

Astérisque

ROGER PAYSANT-LE ROUX

**Transformation par une fonction homographique
d'une fraction continue périodique**

Astérisque, tome 41-42 (1977), p. 251-253

http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__251_0

© Société mathématique de France, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMATION PAR UNE FONCTION HOMOGRAPHIQUE
 D'UNE FRACTION CONTINUE PÉRIODIQUE

par

Roger PAYSANT-LE ROUX

Soit α un nombre réel quadratique (éventuellement rationnel) donné ; notons

$$(a_0, a_1, \dots, a_{h-1}, \overline{a_h, \dots, a_{h+k-1}})$$

la fraction continue régulière représentant le nombre α .

Nous désignerons par $\text{Pr}(\alpha)$ le nombre de termes de la prépériode et par $P(\alpha)$ le nombre de termes de la plus courte période.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 à coefficients entiers rationnels premiers entre eux de déterminant n non nul.

A. Schinzel (1) montre que

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Q}} \frac{\text{Pr}(M\alpha)}{\text{Pr}(\alpha)}, \quad \sup_{\alpha \in \mathbb{Q}} \frac{P(M\alpha)}{P(\alpha)}$$

existent. (On note $M\alpha$ le nombre $\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$, et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des réels quadratiques).

Notre but est d'avoir la valeur ou une estimation de ces bornes supérieures.

En 1973, M. Mendès-France (2) montre l'égalité :

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Q}} \frac{\text{Pr}(n\alpha)}{\text{Pr}(\alpha)} = \sup_{0 \leq i < n} L\left(\frac{i}{n}\right) = \theta(n)$$

où $L\left(\frac{i}{n}\right)$ est le nombre de termes de la fraction continue régulière de longueur impaire représentant le nombre rationnel $\frac{i}{n}$.

Plus récemment, M. Mendès-France (3) généralise ce résultat, il montre l'égalité :

$$\lim_{\alpha \in \mathbb{Q}} \frac{\Pr(M\alpha)}{\Pr(\alpha)} = \theta(n)$$

H. Cohen (4) et (5) montre l'inégalité :

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Q}} \frac{P(n\alpha)}{P(\alpha)} \leq \sum_{u \in P_n} L(\phi_n(u)) = \Theta(n)$$

où P_n est la droite projective sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Les deux membres sont égaux pour une infinité de n .

Nous généralisons ces résultats ainsi :

1) Quel que soit k entier positif ou nul et quel que soit α un nombre quadratique réel (éventuellement rationnel), tel que $P(\alpha) = k$, on a l'inégalité :

$$\Pr(M\alpha) \leq C + \Pr(\alpha) \cdot \theta(n)$$

où C est une constante indépendante de α .

2) Sous les mêmes hypothèses, on a

$$P(M\alpha) \leq k \cdot \Theta(n)$$

La technique que nous employons nous a été inspirée par un article de Georges N. Raney (6).

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- (1) A. SCHINZEL.- On some problems of the arithmetical theory of continued fractions. Acta Arithmetica, 6 393-413 (1961).
- (2) M. MENDES-FRANCE.- Sur les fractions continues limitées. Acta Arithmetica, 23 207-215 (1973).
- (3) M. MENDES-FRANCE.- The Depth of a rational number. A paraître.
- (4) H. COHEN.- Multiplication par un entier d'une fraction continue périodique. CRAS. 276 595-598 (19 février 1973).

FRACTION CONTINUE PÉRIODIQUE

- (5) H. COHEN.- Multiplication par un entier d'une fraction continue périodique.
Acta Arithmetica. 26 t.2 117-128.
- (6) G.N. RANEY.- On continued fractions and finite automata. Math. Ann. 206 207-215
(1973).

Roger PAYSANT-LE ROUX
Département de Mathématiques
Université de Caen
Esplanade de la Paix
14032 CAEN CEDEX