Astérisque

PETER BUNDSCHUH

# Fractions continues et indépendance algébrique en $p$-adique

*Astérisque*, tome 41-42 (1977), p. 179-181

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__179_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 41-42 (1977) p.179-181

# FRACTIONS CONTINUES ET INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE EN P-ADIQUE

par

Peter BUNDSCHUH

1.- Fractions continues. Dans la première partie de cet exposé nous allons discuter quelques problèmes concernant les fractions continues sur $\mathbb{Q}_p$, p un nombre premier, introduites par Schneider [6]. Pour tout $\zeta \in \mathbb{Q}_p$ non nul, son algorithme donne un développement unique de la forme

$$\zeta = \frac{a_0}{b_0} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \ldots, \quad \text{(plus brièvement } \zeta = \left[\begin{matrix} a_0, \ldots, a_n, \ldots \\ b_0, \ldots, b_n, \ldots \end{matrix}\right]\text{)}$$

avec $a_\nu = p^{c_\nu}$, $c_\nu \in \mathbb{Z}$ et, pour $\nu \geqslant 1$, $c_\nu \geqslant 1$, $b_\nu \in \mathbb{Z}$ et $1 \leqslant b_\nu \leqslant p-1$. Bien sûr, ces fractions continues p-adiques peuvent être finies, et dans ce cas, $\zeta$ est rationnel. Notre premier théorème contient une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre p-adique soit rationnel.

THÉORÈME 1 [1]. *Soit $\zeta \in \mathbb{Q}_p$, $\zeta \neq 0$. Le nombre $\zeta$ est rationnel si et seulement si sa fraction continue p-adique est, ou bien finie, ou bien périodique de période 1 avec $a_n = p$, $b_n = p-1$ pour $n \geqslant n_0$.*

Comme Schneider l'a déjà mentionné dans son article, la question se pose maintenant de caractériser les $\zeta \in \mathbb{Q}_p$, algébriques de degré 2 sur $\mathbb{Q}$, par leurs fractions continues p-adiques. Naturellement l'analogue du théorème d'Euler est vrai : si la

fraction continue de $\zeta \in \mathbb{Q}_p$ est périodique avec une période différente de la forme indiquée dans notre théorème 1 , alors $\zeta$ est algébrique de degré exact 2 . Mais, en ce qui concerne l'analogue du théorème de Lagrange, rien n'est démontré jusqu'à présent ; quelques calculs pourraient indiquer que cet analogue n'est pas vrai.

2 .- Indépendance algébrique. Cette partie sera consacrée à la discussion de quelques théorèmes sur l'indépendance algébrique dans $\mathbb{Q}_p$ , dont la plupart ont été trouvés en collaboration avec R. Wallisser et seront publiés dans [2] . Des conséquences de notre résultat principal que nous ne citons pas ici sont premièrement l'analogue p-adique bien connu du théorème de Liouville sur l'approximation rationnelle de nombres algébriques p-adiques, et puis deuxièmement le théorème suivant qui donne un critère suffisant pour l'indépendance algébrique dans $\mathbb{Q}_p$ et qui est l'analogue d'un critère de W.M. Schmidt [5] dans le cas réel :

THÉORÈME 2. Soient $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ des entiers p-adiques tels que, pour tout $d \in \mathbb{Z}$, $d \geqslant 1$, il existe un $(n+1)$-uple $(p_1,\dots,p_n,q) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ , $q \neq 0$ avec

$$0 < |q\zeta_{k+1} - p_{k+1}|_p < (2\,\mathrm{Max}(|p_1|,\dots,|p_n|,|q|))^{-nd} \prod_{x=1}^{k} |q\zeta_x - p_x|_p^d$$

$(0 \leqslant k < n)$ . Alors $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ .

A l'aide de ce critère et d'un lemme trouvé par A. Durand [3] on peut construire effectivement des ensembles non dénombrables de nombres p-adiques tels que tout sous-ensemble fini est algébriquement indépendant sur $\mathbb{Q}$ . Le problème analogue dans le cas réel a été résolu pour la première fois par von Neumann [4] .

THÉORÈME 3. Les entiers p-adiques

$$\zeta(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} p^{c_m(\tau)} \quad , \quad c_m(\tau) = [2^{\tau^m}] \quad \text{avec} \quad \tau \in (1,\infty)$$

ont la propriété que tout sous-ensemble fini est algébriquement indépendant sur $\mathbb{Q}$ .

THÉORÈME 4. Les fractions continues p-adiques

$$\zeta^*(\tau) = \left[\begin{matrix} a_0, a_1, \ldots \\ 1\ ,1\ ,\ldots \end{matrix}\right] \quad \text{avec} \quad a_m = p^{c_m(\tau)}\ ,\ c_m(\tau) = [2^{\tau^m}]\ ,\ \tau \in (1,\infty)$$

sont des entiers p-adiques qui ont la même propriété que les $\zeta(\tau)$ du théorème 3.

Ce dernier théorème n'est pas encore contenu dans [2] ; mais parce que sa démonstration est très semblable à celle du théorème précédent nous renonçons à la donner ici.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE


[1] P. BUNDSCHUH.- p-adische Kettenbrüche und Irrationalität p-adischer Zahlen. El. Math. (à paraître).

[2] P. BUNDSCHUH und R. WALLISSER.- Algebraische Unabhängigkeit p-adischer Zahlen. Math. Ann. 221 (1976), 243-249.

[3] A. DURAND.- Un système de nombres algébriquement indépendants. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 280 (1975), 309-311.

[4] J.V. NEUMANN.- Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen. Math. Ann. 99 (1928), 134-141.

[5] W.M. SCHMIDT.- Simultaneous approximation and algebraic independence of numbers. Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 475-478.

[6] T. SCHNEIDER.- Über p-adische Kettenbrüche. Symposia Math. Vol. IV (1970), 181-189.



Peter BUNDSCHUH
Universität Köln
Mathematisches Institut
Weyertal 86-90
D-5000 KÖLN 41