Astérisque

JEAN-MARC DESHOUILLERS

Quelques progrès récents dans la théorie analytique des nombres premiers

Astérisque, tome 41-42 (1977), p. 19-30

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__19_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 41-42 (1977) p.19-30

QUELQUES PROGRÈS RÉCENTS DANS LA THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES PREMIERS

par

Jean-Marc DESHOUILLERS

-:-:-:-

Bien que le problème de Goldbach (tout entier naturel pair supérieur à 2 est-il somme de deux nombres premiers ?) ne soit pas encore complètement résolu, des résultats partiels ont été obtenus récemment :

1. Tout entier pair assez grand est somme d'un nombre premier et d'un nombre admettant au plus deux facteurs premiers, comptés avec leur multiplicité. Chen Jing Run [1966].

2. Tout entier pair est somme d'au plus 26 nombres premiers. R. C. Vaughan [1975].

3. Si l'on note $E(X)$ le cardinal de l'ensemble des entiers pairs inférieurs ou égaux au nombre réel X qui ne sont pas somme de deux nombres premiers, H. L. Montgomery et R. C. Vaughan [1975] ont démontré l'existence de deux constantes strictement positives C et δ telles que $E(X)$ ne dépasse pas $CX^{1-\delta}$; on notera en outre que les constantes introduites sont effectivement calculables.

Le résultat de Chen J. R. a été présenté avec beaucoup de clareté par H. Halberstam [1974] dans le cadre des Journées Arithmétiques et il n'y a pas lieu d'y revenir ; en ce qui concerne le résultat de R. C. Vaughan, nous nous contenterons d'indiquer ici que la démonstration est basée, d'une part sur la méthode

développée par H. N. Shapiro et J. Warga [1950] pour démontrer (élémentairement) que tout entier assez grand est somme d'au plus 20 nombres premiers et d'autre part sur des majorations obtenues à l'aide du (grand) crible par H. L. Montgomery et R. C. Vaughan [1974]. La démonstration du troisième énoncé sera esquissée à la fin de ce texte (§. 5) ; auparavant, nous allons présenter quelques résultats concernant la répartition des nombres premiers ; compte tenu de l'intérêt intrinsèque du sujet, nous déborderons nettement du cadre de ce qui sera utilisé par la suite, sans pour autant chercher à être exhaustif.

§. 1. - Théorème des nombres premiers pour les progressions arithmétiques (évaluations du reste en moyenne)

Soit k un nombre entier supérieur ou égal à 1, et a un entier premier à k ; l'une des formes du théorème des nombres premiers pour les progressions arithmétiques est l'équivalence asymptotique des quantités

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{k}}} \log p \quad \text{et} \quad \frac{x}{\varphi(k)} \quad \text{lorsque } x \text{ tend vers l'infini ;}$$

soit $E(x ; k, a)$ la valeur absolue de la différence entre ces deux expressions ; de nombreux travaux récents portent sur l'évaluation de $E(x ; k, a)$ en moyenne (à défaut d'estimations individuelles) :

* La majoration (ineffective), valable pour tout nombre réel positif A :

$$\sum_{k \leq x^{\frac{1}{2}} (\log x)^{-4A-40}} \max_{(a,k)=1} \max_{y \leq x} E(y ; k, a) = O(x(\log x)^{-A})$$

due à E. Bombieri [1965] est particulièrement utile dans l'évaluation de fonctions arithmétiques liées aux nombres premiers (voir par exemple P. D. T. A. Elliot et H. Halberstam [1966]).

* M. B. Barban [1963] et indépendamment H. Davenport et H. Halberstam [1966] ont majoré $E(x ; k, a)$ en moyenne quadratique

$$\sum_{k \leq x^{\frac{1}{2}} (\log x)^{-A-5}} \sum^{*} E^2(x ; k, a) = O(x^2 (\log x)^{-A})$$

où l'astérisque signifie que la somme (en la variable a) est étendue à un système réduit de résidus modulo k.

Des évaluations de A. Lavrik [1960] concernant la représentation d'un entier pair comme différence de deux nombres premiers, H. L. Montgomery [1971] a déduit l'équivalence asymptotique, valide pour $Q \leq x$:

$$\sum_{k \leq Q} {}^{*} \sum E^2(x ; k, a) = Q x \operatorname{Log} Q + R(Q, x) ,$$

avec $R(Q, x) = O(Q x + x^2 (\operatorname{Log} x)^{-A})$ (pour tout A).

Dans une série d'articles récents, C. Hooley a étendu et précisé ces résultats ; en particulier dans les deux premiers articles [1975, a] et [1975, b], il a obtenu l'évaluation :

$$R(Q, x) = C Q x + O(x^{3/4} Q^{5/4} + x^2 (\operatorname{Log} x)^{-A}) ,$$

et, en admettant la validité de l'hypothèse de Riemann généralisée (cf. ci-dessous):

$$R(Q, x) = C Q x + O(x^{3/4} Q^{5/4} + x^{3/2 + \varepsilon}) .$$

Notons enfin l'équivalence, pour $x (\operatorname{Log} x)^{-A} \leq Q \leq x$:

$$\sum_{k \leq Q} \operatorname*{Max}_{y \leq x} {}^{*} \sum E^2(y ; k, a) \sim Q x \operatorname{Log} Q$$

due à C. Hooley [1975, c] et la majoration

$$\sum_{k \leq Q} {}^{*} \sum \operatorname*{Max}_{y \leq x} E^2(y ; k, a) = O(Q x \operatorname{Log}^3 x) ,$$

due à S. Uchiyama (citée par C. Hooley).

§. 2. - Méthode d'attaque

Le point de départ de toute étude de la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques a été introduit par G. Lejeune Dirichlet [1837] dans son célèbre mémoire : soit λ un caractère du groupe $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$; on définit le <u>caractère de Dirichlet</u> χ associé à λ par

$$\chi(n) = \begin{cases} \lambda \text{ (classe de } n \text{ modulo } k) & \text{si } (n, k) = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le mérite de ces "caractères" est double :

(i) Ce sont des fonctions <u>totalement multiplicatives</u> (c'est-à-dire que l'on a $\chi(n n') = \chi(n) . \chi(n')$ pour tout couple d'entiers n et n') ; cela implique la relation

(valable au moins dans le demi-plan Re $s > 1$) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1} \overset{\text{def}}{=} L(s, \chi) .$$

(ii) Les caractères modulo k engendrent le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ périodiques de période k et nulles sur les entiers non premiers à k ; en effet, on a pour tout entier a premier à k :

$$\sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi}(a)\, \chi(n) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{si } n \equiv a \pmod k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il résulte de (ii) qu'il suffit d'étudier les expressions $\sum_{p \le x} \chi(p) \operatorname{Log} p$ pour connaître la quantité $\sum_{p \le x,\ p \equiv a(k)} \operatorname{Log} p$, et de (i) proviennent les relations :

$L(s, \chi) \neq 0$ pour $\operatorname{Re} s > 1$, et par différentiation logarithmique :

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{m \ge 1} \sum_p \frac{\chi(p^m) \operatorname{Log} p}{p^{ms}} \overset{\text{def}}{=} \sum_n \frac{\chi(n)\, \Lambda(n)}{n^s} .$$

Par la majoration (triviale) :

$$\Big| \sum_{p \le x} \chi(p) \operatorname{Log} p - \sum_{n \le x} \chi(n)\, \Lambda(n) \Big| = O(x^{\frac{1}{2}} \operatorname{Log} x)$$

on ramène le problème initial à l'étude de la fonction sommatoire des coefficients d'une série de Dirichlet ; on dispose alors de moyens classiques (intégration complexe) permettant de relier cette fonction sommatoire au comportement de la série de Dirichlet elle-même ; dans le cas qui nous intéresse, après avoir prolongé la fonction $L(s, \chi)$ en une fonction méromorphe pour $\operatorname{Re} s > 0$, on obtiendra, pour $k \le T \le x^{\frac{1}{2}}$

$$(1) \qquad \sum_{n \le x} \chi(n)\, \Lambda(n) = \delta_\chi x - \sum_{\substack{0 \le \beta \le 1 \\ |\gamma| \le T}} \frac{x^\rho}{\rho} + O(\frac{x \operatorname{Log}^2 x}{T})$$

où δ_χ vaut 1 ou 0 selon que le caractère χ est le caractère principal (on le note χ_0) ou non, et où $\rho = \beta + i\gamma$ décrit les zéros de la fonction $L(s, \chi)$.

La formule (1) met en évidence le lien entre la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques et la répartition des zéros des fonctions L.

Avant d'énoncer les résultats récents concernant ces zéros, nous allons rappeler le résultat classique dû à E. Landau et A. Page (cf. Davenport [1967], chap. 14)

THÉORÈME. - Il existe une constante strictement positive c_1 telle que pour tout nombre réel $T \geq 2$, pour tout caractère primitif χ de module $k \leq T$ et tout nombre complexe $s = \sigma + it$ avec $\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\text{Log } T}$, $|t| \leq T$, $L(s, \chi)$ ne s'annule pas, avec au plus une exception $L(\tilde{\rho}, \tilde{\chi}) = 0$; dans ce cas, le caractère exceptionnel χ est quadratique ($\tilde{\chi}^2 = \chi_0$), et le zéro exceptionnel est réel (on le notera $\tilde{\beta}$), simple, et il existe une constante strictement positive c_2 telle que l'on ait $1 - \tilde{\beta} \geq \frac{c_2}{T^{\frac{1}{2}} \text{Log } T}$; en outre les constantes c_1 et c_2 sont effectivement calculables.

Mentionnons enfin que l'on conjecture parfois (hypothèse de Riemann généralisée) que tous les zéros de partie réelle positive de toutes les fonctions L ont une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$; la répartition "verticale" des zéros des fonctions L n'offrant pas de difficulté majeure (cf. H. Davenport [1967], ch. 16), on déduit aisément de l'H. R. G. et de la formule (1) la majoration $E(x ; k, a) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$.

§. 3. - Le zéro exceptionnel

Le terme (éventuel) de (1) correspondant au zéro exceptionnel croissant avec $\tilde{\beta}$, on a cherché à améliorer la majoration fournie par le théorème de Landau-Page. Ecrivons $\tilde{\chi}(n) = (\frac{\tilde{d}}{n})$ où $(-)$ est le symbole de Kronecker et où $|\tilde{d}| = \tilde{k}$ (conducteur du caractère $\tilde{\chi}$) ; les meilleures majorations de $\tilde{\beta}$ sont actuellement les suivantes :

* $1 - \beta > (\frac{6}{\pi} - \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}}}$ pour $\tilde{d} < 0$ et $\tilde{k} > c_1(\varepsilon)$

$1 - \beta > (\frac{6}{\pi^2} - \varepsilon) \frac{\text{Log } \tilde{k}}{\sqrt{\tilde{k}}}$ pour $\tilde{d} > 0$ et $\tilde{k} > c_2(\varepsilon)$,

où les constantes $c_1(\varepsilon)$ et $c_2(\varepsilon)$ sont effectivement calculables ; ce résultat, qui améliore ceux de H. Davenport [1966], et J. Pintz [197?], est dû à D. M. Goldfeld et A. Schinzel [1975].

* Si l'on ne s'attache pas à l'effectivité des constantes, on dispose du résultat beaucoup plus puissant dû à C. Siegel [1935] :

$$1-\tilde{\beta} > c(\varepsilon)\,\frac{1}{\tilde{k}^{\varepsilon}} \quad , \quad \text{pour tout } \varepsilon \text{ positif ;}$$

on notera que l'ineffectivité dans la constante dans le théorème de Siegel est la cause (unique) de l'ineffectivité de la constante impliquée dans le théorème de Bombieri.

§. 4. - Théorèmes de densité

On a déjà remarqué (cf. formule (1)) que les zéros des fonctions L intervenaient par des termes x^{ρ}, dont le module est x^{β} ; à défaut de pouvoir majorer directement β (régions sans zéros), il est parfois intéressant (par exemple, dans l'étude de la répartition des nombres premiers dans de petits intervalles) de savoir simplement que peu de zéros ont une abscisse supérieure à une valeur donnée, plus précisément on cherche à majorer $N(\alpha, T ; \chi)$, le nombre de zéros de $L(s,\chi)$ dans le domaine $\alpha \leq \sigma \leq 1$, $|t| \leq T$. Nous renvoyons le lecteur à M. Jutila [1975] pour un exposé complet des résultats récents concernant les théorèmes de densité des zéros des fonctions L et ne mentionnerons ici que quelques résultats typiques :

* Il existe une constante c telle que :

$$\sum_{\chi \bmod k} N(\alpha, T ; \chi) = O((kT)^{c(1-\alpha)})$$

Linnik [1944] avait déduit d'une forme légèrement plus faible de ce résultat (dû à E. Fogels [1965]) l'existence d'une constante Γ telle que le plus petit nombre premier congru à a (modulo k) est $O(k^{\Gamma})$.

* H. L. Montgomery [1970] a majoré la somme $\sum_{\chi \bmod k} N(\alpha, T ; \chi)$ par

$(kT)^{3(1-\alpha)/(2-\alpha)} (\mathrm{Log}\, kT)^{9}$ pour $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{4}{5}$ et par

$(kT)^{2(1-\alpha)/\alpha} (\mathrm{Log}\, kT)^{14}$ pour $\frac{4}{5} \leq \alpha \leq 1$;

la présence du facteur $\mathrm{Log}\, kT$ rend ce résultat inutilisable pour l'obtention du théorème de Linnik ; Montgomery (ibid. chap. 16) en a déduit la majoration :

$$(2) \qquad \sum_{n \leq X} \Lambda(n)\, e(\alpha n) \ll X Y^{-1/2}\, \mathrm{Log}^{17} X \quad ,$$

$Y \leq q \leq X Y^{-1}$, $1 \leq Y \leq X^{1/4}$, $(a,q) = 1$, $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq q^{-2}$.

* M. N. Huxley [1972] a obtenu la majoration :

$$N(\alpha, T; \chi_o) = O_\varepsilon(T^{12(1-\alpha)/5+\varepsilon})$$

d'où l'on déduit

$$p_{n+1} - p_n = O_\varepsilon(p_n^{7/12+\varepsilon}),$$

où p_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.

* P. X. Gallagher [1970] a trouvé la majoration

$$(3) \qquad \sum_{k \le T} \sum_{\chi}^{*} N(\alpha, T; \chi) = O(T^{c(1-\alpha)})$$

(comme précédemment, l'aspect nouveau et important de ce résultat est l'absence de terme T^{ε} ou $(\text{Log } T)^A$ dans la majoration) ; enfin, dans le cas où il y a un zéro exceptionnel, E. Bombieri [1973] a réduit la majoration d'un facteur $(1-\beta)\,\text{Log } T$; l'hypothèse qu'il existe un zéro exceptionnel assure donc une concentration plus grande des zéros vers la droite $\sigma = 1/2$ que ne le laisse prévoir le résultat général, phénomène comparable à celui découvert par M. Deuring [1933] et H. A. Heilbronn [1934] au sujet des régions dépourvues de zéros.

§. 5. - Majoration du cardinal de l'ensemble exceptionnel dans le problème de Goldbach

Définissons provisoirement la somme $S(\alpha)$ par $S(\alpha) = \sum_{p \le X} e(\alpha p)$, où $e(u) = e^{2i\pi u}$; l'intégrale $\int_0^1 S^2(\alpha)\, e(-\alpha n)\, d\alpha$ est égale au nombre de représentations de l'entier n en somme de deux nombres premiers si $n \le X$; pour majorer $E(X)$, il suffit donc de majorer le nombre d'entiers pairs inférieurs à X pour lesquels l'intégrale est nulle ; techniquement, on utilise la somme

$$S(\alpha) = \sum_{X^\gamma < p^\alpha \le X} \text{Log } p\; e(\alpha p^\alpha) = \sum_{X^\gamma < n \le X} \Lambda(n)\, e(\alpha n) \; ;$$

le nombre réel γ sera choisi ultérieurement dans $]0, 1[$.

Soit $\mathfrak{M}$ la réunion de tous les intervales (disjoints)

$$\mathfrak{M}(q, a) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{q X^{1-\gamma}}, \frac{a}{q} + \frac{1}{q X^{1-\gamma}}\right] \text{ pour } 1 \le a \le q \le X^\gamma, \ (a, q) = 1,$$

et soit m le complémentaire de $\mathfrak{M}$ dans $[X^{\gamma-1}, 1 + X^{\gamma-1}]$; écrivons

$$R_1(n) = \int_{\mathfrak{M}} S^2(\alpha)\, e(-\alpha n)\, d\alpha$$

et

$$R_2(n) = \int_{\mathfrak{m}} S^2(\alpha)\, e(-\alpha n)\, d\alpha \ ;$$

nous devons démontrer que $R_1(n)$ (qui est réel) est supérieur à $|R_2(n)|$, à peu d'exceptions près.

Dans un premier temps, cela est classique, on démontre que $|R_2(n)|$ est rarement grand ; d'après l'égalité de Parseval, on a en effet :

$$\sum_{n\le X} R_2^2(n) \le \sum_{n} R_2^2(n) = \int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^4\, d\alpha \le (\max_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|)^2 \int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^2\, d\alpha$$

appliquons de nouveau Parseval :

$$\int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^2\, d\alpha \le \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{X^\gamma < p \le X} \mathrm{Log}^2 p = O(X \,\mathrm{Log}\, X)\ ,$$

et la relation (2) nous fournit alors une majoration de $\max_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|$; on obtient ainsi la majoration $|R_2(n)| \le X^{1-\gamma/3}$; pour tout $n \in [X/2, X]$ avec au plus $O(X^{1-\gamma/3}\, \mathrm{Log}^{35} X)$ exceptions.

Soit maintenant α un élément de l' "arc majeur" $\mathfrak{M}(q,a)$; en écrivant $\alpha = \frac{a}{q} + \eta$, on a :

$$S(\alpha) = \varphi^{-1}(q) \sum_{\chi \bmod q} \chi(a)\, \tau(\bar{\chi})\, S(\chi, \eta)\ , \quad \text{où}$$

$$\tau(\bar{\chi}) = \sum_{h=1}^{q} \chi(h)\, e\left(\frac{h}{q}\right) \qquad \text{a pour module } q^{\frac{1}{2}} \text{ et où}$$

$$S(\chi, \eta) = \sum_{X^\gamma < n \le X} \chi(n)\, \Lambda(n)\, e(n\eta)\ ;$$

puisque η est petit (par définition de $\mathfrak{M}(q,a)$), la fonction $e(n\eta)$ varie lentement avec n, et pour avoir une idée de l'importance de $S(\chi,\eta)$, nous allons "sommer par paquets" ; soit $]Z, Z+L]$ un tel paquet.

(i) si χ est le caractère principal χ_0, la somme

$$\sum_{Z < n \le Z+L} \chi(n)\, \Lambda(n)\, e(n\eta) \quad \text{diffère peu de} \quad \sum_{Z < n \le Z+L} \Lambda(n)$$

et d'après la formule (1) on ne commettra pas une grande erreur en la remplaçant

par $e(Z\eta).L$ ou encore $\sum_{Z<n\leq Z+L} e(n\eta)$; on définit donc :

$$S(\chi_0,\eta) = \sum_{X^Y<n\leq X} e(n\eta) + W(\chi_0,\eta) .$$

(ii) S'il existe un caractère exceptionnel $\tilde{\chi}$ relativement à la valeur $T = X^Y$ et si $\chi = \tilde{\chi}\chi_0$ est associé au caractère primitif $\tilde{\chi}$, on pourra espérer remplacer la somme

$$\sum_{Z<n\leq Z+L} \chi(n)\Lambda(n)e(n\eta) \quad \text{par} \quad e(Z\eta)\left[-\frac{(Z+L)^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}} - \frac{Z^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}\right]$$

c'est-à-dire par

$$e(Z\eta).L.Z^{\tilde{\beta}-1} , \text{ ou encore par } \sum_{Z<n\leq Z+L} n^{\tilde{\beta}-1} e(n\eta) ;$$

on va donc poser :

$$S(\tilde{\chi}\chi_0,\eta) = \sum_{X^Y<n\leq X} n^{\tilde{\beta}-1} e(n\eta) + W(\tilde{\chi}\chi_0,\eta) .$$

(iii) Dans tous les autres cas, on pose :

$$S(\chi,\eta) = W(\chi,\eta) .$$

Notons que dans tous les cas, on a regroupé dans le terme $W(\chi,\eta)$ la contribution du dernier terme de la formule (1) et surtout des <u>zéros non exceptionnels</u> de la fonction L associée à χ.

Introduisons encore quelques définitions :

Si le caractère $\chi \pmod q$ est induit par un caractère primitif modulo r, on pose :

$$\left(\int_{|\eta|\leq r^{-1}X^{Y-1}} |W(\chi,\eta)|^2 d\eta\right)^{\frac{1}{2}} , \text{ et } W = \sum_{q\leq X^Y}{}^{*} \sum_{\chi \bmod q} W(\chi) ;$$

soit enfin

$$\mathfrak{S}(n) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) ;$$

on notera que pour tout eniter pair, $\mathfrak{S}(n) \gg n/\varphi(n)$.

Nous sommes en mesure de terminer la démonstration en distinguant deux cas :

(i) S'il n'existe pas de caractère exceptionnel on parvient sans trop de peine à :

$$(4) \qquad R_1(n) = \mathfrak{S}(n).\, n + O(X^{1-5\gamma/6}) + O(n\varphi^{-1}(n)(W\, X^{\frac{1}{2}} + W^2)).$$

La majoration (3) de Gallagher conduit alors (ce n'est pas trivial) à la majoration de W par $O(X^{\frac{1}{2}} \exp(-c_1 \gamma^{-1}))$; il s'ensuit que pour tout entier n pair :

$$R_1(n) = \mathfrak{S}(n).\, n + O(n\varphi^{-1}(n) X \exp(-c_2 \gamma^{-1})) \gg n\varphi^{-1}(n) X \gg X$$

dès que γ est assez petit.

(ii) Si, au contraire, il existe un caractère exceptionnel, un second terme principal intervient dans le second membre de (4) ; à l'exception d'au plus $O(X^{1-\gamma/2})$ entiers pairs compris entre $X/2$ et X, on démontre que ce terme principal est minoré (à constante près) par $n\varphi^{-1}(n)(1-\tilde{\beta})\, X \operatorname{Log} X$, et la majoration précédente du terme resté ne permet pas de conclure à la positivité de $R_1(n)$... Fort heureusement, nous pouvons utiliser alors le phénomène de Deuring-Heilbronn qui permet de gagner un facteur $(1-\tilde{\beta}) \operatorname{Log} X$ sur la majoration de W, et la démonstration s'achève comme précédemment.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

On trouvera une bibliographie assez complète concernant les articles antérieurs à 1970 dans Montgomery [1971] ; pour ce qui est des théorèmes de densité la bibliographie de Jutila [1975] est un bon complément.

I. - Livres et "Surveys"

M. B. BARBAN [1963], The large sieve method and its applications in the theory of numbers, Russian Math. Surveys 21 (1966), 49-103.

E. BOMBIERI [1974], Le grand crible dans la théorie analytique des nombres, Astérisque 18, Paris 1974.

H. DAVENPORT [1967], Multiplicative number theory, Markham Pub. Co., Chicago, ill., 1967.

M. JUTILA [1975], Recent progress in the theory of L functions, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (1975-1976) et séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1975-1976).

H. L. MONTGOMERY [1971], Topics in multiplicative number theory, Lecture notes 227, Springer-Verlag, Berlin 1971.

II. - Articles

E. BOMBIERI [1965], On the large sieve, Mathematika 12 (1965), 201-225.

CHEN JING RUN [1966], Kexue Tongbao 17 (1966), 385-386.

H. DAVENPORT and H. HALBERSTAM [1966], Primes in arithmetic progressions, Michigan Math. J. 13 (1966), 485-489.

M. DEURING [1933], Imaginär-quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl 1, Math. Z. 37 (1933), 405-415.

G. LEJEUNE DIRICHLET [1837], Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz keinen gemeinschaftlichen Factor haben, unendlich viele Primzahlen enthält, Abd. König. Preuss. Akad. Wiss. (1837), 45-81 (= werke 313-342).

P. D. T. A. ELLIOT and H. HALBERSTAM [1966], Some applications of Bombieri's theorem, Mathematika 13 (1966), 196-203.

E. FOGELS [1965], On the zeros of L functions, Acta Arith. 11 (1965), 67-96.

P. X. GALLAGHER [1970], A large sieve density estimate near $\sigma = 1$, Inventiones Math. 11 (1970), 329-339.

D. M. GOLDFELD and A. SCHINZEL [1975], On Siegel's zero, Annal. Scuol. Normale Sup. Pisa (4) 2 (1975), 571-583.

H. HALBERSTAM [1974], Chen's theorem in Journées arithmétiques de Bordeaux (281-293), Astérisque 24-25, Paris 1975.

H. A. HEILBRONN [1934], On the class number in imaginary quadratic fields, Quart. J. Math. 5 (1934), 150-160.

C. HOOLEY [1975, a], On the Barban-Davenport-Halberstam theorem I, J. reine ang. Math. 274/275 (1975), 206-223.

C. HOOLEY [1975, b], On the Barban-Davenport-Halberstam theorem II, J. London Math. Soc. (2), 9 (1975), 625-636.

C. HOOLEY [1975, c], On the Barban-Davenport-Halberstam theorem IV, J. London Math. Soc. (2, 11 (1975), 399-407.

M. N. HUXLEY [1972], On the difference between consecutive primes, Inventiones Math. 15 (1872), 164-170.

A. F. LAVRIK [1960], On the twin prime hypothesis of the theory of primes by the method of I. M. Vinogradov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 132 (1960), 1013-1015 = Soviet Math. Dokl. 1 (1960), 700-702.

Yu. V. LINNIK [1944], On the least prime in an arithmetic progression, I, The basic theorem, Mat. Sb. 15 (57)(1944), 139-178.

H. L. MONTGOMERY and R. C. VAUGHAN [1974], Hilbert's inequality, J. London Math. Soc. (2) 8 (1974), 73-82.

H. L. MONTGOMERY and R. C. VAUGHAN [1975], The exceptional set in Goldbach's problem, Acta Arith. 27 (1975), 353-370.

J. PINTZ [197?], Elementary methods in the theory of L-functions, II, to appear in Acta Arith.

H. N. SHAPIRO and J. WARGA [1950], On the representation of large integers as sums of primes I, Comm. Pure Appl. Math. 3 (1950), 561-573.

R. C. VAUGHAN [1975], On the estimation of Šnirel'man's constant, J. reine ang. Math. (to appear).

-:-:-:-

Jean-Marc DESHOUILLERS
Laboratoire de Mathématiques
et d'Informatique dépendant de
l'Université de Bordeaux I
associé au C. N. R. S.
351, cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX