaçant les sommes de Birkhoff par $\frac{1}{t^k}\int_0^t \dots \int_0^t \varphi \circ f_s ds_1 \dots ds_k$.

Soit $\mathcal{U}e$ le sous-ensemble de Homeo(X) formé des homéomorphismes uniquement ergodiques, i.e. $\mathcal{U}e = \{f \in \text{Homeo}(X) \mid f \text{ est uniquement ergodique}\}$.

4.4. PROPOSITION. L'ensemble $\mathcal{U}e$ est un G_δ de Homeo(X).

Démonstration : Soit $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C^o(X)$ un ensemble dénombrable dense pour la topologie de la convergence uniforme (la norme est notée $\| \ \|$). On se donne $x_o \in X$. Soit E_i : $\text{Homeo}(X) \to \mathbb{R}_+$ la fonction semi-continue supérieurement définie par :

$$E_i(f) = \operatorname*{Inf}_{n\geq 1} \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (\varphi_i \circ f^j - \varphi_i \circ f^j(x_o)) \right\| .$$

On pose $\mathcal{C}_i = E_i^{-1}(0)$, c'est un G_δ de Homeo(X).

On vérifie aisément que si $f \in \mathcal{C}_i$ et μ_1 & μ_2 sont deux mesures de probabilité invariantes par f, alors $\mu_1(\varphi_i) = \mu_2(\varphi_i)$. Ceci implique l'inclusion $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_i \subset \mathcal{U}e$.

L'inclusion opposée $\mathcal{U}e \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_i$, est une conséquence immédiate de 4.3. Donc $\mathcal{U}e = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_i$ est une intersection dénombrable de G_δ, et est par conséquent un G_δ. □

4.5. COROLLAIRE. L'ensemble $\mathcal{S}e$ des homéomorphismes strictement ergodiques de X est un G_δ de Homeo(X).

Démonstration : Cela vient de 4.1 et 4.4. □

4.6. LEMME. Soit $t \in T^1 \to R_t \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$, une action localement libre de T^1 sur M^n. Soit V un ouvert de M^n qui coupe chaque orbite de l'action. Alors, si $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, il existe un entier k tel que $V \cup R_\alpha(V) \cup \ldots \cup R_\alpha^k(V) = M^n$.

Démonstration : Par compacité, il suffit de montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_\alpha^n(V) = M^n$. Soit $x \in M^n$, l'orbite de x est notée $O_x \simeq T^1/T^1_x \cong T^1$; $R_\alpha|O_x$ est une translation irrationnelle donc minimale sur O_x. Puisque $V_x = V \cap O_x$ est un ouvert non vide de O_x, on a alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (R_\alpha|O_x)^n(V_x) = O_x$. Il en résulte que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_\alpha^n(V) = M^n$. □

4.7. Soient M^n une variété C^∞ compacte et $\mathcal{F}$ un feuilletage C^∞ de M^n de codimension $p \neq n$. Si r est > 0, on note $D^p(r)$ le disque (fermé) $\{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq r\}$; et on note $\mathring{D}^p(r)$ l'intérieur de $D^p(r)$, i.e. $\mathring{D}^p(r) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| < r\}$. Un disque $D^p \hookrightarrow M^n$, difféomorphe à $D^p(r)$, est transverse à $\mathcal{F}$, s'il existe $\varepsilon > 0$ et un plongement $\varphi : \mathring{D}^p(r+\varepsilon) \hookrightarrow M^n$, tel que $\varphi(D^p(r)) = D^p$ et que φ soit transverse à $\mathcal{F}$ (i.e. si $x \in \varphi(\mathring{D}^p(r+\varepsilon))$, on a $T_x\mathcal{F} + T_x\varphi(\mathring{D}^p(r+\varepsilon)) = T_xM^n$).

On appelle intérieur de disque de D^p, l'image par φ de $\mathring{D}^p(r)$.

4.8. PROPOSITION. Il existe un nombre fini de disques D^p_i $(1 \leq i \leq k)$ transverses à $\mathcal{F}$ 2 à 2 disjoints et tels que la réunion des intérieurs de disque des D^p_i coupe chaque feuille de M^n.

Démonstration : On considère un recouvrement fini de M^n par les intérieurs de cartes distinguées $(V_i)_{1\leq i\leq \ell}$ difféomorphes à $D^{n-p}(1) \times D^p(1)$ par ψ_i $(1\leq i\leq \ell)$. On choisit ε assez petit pour que la réunion des $K_i = \psi_i(D^{n-p})(1) \times D^p(1-\varepsilon))$ recouvre M^n.

On choisit comme premier disque $D_1^p = \psi_1(0 \times D^p(1 - \frac{\epsilon}{2}))$. On suppose que l'on a construit pour $1 \leq j \leq \ell$ un nombre fini de disques D_k^p $(1 \leq k \leq k_j)$ 2 à 2 disjoints, transverses à $\mathfrak{F}$ et tels que la réunion des intérieurs de disque des D_k^p $(1 \leq k \leq k_j)$ coupe chaque feuille rencontrant $\bigcup_{1 \leq i \leq j} K_i$.

Il faut montrer que l'on peut gagner K_{j+1}. On pose $L = V_{j+1} \cap (\bigcup_{h=1}^{k_j} D_h^p)$. Le sous-ensemble L est un compact que l'on regarde à l'aide de ψ_{j+1} dans la carte $D^{n-p}(1) \times D^p(1)$. Pour $x \in D^p(1)$, on pose $L_x = L \cap (D^{n-p}(1) \times \{x\}) \subset D^{n-p}(1)$. Par la condition de transversalité, L_x est un sous-ensemble fini de $D^{n-p}(1)$.

4.9. LEMME. Soient $x \in D^p(1)$ et U_x un voisinage de L_x dans $D^{n-p}(1)$. Alors il existe un voisinage V_x de x dans $D^p(1)$, tel que, si $y \in V_x$, on ait $L_y \subset U_x$.

Démonstration : a) Puisque L est compact (donc fermé dans $D^{n-p}(1) \times D^p(1)$), si $(z,x) \notin L$, il existe un ouvert (en produit) $W_z \times V_x$ ne rencontrant par L ; par conséquent pour tout $y \in V_x$, on a $L_y \cap W_z = \emptyset$.

b) On recouvre le compact $D^{n-p}(1) - U_x$ de $D^{n-p}(1)$ par un nombre fini d'ouverts $W_{z_1}, \ldots, W_{z_k}$ construits en a). Si $y \in \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}$, on a clairement $L_y \subset U_x$. □

4.10. Fin de la démonstration de 4.8.

A l'aide de 4.9, on construit un recouvrement fini de $D^p(1 - \epsilon)$ par des disques B_i^p et une famille d'ouverts U_i de $D^{n-p}(1)$, tels que :

1) $B_i^p \subset D^p(1)$;

2) $D^{n-p}(1) - U_i$ est infini ;

3) Si $y \in B_i^p$, on a $L_y \subset U_i$.

On prend les disques D^p_k $(1 \leq k \leq k_j)$ auxquels on ajoute un disque pour chaque B^p_i. On choisit pour B^p_1, $z_1 \in D^{n-p}(1) - U_1$ et on ajoute le disque $\{z_1\} \times B^p_1$. On choisit pour B^p_2, $z_2 \in D^{n-p}(1) - (U_2 \cup \{z_1\})$ et on prend $\{z_2\} \times B^p_2$, et ainsi de suite. On épuise K_{j+1} en un nombre fini d'étapes. □

4.11. COROLLAIRE. Soit M^n une variété C^∞ compacte connexe avec une action localement libre de T^1. Soit U un ouvert non vide de M^n. Il existe un C^∞ difféomorphisme H de M^n, isotope à l'identité, tel que $H^{-1}(U)$ coupe chaque orbite de l'action de T^1.

Démonstration : Les orbites de l'action de T^1 définissent un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension $n-1$ sur M^n. Soit D^{n-1}_i $(1 \leq i \leq k)$ les disques donnés par 4.8. Il existe un C^∞ difféomorphisme H de M^n, isotope à l'identité tel que $H(\bigcup_{i=1}^{k} D^{n-1}_i) \subset U$ (voir [10], chapitre 8). $H^{-1}(U)$ coupe chaque orbite de l'action de T^1, puisqu'il contient $\bigcup_{i=1}^{k} D^{n-1}_i$. [Voici une esquisse de la construction de H. On inclut les D^{n-1}_i dans des disques D^n_i 2 à 2 disjoints, par exemple dans notre cas, on peut prendre $D^n_i = \{R_t x \mid x \in D^{n-1}_i$ et $t \in [0,\epsilon]\}$ où $\epsilon > 0$ suffisamment petit. On peut supposer $n \geq 2$, le cas $n = 1$ (i.e. $M = T^1$) se traite directement. On peut alors mener des arcs c_i 2 à 2 disjoints, c_i joignant D^n_i à U il existe des ouverts V_i $(1 \leq i \leq k)$, 2 à 2 disjoints, tels que chaque V_i soit difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ et soit un voisinage de $D^n_i \cup c_i$. On est alors ramené à construire un C^∞-difféomorphisme $H_i : V_i \to V_i$ à support compact et tel que $H_i(D^n_i) \subset V_i \cap U$. L'existence de H_i est fournie par le théorème d'isotopie de plongements de disques de Cerf-Palais et le théorème de prolongement d'isotopie de Thom.] □

4.12. COROLLAIRE. Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ premier aux stabilisateurs de l'action de T^1, $U \neq \emptyset$ un ouvert de M^n. Alors il existe un C^∞-difféomorphisme H de M^n tel que :

i) $H \circ R_{\frac{p}{q}} \circ H^{-1} = R_{\frac{p}{q}}$;

ii) $H^{-1}(U)$ <u>coupe toute orbite de l'action de</u> T^1 <u>sur</u> M^n.

<u>Démonstration</u> : Soit $G = \{i\frac{p}{q} \mid i = 1,\dots,q\}$ le sous-groupe de T^1 engendré par $\frac{p}{q}$. G agit librement sur M^n puisque $\frac{p}{q}$ est premier aux stabilisateurs de l'action.

$M^n \xrightarrow{\pi} M^n/G$ est un revêtement et l'action de T^1 passe au quotient en une action localement libre de T^1.

Par 4.11, il existe $\bar{H} : M^n/G \to M^n/G$ isotope à l'identité tel que $\bar{H}^{-1}(\pi(U))$ coupe toute orbite de l'action de T^1 sur M^n/G.

Soit H un G-relevé de $\bar{H}$, i.e. on écrit un G-isomorphisme C^∞ entre les G-fibrés $\xi : G \hookrightarrow M^n \to M^n/G$ et $H^*(\xi)$, un tel isomorphisme existe puisque $\bar{H}$ est isotope à l'identité.

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{H} & M^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M^n/G & \xrightarrow{H} & M^n/G \end{array}$$

Par construction, H commute avec l'action de G et i) suit.

ii) résulte aisément du fait que $\bar{H}^{-1}(\pi(U))$ coupe toutes les orbites de l'action de T^1 sur M^n/G. □

4.13. <u>Remarque</u> : On peut s'arranger pour que, dans 4.11, le difféomorphisme H préserve une mesure de densité C^∞ strictement positive donnée à l'avance. On en conclut que l'on peut supposer, dans 4.12, que le difféomorphisme H préserve une mesure de densité C^∞ strictement positive donnée à l'avance et invariante par l'action de T^1.

§ 5. - DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 1 et 2.

5.1. MÉTHODE.

Soit M^n compacte connexe avec une action localement libre de T^1 : $t \to R_t \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$. On considère (voir Anosov & Katok [2]) :

$$\mathfrak{S}^\infty(T^1) = \{g \circ R_t \circ g^{-1} \mid t \in T^1,\ g \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)\} \subset \mathrm{Diff}^\infty(M^n) .$$

Sur $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$, on met la C^∞-topologie. $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ est alors un groupe topologique polonais. Sur les sous-espaces de $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ on met la topologie induite par la C^∞-topologie. Noter que tout sous-espace fermé de $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ avec la C^∞-topologie est un espace de Baire.

On considère $\bar{\mathfrak{S}}^\infty(T^1)$ la fermeture de $\mathfrak{S}^\infty(T^1)$ dans $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ pour la C^∞-topologie. La démonstration du théorème 1 consiste à montrer que les difféomorphismes minimaux constituent un G_δ dense dans $\bar{\mathfrak{S}}^\infty(T^1)$ pour la C^∞-topologie (i.e. on les construit par catégorie de Baire).

5.2. EXEMPLE. Soit $\mathrm{Diff}^\infty_m(T^2)$ le groupe des difféomorphisme C^∞ de T^2 préservant la mesure de Haar m. Soit $\bar{\mathfrak{S}}^\infty_m(T^2)$ l'adhérence de $\{g^{-1} \circ R_t \circ g \mid t \in T^2,\ g \in \mathrm{Diff}^\infty_m(T^2)\}$ dans $\mathrm{Diff}^\infty_m(T^2)$ pour la C^∞-topologie. Comme l'ensemble des translations strictement ergodiques est dense dans l'ensemble $\{R_t \mid t \in T^2\}$, il suit de 4.5 que $\{f \in \bar{\mathfrak{S}}^\infty(T^2) \mid f \text{ est strictement ergodique}\}$ est un G_δ dense de $\bar{\mathfrak{S}}^\infty_m(T^2)$.

Le second auteur montrera ailleurs que la propriété suivante :

"f n'admet pas de feuilletage $\mathfrak{F}$ (de T^2) C^0 de codimension 1 invariant (i.e. f envoie chaque feuille de $\mathfrak{F}$ sur une feuille de $\mathfrak{F}$ pas nécessairement la même)" est vraie sur un ensemble qui contient un G_δ dense de $\bar{\mathfrak{S}}^\infty_m(T^2)$.

Il suit qu'il existe $f \in \mathrm{Diff}^{\infty}_m(T^2)$ minimal voisin de R_t dans $\mathrm{Diff}^{\infty}_m(T^2)$ (†) et non topologiquement conjugué à une translation, de plus f n'est pas sur un groupe à un paramètre.

Cet exemple montre aussi que $\mathcal{G}^{\infty}_m(T^2)$ est maigre dans son adhérence $\overline{\mathcal{G}}^{\infty}_m(T^2)$.

5.3. Anosov & Katok [2] ont montré que si M^n a une action effective de T^1 et si μ est une mesure de densité C^{∞} strictement positive laissée invariante par l'action, alors dans $\overline{\mathcal{G}}^{\infty}_{\mu}(T^1)$ (l'adhérence dans $\mathrm{Diff}^{\infty}(M^n)$ de $\{h \circ R_t \circ h^{-1} \mid h \in \mathrm{Diff}^{\infty}(M^n),$ $h_* \mu = \mu$ et $t \in T^1\}$) les difféomorphismes μ-ergodiques forment un G_{δ} dense.

5.4. <u>Démonstration du théorème 1</u>.

Soit U un ouvert non vide de M^n. On définit $\mathcal{V}_U = \{f \in \overline{\mathcal{G}}^{\infty}(T^1) \mid \exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $U \cup \ldots \cup f^k(U) = M^n\}$. L'ensemble $\mathcal{V}_U$ est (par la démonstration de 4.1) un ouvert de $\overline{\mathcal{G}}^{\infty}(T^1)$ pour la C^0-topologie et donc aussi pour la C^{∞}-topologie qui est plus fine.

5.5. <u>PROPOSITION</u>. <u>Pour tout ouvert non vide</u> U <u>de</u> M^n, <u>l'ensemble</u> $\mathcal{V}_U$ <u>est dense dans</u> $\overline{\mathcal{G}}^{\infty}(T^1)$ <u>(pour la C^{∞}-topologie)</u>.

<u>Démonstration</u> : Puisque les difféomorphismes de la forme $g \circ R_{\alpha} \circ g^{-1}$ ($\alpha \in T^1$, $g \in \mathrm{Diff}^{\infty}(M^n)$) sont denses dans $\overline{\mathcal{G}}^{\infty}(T^1)$, il suffit de voir que $g \circ R_{\alpha} \circ g^{-1} \in \overline{\mathcal{V}_U}$, pour tout $\alpha \in T^1$, et tout $g \in \mathrm{Diff}^{\infty}(M^n)$, où $\overline{\mathcal{V}_U}$ est l'adhérence de $\mathcal{V}_U$ dans $\mathrm{Diff}^{\infty}(M^n)$ pour la C^{∞}-topologie. Par ailleurs, il est clair que $g \circ R_{\alpha} \circ g^{-1} \in \overline{\mathcal{V}_U}$ si et seulement si $R_{\alpha} \in \overline{\mathcal{V}_{g^{-1}(U)}}$. Par conséquent on est ramené à montrer que, si U ($\neq \emptyset$) est un ouvert arbitraire de M^n, alors pour tout $\alpha \in T^1$, on a $R_{\alpha} \in \overline{\mathcal{V}_U}$. En utilisant le fait que les $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, tels que $\frac{p}{q}$ soit premier aux stabilisateurs, forment un sous-ensemble dense de T^1, on voit que l'on peut supposer que

(†) <u>Remarque</u> : Il existe des difféomorphismes minimaux de T^2 non homotopes à l'identité (et donc non conjugués à une translation), par exemple $(x,y) \in T^2 \to (x+y, y+\alpha)$, avec $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, est minimal (voir [8]).

$\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\frac{p}{q}$ premier aux stabilisateurs de l'action de T^1 sur M^n.

On choisit H comme en 4.12. Si $\alpha \to \frac{p}{q}$, on a $H \circ R_\alpha \circ H^{-1} \to H \circ R_{\frac{p}{q}} \circ H^{-1} = R_{\frac{p}{q}}$ dans la C^∞-topologie. Par construction de H (4.12, (ii)), U coupe toute orbite de l'action $t \to H \circ R_t \circ H^{-1}$. Par 4.6, on conclut que, si $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on a $H \circ R_\alpha \circ H^{-1} \in \mathcal{V}_U$. Il en résulte que $R_{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathcal{V}_U}$. □

5.6. Fin de la démonstration du théorème 1.

Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base d'ouverts (non vides) de M^n ; par 5.5 $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_{U_i}$ est un G_δ dense de l'espace de Baire $\overline{\mathcal{G}}^\infty(T^1)$, et est par conséquent non vide. Par 4.1, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_{U_i}$ est le sous-ensemble de $\overline{\mathcal{G}}^\infty(T^1)$ formé par les difféomorphismes minimaux. □

5.7. Remarque. Il existe toujours une mesure μ de densité strictement positive invariante par l'action de T^1. En effet, si ν est une mesure de probabilité sur M^n de densité C^∞ strictement positive, la mesure $\mu = \int_{T^1} R_{t*}\nu \, dt$ convient
Considérons $\mathcal{G}^\infty_\mu(T^1)$ le sous-ensemble $\mathcal{G}^\infty(T^1)$ défini par :

$$\mathcal{G}^\infty_\mu(T^1) = \{h \circ R_t \circ h^{-1} \mid t \in T^1,\ h \in \mathrm{Diff}^\infty(M),\ h_*\mu = \mu\}.$$

Si on utilise la remarque 4.13, la démonstration du théorème 1 permet de démontrer que, dans $\overline{\mathcal{G}}^\infty_\mu(T^1)$, il est générique d'être minimal.
Par conséquent, sur M^n, il existe un difféomorphisme minimal qui préserve une mesure de densité C^∞ strictement positive.

5.8. Esquisse de la démonstration du théorème 2.

On considère $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, \mathrm{Diff}^\infty(M^n))$ l'ensemble des homomorphismes de groupe de classe C^∞ de $\mathbb{R}^{k-1}$ dans $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$. On met sur $C^\infty(\mathbb{R}^{k-1} \times M^n, M^n)$ la topologie de la convergence C^∞ sur tout compact. Pour cette topologie, $C^\infty(\mathbb{R}^{k-1} \times M^n, M^n)$ est alors un espace séparable métrisable complet. $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, \mathrm{Diff}^\infty(M^n))$ s'identifie

à un fermé de $C^\infty(\mathbb{R}^{k-1} \times M^n, M^n)$ et est donc un espace séparable métrisable complet pour la topologie induite que l'on appelle la C^∞-topologie.

Soit $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, T^k)$ l'ensemble des homomorphismes de groupe C^∞ de $\mathbb{R}^{k-1}$ dans T^k.

L'action de T^k sur M^n est notée

$$t \in T^k \longrightarrow R_t \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n).$$

On définit un sous-ensemble $\mathcal{G}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$ de $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, \mathrm{Diff}^\infty(M^n))$ par :

$\mathcal{G}^\infty\mathrm{Hom}(T^k) = \{t \to g \circ R_{\varphi(t)} \circ g^{-1},\ t \in \mathbb{R}^{k-1} \mid \varphi \in \mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, T^k),\ g \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)\}$.

$\bar{\mathcal{G}}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$ est la fermeture de $\mathcal{G}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$ dans $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, \mathrm{Diff}^\infty(M^n))$ pour la C^∞-topologie.

Remarquons que les actions libres de $\mathbb{R}^{k-1}$ dans M^n, qui appartiennent à $\bar{\mathcal{G}}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$, forment un G_δ dense de $\bar{\mathcal{G}}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$. Il en résulte que pour démontrer le théorème 2, il suffit, par 1.4 et (la démonstration de) 4.1, de montrer la proposition suivante.

5.9. PROPOSITION. Soit U un ouvert non vide de M^n. Alors $\mathcal{V}_U = \{f_t \in \bar{\mathcal{G}}^\infty\mathrm{Hom}(T^k),\ t \in \mathbb{R}^{k-1} \mid \exists\, t_1, \ldots, t_q \in \mathbb{R}^{k-1}$ tels que $f_{t_1}(U) \cup \ldots \cup f_{t_q}(U) = M^n\}$ est un ouvert dense de $\bar{\mathcal{G}}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$.

Démonstration : Comme l'action de T^k est spéciale, les $\varphi \in \mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, T^k)$, tels que $\mathrm{Im}\,\varphi$ soit isomorphe à T^{k-1} et premier aux stabilisateurs de l'action de T^k sur M^n, forment un sous-ensemble dense dans $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, T^k)$, par le même raisonnement qu'en 5.5, il suffit de montrer le lemme suivant.

5.10 LEMME. Soit $T^{k-1} \subset T^k$ premier aux stabilisateurs de l'action de T^k sur M^n et U un ouvert non vide de M^n. Alors il existe un C^∞-difféomorphisme H de M^n tel que :

i) Pour tout $t \in T^{k-1}$, $H \circ R_t \circ H^{-1} = R_t$;

ii) $H^{-1}(U)$ coupe toute orbite de l'action de T^k sur M^n.

Démonstration : Puisque T^{k-1} agit librement sur M^n, on a un fibré principal $T^{k-1} \to M^n \xrightarrow{\pi} M^n/T^{k-1}$. Le quotient M^n/T^{k-1} admet une action localement libre de $T^k/T^{k-1} \simeq T^1$. On raisonne alors comme dans 4.12. □

§ 6. - ESQUISSE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.

6.1. Soit M^n une variété C^∞ compacte connexe avec une action localement libre de T^1. On pose $M^n/T^1 = B$, c'est un espace compact ; on note π la projection : $M^n \to B$. Remarquons que sur chaque $\pi^{-1}(b)$ $(b \in B)$, la mesure de Haar m_b est canoniquement définie ($m = dt$ = mesure de Haar sur T^1).

Rappelons le théorème du "slice" [4, § VI, 2]. Soient $x \in M^n$, O_x son orbite et q l'ordre du stabilisateur de x. Il existe un voisinage tubulaire T^1-équivariant de O_x, qui est T^1-difféomorphe à $(T^1 \times D^{n-1}(r))/G$, où G est le groupe cyclique d'ordre q engendré par : $(x,y) \in T^1 \times D^{n-1}(r) \longmapsto (x + \frac{1}{q}, Ay)$ avec $A \in O(n-1)$ et $A^q = id$. De plus O_x est l'image de $(T^1 \times \{0\})/G$.

6.2. On se donne $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$, une fonction C^∞ strictement positive en tout point de M^n.

On suppose que, pour tout b appartenant à B, la mesure μ_b définie par $d\mu_b = (\varphi \mid \pi^{-1}(b))dm_b$ est une mesure de probabilité.

LEMME. Il existe un C^∞-difféomorphisme $H : M^n \to M^n$, qui préserve chaque orbite de l'action de T^1, isotope à l'identité, et tel que, pour tout $b \in B$, $(H|_{\pi^{-1}(b)})_* \mu_b = m_b$.

Démonstration : (†) On considère d'abord le cas où $M^n = (T^1 \times D^{n-1}(r))/G$. Notons p la projection $T^1 \times D^{n-1}(r) \to (T^1 \times D^{n-1}(r))/G$. Soit $r' < r$, et $\gamma : [0,r] \to [0,1]$

(†) Nous remercions H. King pour nous avoir communiqué cette démonstration.

une fonction C^∞ telle que $\gamma([0,r'])=1$ et $\gamma=0$ dans un voisinage de r.

Définissons un difféomorphisme $\bar{H} : T^1 \times D^{n-1}(r) \longrightarrow T^1 \times D^{n-1}(r)$,

$$(t,x) \longmapsto (\bar{H}_1(t,x),x)$$

avec $H_1(t,x) = t + \gamma(\|x\|)\left(\frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}\int_0^{t+i/q}[\varphi \circ p(s,A^i x) - 1]\,ds\right)$. Remarquons que $\bar{H}$ commute avec G. Appelons H le difféomorphisme induit par $\bar{H}$ sur $(T^1 \times D^{n-1})(r))/G$.

Ce difféomorphisme vérifie les propriétés suivantes :

1° H est égal à l'identité au voisinage de $(T^1 \times \partial D^{n-1}(r))/G$. De plus, il est isotope à l'identité par une isotopie qui est l'identité dans un voisinage de $(T^1 \times \partial D^{n-1}(r))/G$;

2° H préserve chaque orbite de l'action de T^1 ;

3° Pour tout $b \in B$ tel que $\pi^{-1}(b) \subset (T^1 \times D^{n-1}(r'))/G$, on a $(H|\pi^{-1}(b))_*\mu_b = m_b$;

4° Si $\varphi_b = 1$, alors $H|\pi^{-1}(b)$ est l'identité.

Le cas général se déduit de ce qui précède grâce au théorème du "slice". □

6.3. LEMME. Soient U un ouvert non vide de M^n et ϵ un nombre réel strictement positif. Il existe un C^∞-difféomorphisme H de M^n, isotope à l'identité, tel que, pour tout $y \in M^n$, on ait :

$$m\{t \in T^1 \mid R_t y \notin H^{-1}(U)\} < \epsilon .$$

Démonstration : Par 4.11, il existe un C^∞-difféomorphisme H_1 de M^n, isotope à l'identité, tel que $H_1^{-1}(U)$ coupe toutes les orbites de l'action.

Il est facile de construire une fonction C^∞ $\psi : M^n \to \mathbb{R}_+$ telle que :

a) Support $\psi \subset H_1^{-1}(U)$,

b) Pour tout $b \in B$, $\int_{\pi^{-1}(b)} \psi\, dm_b = 1$.

Définissons $\varphi : M^n \to \mathbb{R}_+^*$ par $\varphi = (1-\epsilon)\psi + \epsilon$. La mesure μ_b sur T_b^1 définie par $d\mu_b = (\varphi|\pi^{-1}(b))dm_b$ est une mesure de probabilité. Le lemme 6.2 nous fournit un difféomorphisme H_2. Il suffit alors de poser $H = H_1 \circ H_2^{-1}$ pour obtenir un difféomorphisme qui convient. □

6.4. <u>COROLLAIRE</u>. <u>Soient</u> $\varphi \in C^0(M^n), \eta > 0$ <u>et</u> $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ <u>premier aux stabilisateurs</u>. <u>Il existe</u> $H \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ <u>et</u> $c \in \mathbb{R}$ <u>tels que</u> :

i) $H \circ R_{\frac{p}{q}} \circ H^{-1} = R_{\frac{p}{q}}$;

ii) <u>Pour tout</u> $x \in M^n$, $\left|\int_{T^1} \varphi \circ H \circ R_t(x)\,dt - c\right| < \eta$.

<u>Démonstration</u> : La première condition s'obtient en travaillant dans $\bar{M}^n$ le quotient de M^n par le groupe $G = \{R_{\frac{i}{q}} \mid i = 0,1,\dots,q-1\}$. La fonction $\bar{\varphi} = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1} \varphi \circ R_{\frac{i}{q}}$ s'identifie à une fonction sur $\bar{M}^n$. Notons que $\bar{M}^n$ a une action libre de $T^1 \simeq T^1/K_q$ où $K_q = \{0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}\} \subset T^1$. Quitte à retrancher à $\bar{\varphi}$ une constante, on peut supposer que $\bar{\varphi}$ s'annule en un point de $\bar{M}^n$. Considérons alors l'ouvert non vide de $\bar{M}^n$, $U = \{\bar{x} \in \bar{M}^n, |\bar{\varphi}(\bar{x})| < \epsilon\}$; en appliquant le lemme 6.3, on trouve un difféomorphisme $\bar{H}$ de $\bar{M}^n$ isotope à l'identité et tel que, pour tout $\bar{x} \in \bar{M}^n$, $m\{t \in T^1 \mid \bar{R}_t\bar{x} \notin \bar{H}^{-1}(U)\} < \epsilon$. On voit facilement que :

$$\left|\int_{T^1} \bar{\varphi} \circ \bar{H} \circ \bar{R}_t(x)\,dt\right| \leq \epsilon + \epsilon\,\|\bar{\varphi}\| < \eta \text{ , si } \epsilon \text{ est suffisament petit.}$$

Si on prend un G-relevé de $\bar{H}$ à M^n, on trouve le difféomorphisme H.

6.5. <u>Esquisse de la démonstration du théorème 3</u>.

Soient $\varphi \in C^0(M^n)$ et $\epsilon > 0$. Posons :

$$\mathcal{V}(\varphi, \epsilon) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(T^1) \mid \exists\, n \in \mathbb{N}^* \;\&\; c \in \mathbb{R} \text{ tels que } \|\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i - c\| < \epsilon\},$$

c'est un ouvert de $\mathcal{C}^\infty(T^1)$.

On voit facilement, par la démonstration de 4.4, que :

$$\mathcal{U}_e \cap \overline{\mathcal{G}}^{\infty}(T^1) = \bigcap_{i\geq 1} \bigcap_{k\geq 1} \mathcal{V}(\varphi_i, \tfrac{1}{k}) \ ,$$

où $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dense dans $C^0(M^n)$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Le théorème 3 résulte alors de la démonstration du théorème 1 et de la proposuivante puisqu'alors $\mathcal{S}_e \cap \overline{\mathcal{G}}^{\infty}(T^1)$ est un G_δ dense de $\overline{\mathcal{G}}^{\infty}(T^1)$ pour la C^∞-topologie.

PROPOSITION. Si $\varphi \in C^0(M^n)$ et $\varepsilon > 0$, $\mathcal{V}(\varphi,\varepsilon)$ est dense dans $\overline{\mathcal{G}}^{\infty}(T^1)$.

Démonstration : Par le même argument qu'en 5.5, il suffit de montrer que $R_{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathcal{V}(\mathcal{G},\varepsilon)}$, où $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ premier aux stabilisateurs et θ est une fonction arbitraire sur M^n.

Par la stricte ergodicité de la rotation R_α sur T^1, $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on a, si ψ appartient à $C^0(M^n)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ R_{i\alpha}(x) = \int_{T^1} \psi \circ R_t(x)\,dt$, et ceci uniformément en $x \in M^n$. En particulier, si H appartient à $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$, on a uniformément sur M^n :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \theta \circ H \circ R_{i\alpha} \circ H^{-1} = \int_{T^1} \theta \circ H \circ R_t \circ H^{-1} dt = \left[\int_{T^1} \theta \circ H \circ R_t dt\right] \circ H^{-1} \ .$$

La proposition résulte de 6.4 par un argument analogue à celui donné dans la démonstration de 5.5. □

La démonstration du théorème 4 se fait de la même manière que celle du théorème 3, en utilisant l'espace $\overline{\mathcal{G}}^{\infty}\mathrm{Hom}(T^k)$, introduit dans 5.8, à la place de $\overline{\mathcal{G}}^{\infty}(T^1)$.

RÉFÉRENCES

[1] D.V. ANOSOV, Existence of smooth ergodic flows on smooth manifolds, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser Mat, tom 38 (1974), traduction anglaise Math. USSR Izvestija, vol 8 (1974), p. 525-552.

[2] D.V. ANOSOV & A.B. KATOK, New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms, Trudy Moskov. Mat. Obsc, Tom. 23 (1970), traduction anglaise Trans. Moscow Math. Soc., vol 23 (1970), p. 1-35.

[3] A.A. BLOHIN, Smooth ergodic flows on surfaces, Trudy Moskov. Mat. Obsc, tom 27 (1972), traduction anglaise Trans. Moscow Math. Soc., vol 27 (1972), p. 117-134.

[4] G.E. BREDON, Introduction to compact transformation groups, Pure & Applied Mathematics 46, Academic Press (1972), New-York.

[5] I.U. BRONŠTEIN, Rasširenija minimal'nych grupp, Štiinca (1975), Kišinev (en russe).

[6] L.E.J. BROUWER, Be weis des ebenen Translation satzes, Math. Annalen vol 72 (1912), p. 37-54.

[7] F. FULLER, The existence of periodic points, Ann. Math. 57 (1953), p. 229-230.

[8] H. FURSTENBERG, Strict ergodicity and transformation of the torus, Amer. J. Math 83 (1961), p. 573-601.

[9] W.H. GOTTSCHALK & G.A. HEDLUND, Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 36, (1965), Providence.

[10] M.W. HIRSCH, Differential topology, Graduate texts in Mathematics 33, Springer Verlag (1976), Berlin, Heidelberg & New-York.

[11] A.B. KATOK, Minimal ' nye diffeomorphizmy na gljavnych S^1-fassloenijach, Tezisy VI, Vsesvjuznoj topologičekoj konferencii v Tblisi Mecniereba (1972), Tblisi (en russe).

[12] A.B. KATOK, Ergodic perturbation of degenerate integrable Hamiltonian systems, Izv. Akad. Nauk SSSR 37 (1973), traduction anglaise Math. USSR Ivz. 7 (1973), p. 535-571.

[13] H. KNESER , Regulare Kurvensharen auf Ringflächen, Math Ann. 91 (1924), p. 135-154.

[14] D. MONTGOMERY & L. ZIPPIN, Topological transformation groups, Interscience Tracts in pure & applied Mathematics 1, John Wiley and Sons (1955), New-York.

[15] P. ORLIK, Seifert manifolds, Lecture Notes in Mathematics 291, Springer-Verlag (1972), Berlin, Heidelberg & New-York.

[16] J. OXTOBY, Stepanoff flows on the torus, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), p. 982-986.

[17] J. OXTOBY, Note on transitive transformations, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 23 (1937), p. 443-446.

[18] J. OXTOBY & S.M. ULAM, Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity, Ann. of Math. 42 (1941), p. 874-920.

[19] W. PARRY, A note on cocycles in ergodic theory, Comp. Math. 28 (1974), p. 343-350.

[20] P. WALTERS, Ergodic theory - Introductory lectures, Lecture notes in Mathematics, 458, Springer-Verlag (1975), Berlin, Heidelberg & New-York.

A. FATHI
Université Paris-Sud
Centre d'Orsay
Bâtiment 425

91405 ORSAY CEDEX
FRANCE

M. HERMAN
Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique

91128 PALAISEAU CEDEX
FRANCE