Astérisque

G. VIENNOT

Quelques algorithmes de permutations

Astérisque, tome 38-39 (1976), p. 275-293
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__38-39__275_0>

© Société mathématique de France, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 38-39 (1976) p.275-293

QUELQUES ALGORITHMES DE PERMUTATIONS

G.Viennot

Les problèmes combinatoires relatifs aux permutations peuvent être considérés de deux points de vue assez différents : la"combinatoire pure" et le côté "algorithmique". Le but de notre exposé est de montrer que certains problèmes de ces deux domaines, considérés habituellement comme distincts, peuvent être en fait agréablement reliés entre eux. La présentation que nous donnons se veut introductive. Elle ne contient pas de démonstrations et reprend parfois des travaux publiés ailleurs sous une forme plus précise.

1. Introduction .

De nombreux problèmes combinatoires relatifs aux permutations sont des problèmes d'énumération et de dénombrement de certaines classes d'entre elles satisfaisant diverses contraintes. Certains de ces dénombrements permettent de retrouver quelques nombres ou polynômes remarquables de l'analyse classique comme par exemple les polynômes eulériens, les coefficients des développements en série

des fonctions elliptiques de Jacobi, les nombres tangents et sécants (ou nombres d'Euler) et les nombres de Genocchi, en rapport avec les nombres de Bernoulli. Les identités remarquables vérifiées par ces nombres et démontrées par les techniques classiques du calcul différentiel et intégral doivent alors apparaître comme le reflet de certaines propriétés de ces classes de permutations. Ces propriétés constituent ce que l'on peut appeler une théorie "géométrique" de ces nombres ou polynômes remarquables, théorie élaborée avec succès depuis plusieurs années notamment par D.Dumont, D.Foata et M.P.Schützenberger.

On se ramène à définir des classes d'objets combinatoires ayant le même dénombrement et le problème est d'expliciter une bijection faisant passer d'une classe d'objets à une autre. Ces bijections peuvent conduire à de nouvelles identités remarquables. Elles peuvent aussi s'avérer particulièrement utiles dans le dénombrement de certaines permutations ou dans l'étude de leurs propriétés combinatoires, un codage judicieux par un autre objet combinatoire permettant souvent de ramener le problème de dénombrement à un autre plus simple, ou de transformer une propriété en une autre plus aisée à manipuler (voir par exemple ci-dessous l'interprétation de Schensted du cardinal maximum des suites croissantes extraites d'une permutation).

Ces bijections sont définies la plupart du temps par récursivité sous une forme très "algorithmique". Certaines d'entre elles, introduites dans un but purement théorique, fournissent en même temps un algorithme assez performant, voir optimum.

D'autre part on peut considérer en Informatique Théorique la notion de permutation comme l'une des structures de base. Elle peut représenter les clefs d'une file d'articles. Si ces clefs ne sont pas toutes distinctes, on peut toujours s'y ramener en numérotant les clefs semblables par leur rang dans la suite. Les algorithmes de tri ou de recherche d'articles sont des algorithmes de permutations. Certains problèmes d'analyse de ces algorithmes (nombre de comparaisons en moyenne ou dans le cas le pire) reviennent à des problèmes de dénombrement de classes de permutations et de codage de permutations par des objets combinatoires.

Un exemple très classique et élémentaire est la méthode de tri dite "bubble sort" (voir Knuth [12] section 5.2.2.). L'analyse de l'algorithme se fait en codant une permutation par ce que l'on appelle sa table d'inversion ou code de Lehmer. Ceci est en fait une bijection entre les permutations sur n éléments et les fonctions sous-excédantes, c'est-à-dire les fonctions $f : [n]=\{1,\ldots,n\} \longrightarrow [n]$ telles que $f(i)\leqslant i$ pour tout i de [n].

Comme la structure de file, les structures d'arbres et d'arbres binaires sont constamment utilisées en Informatique. On verra ci-dessous que ces structures se ramènent en fait à considérer des permutations. Il existe en effet une bijection entre les permutations et certains arbres binaires appelés arbres binaires décroissants (voir Burge [1] et Françon [7]). On peut ainsi ramener certains problèmes algorithmiques relatifs aux arbres à des problèmes de manipulation de permutations.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples particuliers. Les paragraphes 2 et 3 sont deux exemples de codages de permutations par certains objets combinatoires. Nous renvoyons le lecteur à d'autres articles pour les applications combinatoires et informatiques. Le paragraphe 4 évoque quelques exemples de dénombrement de permutations en utilisant des algorithmes d'énumération.

Notations . Nous notons [n] l'ensemble des entiers $1,2,\ldots,n$ et Σ_n l'ensemble des permutations de [n]. Nous considérons une permutation σ de [n] comme un mot $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ écrit avec les n lettres distinctes $1,2,\ldots,n$. Nous utilisons le langage du monoïde libre : la concaténation de deux mots $u=x_1\ldots x_k$ et $v=y_1\ldots y_{k'}$ est notée $w=uv=x_1\ldots x_k y_1\ldots y_{k'}$. Le mot vide de longueur 0 est noté e.

2. Squelette d'une permutation.

Il existe une bijection entre les permutations Σ_n et les paires de tableaux de Young de même forme sur les lettres distinctes $1,2,\ldots,n$. On trouvera un très bon exposé de la question dans Knuth [12], section 5.1.4. Cette bijection

est définie par un algorithme, dit de Robinson-Schensted [14], [15], dont les propriétés combinatoires ont été largement étudiées (voir par exemple Schützenberger [16], Greene [3], Schensted [15]).

Cette théorie peut se mettre sous forme "géométrique" grâce à la notion de squelette d'une permutation, que l'on définit à partir de l'intersection des bords de certaines "zones d'ombres" du plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ relativement à un "éclairage" par l'un des coins. Le lecteur se repportera à Viennot [18] pour plus de détails et pour les démonstrations complètes. Nous rappelons ici la définition du squelette et donnons un algorithme optimum de construction.

A toute permutation $\sigma = x_1 \ldots x_n$ de Σ_n, on associe sa représentation plane $\mathcal{S}$ ensemble des points de $[n]\times[n]$ défini par :

(1) $\mathcal{S} = \{ (i, x_i) \in [n]\times[n] , \ 1 \leqslant i \leqslant n \}$.

Plus généralement une quasi-permutation est une partie τ de $[n]\times[n]$ vérifiant la condition :

(2) Quels que soient les éléments distincts (x,y) et (x',y') de τ on a $x \neq x'$ et $y \neq y'$.

Nous identifierons τ avec le mot $\tau(1)\ldots\tau(n)$ en les lettres $0,1,\ldots,n$ défini par :

(3) $\tau(i) = 0$ si τ n'a aucun point d'abcisse i

$= y$ si $(i,y) \in \tau$.

Nous considérons maintenant le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. L'ombre $\mathcal{O}(m)$ d'un point $m = (x,y)$ est l'ensemble des points (x',y') de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $x' \geqslant x$ et $y' \geqslant y$. L'ombre d'une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est la réunion des ombres de ses points. Une ligne saillante L de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est la frontière du fermé constitué par l'ombre d'une partie finie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si L est une ligne saillante de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe un et un seul ensemble de points $\{ m_i = (x_i,y_i) , i = 1,\ldots,k\}$ tel que :

(4)
$$\mathcal{S}\{ m_1, \ldots, m_k\} = \mathcal{S}(L)$$
$$x_1 < x_2 < \ldots < x_k$$
$$y_1 > y_2 > \ldots > y_k .$$

Les points $m_1, \ldots, m_k$ sont appelés <u>points saillants</u> de L et notés s(L). Les k-1 points $(x_2, y_1), \ldots, (x_i, y_{i-1}), \ldots, (x_k, y_{k-1})$ sont appelés <u>points rentrants</u> de L et notés r(L). Sur la figure 2.1 les points saillants des lignes saillantes dessinées sont marqués par un rond, les points rentrants par une croix.

On vérifie aisément le lemme :

LEMME 2.1. <u>Soit σ une permutation de $[n]$. Il existe un et un seul ensemble de lignes saillantes $\{L_1, \ldots, L_m\}$ tel que :</u>

(i) <u>Les lignes $L_1, \ldots, L_m$ sont deux à deux disjointes.</u>

(ii) $$\bigcup_{i=1,\ldots,m} s(L_i) = \hat{\sigma}$$

EXEMPLE 2.1. La permutation $\sigma = 374918625$ de Σ_9 est représentée géométriquement par la figure 2.1 sur laquelle on a dessiné les trois lignes saillantes vérifiant les conditions (i) et (ii) du lemme 2.1.

Fig. 2.1

On peut alors poser la définition suivante :

DÉFINITION 2.1. On appelle squelette d'une permutation σ de $[n]$ la partie de $[n]\times[n]$ notée $Sq(\sigma)$ et définie par :

$$Sq(\sigma) = \bigcup_{i=1,\dots,m} r(L_i)$$

où $L_1, \dots, L_m$ sont les lignes saillantes définies par le lemme 2.1.

EXEMPLE 2.2. Sur la figure 2.1 les croix représentent le squelette de la permutation $\sigma = 374918625$ qui est la quasi-permutation de $[9]$ notée :

$$Sq(\sigma) = 007039846$$

Le squelette d'une permutation est une quasi-permutation dont l'intérêt provient de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. Une permutation est caractérisée par son squelette.

En somme l'application $\sigma \longrightarrow Sq(\sigma)$ est une injection de Σ_n dans l'ensemble des quasi-permutations de $[n]$.

Nous appelons support d'une quasi-permutation τ de $[n]$ l'ensemble $H\times V$ avec H (resp. V) désignant l'ensemble des $x \in [n]$ tels que $\exists z \in [n]$ avec $(x,z) \in \tau$ (resp. $(z,x) \in \tau$). Une quasi-permutation peut être considérée comme la représentation plane d'une permutation (sur $p \leqslant n$ éléments) relativement à son support. On peut itérer la construction faisant passer de σ à $Sq(\sigma)$. On construit ainsi les squelettes successifs de σ jusqu'à obtenir la quasi-permutation vide. La connaissance des supports des squelettes successifs de σ est un codage de σ. Nous avons montré en [18] que ce codage était équivalent à celui par une paire de tableaux de Young de même forme obtenus par l'algorithme de Robinson-Schensted.

Cette forme géométrique de l'algorithme permet de retrouver simplement les propriétés combinatoires connues de la bijection et aussi de donner une construction directe des suites k-croissantes et k-décroissantes de Greene [3] de cardinal maximum extraites d'une permutation (voir Viennot [18]). Rappelons le cas particulier classique des suites 1-croissantes (c'est-à-dire croissantes) du à Schensted [15] :

PROPOSITION 2.2. Le nombre d'éléments de la première ligne des tableaux de Young associés à une permutation par l'algorithme de Robinson-Schensted (c'est-à-dire le nombre de lignes saillantes définies par le lemme 2.1) est égal au cardinal maximum des suites s croissantes extraites de cette permutation

$$s = \{ x_{i_1} < \dots < x_{i_p} \} \quad \text{avec} \quad i_1 < \dots < i_p .$$

Les lignes saillantes du squelette d'une permutation σ définies par le lemme 2.1 permettent de construire géométriquement très simplement toutes les suites croissantes de cardinal maximum extraites de σ (voir [18]).

Knuth avait explicité un algorithme (voir [12] exercice 3, section 5.1.4.) permettant de calculer directement la première ligne des tableaux de Young associés à σ. Cet algorithme a été repris par Fredman [10] qui a donné un algorithme permettant d'extraire d'une permutation une suite croissante de cardinal maximum avec un nombre de comparaisons de paires (x_i, x_j) de l'ordre de $n\log n - n\log\log n + O(n)$. Il a montré de plus que cet algorithme était optimal dans le cas le pire (parmi les algorithmes définis par arbre binaire et utilisant des comparaisons d'éléments deux à deux (x_i, x_j)). Or il apparaît que le support du squelette de σ est un codage de la première ligne des deux tableaux de Young associés à σ et que la connaissance du squelette de σ (considéré comme permutation relativement à son support) est un codage de ce qui "reste" de la permutation lorsqu'on lui retire la première ligne des deux tableaux de Young. L'algorithme de Fredman permet ainsi de donner un algorithme de construction du squelette d'une permutation optimum dans le cas le pire et avec un nombre de comparaisons de l'ordre de $n\log n - n\log\log n + O(n)$.

Cet algorithme est défini par la procédure suivante :

```
procédure SQUELETTE(σ)
commentaire   SQUELETTE est le squelette de la permutation σ de [n] codé par le
    mot τ(1)...τ(n)  défini par (3) ;
début
    k ← 1 ;  T(1) ← σ(1) ;
    pour i ← 2 jusqu'à n faire
        si σ(i) > T(k) alors
            début
                k ← k + 1 ;
                T(k) ← σ(i) ;
                τ(i) ← 0
            fin
        sinon
            début
                soit m le plus petit entier 1 ≤ m ≤ k tel que σ(i)<T(m) ;
                τ(i) ← T(m) ;
                T(m) ← σ(i)
            fin
fin
```

EXEMPLE 2.3. Reprenons la permutation $\sigma = 374918625$ des exemples précédents. L'algorithme SQUELETTE revient à dresser la table suivante :

σ =	3	7	4	9	1	8	6	2	5
				9		8	6		5
		7	4					2	
	3				1				
Sq(σ)	0	0	7	0	3	9	8	4	6

La table est définie par les deux conditions suivantes :

(5) les nombres sur chaque ligne vont en décroissant de gauche à droite .

(6) la $i^{\text{ème}}$ colonne contient le seul nombre $\sigma(i)$ qui est placé sur la ligne la plus basse possible.

$Sq(\sigma)$ est alors obtenu en égalant $\tau(i)$ au nombre placé sur la même ligne et immédiatement à gauche de $\sigma(i)$, pour $i = 1, \ldots , n$ (on considère qu'il y a un zéro au début de chaque ligne de la table). Les lignes saillantes définies au lemme 2.1 correspondent aux lignes de la table.

Le nombre de comparaisons utilisées par cet algorithme est évidemment au plus $n\log n$. En commançant la recherche par arbre binaire du plus petit index m tel que $\sigma(i) < T(m)$ non pas au milieu mais par le plus grand élément $T(k)$ on gagne le facteur $n\log\log n$ (voir [10]).

Le lecteur se repportera à [18] pour l'étude et les applications de la notion de squelette. Le calcul du nombre de comparaisons necessaires pour la construction simultanée des squelettes successifs, c'est-à-dire des tableaux de Young associés à σ, reste ouvert.

3. Arbres et Permutations .

Une légère modification de l'algorithme de construction du squelette permet de coder les permutations par une autre classe d'objets combinatoires : les arbres.

Rappelons que l'on définit récursivement un arbre binaire par : un arbre binaire est soit vide, soit un triplet (g,r,d) où r est un noeud (la racine de l'arbre) et g (resp. d) est un arbre binaire. La racine de g (resp. d) est le fils gauche (resp. droit) de r . Un arbre binaire décroissant sur $[n]$ est un arbre binaire dont les noeuds sont les lettres $1,2,\ldots,n$ et tel que tout noeud est inférieur à ses fils non vides.

Il est aisé de voir que l'ensemble B_n des arbres binaires sur $[n]$ a pour cardinal $n!$. Une bijection entre B_n et Σ_n a été implicitement

définie par Foata et Schützenberger [4],[5] en vue de l'étude géométrique des nombres d'Euler (permutations d'André). Cette bijection a été reprise par Burge [1] et Françon [7]. Elle apparaît aussi avec Knuth [11], exercice 6 section 2.3.1, dans le cas particulier de la classe des permutations que l'on peut obtenir par une pile à partir de la permutation 12...n (ou permutations σ telles qu'il n'existe pas d'indices $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ vérifiant $\sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)$ et étudiées sous le nom de permutations de Catalan dans [9]).

Nous décrivons cette bijection $\pi : B_n \longrightarrow \Sigma_n$. Si b est un arbre binaire décroissant sur $[n]$, on définit $\pi(b)$ comme le mot obtenu en parcourant les noeuds de b en "ordre symétrique" (voir Knuth [11] section 2.3.1.) c'est-à-dire défini récursivement par la condition :

(7) Si b est vide, alors $\pi(b) = e$ mot vide

Si $b = (g,r,d)$, alors $\pi(b) = \pi(g)r\,\pi(d)$.

D'autre part pour une permutation $\sigma = x_1 \ldots x_n$ de $[n]$ et pour $x \in [n]$ nous notons $\lambda(x)$ et $\rho(x)$ les deux mots (éventuellement réduits au mot vide e) de longueur maximale vérifiant la condition :

(8) $\sigma = u\,\lambda(x)\,x\,\rho(x)\,v$ avec u et v deux mots en les lettres de $[n]$ et toutes les lettres des mots $\lambda(x)$ et $\rho(x)$ sont supérieures à x.

La factorisation de σ selon (8) apparaît dans [4] sous le nom de x-factorisation

Nous pouvons alors énoncer :

PROPOSITION 3.1. L'application π est une bijection entre B_n et Σ_n. l'application réciproque est définie par : le fils gauche (resp. droit) de $x \in [n]$ est vide si $\lambda(x) = e$ (resp. $\rho(x) = e$) et égal à la plus petite des lettres de $\lambda(x)$ (resp. $\rho(x)$) dans le cas contraire.

EXEMPLE 3.1. Pour la permutation $\sigma = 374918625$ des exemples précédents, l'arbre $\pi^{-1}(\sigma)$ est l'arbre binaire décroissant représenté par la figure 3.1 :

Fig 3.1

On verra dans Françon [7],[8] l'étude de certaines propriétés combinatoires de la correspondance π ainsi que quelques applications informatiques notamment aux files de priorité et aux arbres binaires de recherche (l'arbre binaire de recherche d'une permutation correspond en fait à l'arbre binaire associé à la permutation inverse). La bijection π est également particulièrement utile dans l'étude géométrique des nombres d'Euler et de Genocchi (voir [4], [5] ainsi qu'un article à venir de l'auteur et ceux de D.Dumont).

Une autre forme voisine de la notion d'arbre binaire décroissant est celle de forêt décroissante. Un arbre est la donnée d'une racine r et d'un ensemble d'arbres (éventuellement réduits à un noeud) et dont les racines sont appelés fils de r. Une forêt décroissante sur $[n]$ est un ensemble d'arbres dont les noeuds (distincts) sont les lettres $1,2,\ldots,n$ et tel que tout noeud est inférieur à ses fils. Si φ est une forêt décroissante sur $[n]$, on note $\omega(\varphi)$ l'application $f : [n] \longrightarrow \{0\}\bigcup[n-1]$ définie par la condition :

(9) $f(i)$ est le père de i c'est-à-dire le noeud dont i est un fils et est égal à 0 si ce noeud n'existe pas.

(On pourrait aussi convenir que 0 est le père des racines des arbres composant φ).

L'application ω est une bijection entre l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des forêts décroissantes sur $[n]$ et l'ensemble F_n des fonctions strictement sous-excédantes sur $[n]$ c'est-à-dire les fonctions $f : [n] \longrightarrow \{0\} \cup [n-1]$ telles que $f(i) < i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Rappelons la bijection classique $\theta : B_n \longrightarrow \mathcal{F}_n$ (voir Knuth [11] section 2.3.2) en donnant un exemple. Si b est l'arbre binaire de l'exemple 3.1 , $\theta(b)$ est la forêt définie par rotation de 45°, adjonction d'arêtes et suppression des arêtes horizontales selon le procédé indiqué par la figure 3.2 :

Fig. 3.2

On peut aussi définir directement la bijection $\theta \circ \pi^{-1} : \Sigma_n \longrightarrow \mathcal{F}_n$

Rappelons d'abord qu'un <u>élément saillant</u> (ou "left-to-right minimum" du mot $x_1 \ldots x_k$ en les lettres $1, 2, \ldots, n$ est une lettre x_i telle que :

(10) $$x_i = \inf (x_1, \ldots , x_i)$$

Remarquons que les éléments saillants d'une permutation correspondent aux points saillants du bord de son ombre (voir Fig. 2.1).

On peut alors énoncer :

PROPOSITION 3.2. Soit σ une permutation de Σ_n et $x \in [n]$. Les fils de x dans la forêt $\theta \circ \pi^{-1}(\sigma)$ sont les éléments saillants de $\rho(x)$. Les racines des arbres composants $\theta \circ \pi^{-1}(\sigma)$ sont les éléments saillants de σ.

Réciproquement si l'on part d'une forêt décroissante φ de $\mathcal{F}_n$, la permutation correspondante s'obtient en écrivant les fils d'un même noeud sous forme décroissante de gauche à droite, puis en parcourant la forêt à la manière du codage classique d'une forêt d'arbres (non étiquetés) par un mot de Dyck et en écrivant les noeuds dans l'ordre où ils apparaissent en montant (voir figure 3.3).

Fig 3.3

Nous avons introduit ici le codage avec les forêts décroissantes afin de donner un algorithme en temps linéaire permettant de construire l'arbre binaire associé à une permutation. Cet algorithme a été aussi défini par Burge [1] et sous une forme très voisine par Françon [8]. Le résultat nouveau ici est de donner une formule explicite du nombre de comparaisons effectuées. Nous écrivons cet algorithme sous la forme suivante :

procédure ARBRE(σ)

commentaire la forêt décroissante (ou l'arbre binaire décroissant) associée à la permutation σ de $[n]$ est définie par la fonction strictement sous-excédante $f = \omega \circ \theta \circ \pi^{-1}(\sigma)$;

```
début
    k ← 1 ; T(1) ← σ(1) ; T(0) ← 0 ;
    pour i ← 2 jusqu'à n faire
        si σ(i) > T(k) alors
            début
                f(σ(i)) ← T(k) ;
                k ← k+1 ;
                T(k) ← σ(i)
            fin
        sinon
            début
                soit m le plus petit entier 1 ≤ m ≤ k tel que σ(i) < T(m) ;
                f(σ(i)) ← T(m-1) ;
                T(m) ← σ(i) ;
                k ← m
            fin
fin
```

EXEMPLE 3.2. Pour la permutation $\sigma = 374918625$ l'algorithme décrit revient à dresser la table suivante :

$\sigma =$	3	7	4	9	1	8	6	2	5
				9					
		7	4			8	6	2	
	3				1				
$f \circ \sigma =$	0	3	3	4	0	1	1	1	2

La procédure se déduit de la procédure de construction du squelette en effaçant les termes du vecteur $T(1),\ldots, T(k)$ dont l'index est supérieur à celui m correspondant à une modification d'une valeur $T(m)$ et en écrivant pour chacune de ces modifications $T(m-1)$ au lieu de $T(m)$.

En terme géométrique celà signifierait que les lignes saillantes de la permutation σ définies au lemme 2.1 et codées par la table de l'exemple 2.3 sont obtenues par "étirement" des branches de la forêt $\theta \circ \pi^{-1}(\sigma)$ afin que les sommets situés à une même hauteur soient des entiers décroissants de gauche à droite.

Lorsque l'on cherche le plus petit entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant k$ et $\sigma(i) < T(m)$, effectuons les comparaisons selon la règle :

(11) On effectue toutes les comparaisons de $\sigma(i)$ avec $T(k), T(k-1), \ldots, T(m)$ et $T(m-1)$.

Notons $s_g(\sigma)$ (resp. $s_d(\sigma)$) le nombre d'éléments saillants (ou <u>saillants inférieur gauches</u>) (resp. <u>saillants inférieurs droits</u>) de σ c'est-à-dire ceux vérifiant la condition (10) (resp. (10)' $x_i = \inf(x_i, \ldots, x_k)$).

On peut alors donner la formule

PROPOSITION 3.3. <u>L'algorithme</u> ARBRE <u>calculé selon la règle</u> (11) <u>effectue un nombre de comparaisons</u> (x_i, x_j) <u>égal à</u> $2n - s_g(\sigma) - s_d(\sigma)$.

On peut ainsi retrouver la valeur moyenne $2n - 2H_n$ (avec $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$) donnée par Burge en considérant les tables d'inversions (à gauche et à droite) de σ . Remarquons que le nombre de comparaisons necessaires est toujours supérieur à $n-1$ puisque la connaissance de l'arbre implique celle de la position du minimum.

Il serait peut-être intéressant d'étudier plus en détail la similitude des deux algorithmes SQUELETTE et ARBRE .

4. Quelques algorithmes de construction et de dénombrement de permutations.

Nous terminons cet article en donnant quelques exemples de construction algorithmique de classes de permutations vérifiant certaines contraintes.

Une permutation $\sigma = x_1 \ldots x_n$ admet une montée (resp. descente) sur l'index i ou la valeur x_i ssi $x_i < x_{i+1}$ (resp. $x_i > x_{i+1}$). La forme de σ est le mot $v(\sigma)$ de longueur $n-1$ écrit avec les deux lettres $+$ et $-$ et défini par :

(12) pour $i = 1, \ldots, n-1$, la $i^{\text{ème}}$ lettre de $v(\sigma)$ est $+$ (resp. $-$) s'il y a montée (resp. descente) sur l'index i.

Un problème typique de dénombrement de permutations est de calculer le nombre $p(w)$ de permuations de $[n]$ ayant une forme donnée w.

Rappelons que si la forme est alternée (c'est-à-dire lorsque $w = - + - + \ldots$) alors le cardinal $p(w) = a_n$ cherché est le nombre tangent (resp. sécant) d'indice n impair (resp. pair) évoqué au paragraphe 1 :

(13) $$\sum_n a_n x^n/n! = \operatorname{tg} x + 1/\cos x$$

L'expression $p(w)$ est donnée sous forme de déterminant par Niven [13], comme une somme alternée par Carlitz [2] ou encore par Foulkes [6] en faisant intervenir les coefficients de multiplication des fonctions de Schur et le degré des représentations irréductibles du groupe symétrique (ou nombre de tableaux de forme donnée). Nous donnons ici une autre formule particulièrement simple.

Nous avons défini (voir [19]) un algorithme de construction des permutations ayant une forme donnée w en vue d'une implémentation dans le langage APL. On construit une suite de tableaux $T_1, \ldots, T_n$, chaqu'un d'eux T_k représentant l'ensemble des restrictions des inverses des permutations de la classe cherchée à $[k]$. Dans l'analyse de l'algorithme on arrive à une formule exacte de dénombrement en étudiant le passage de T_k à T_{k+1}.

Pour ceci, définissons les opérateurs (notés de droite à gauche) sur un vecteur d'entiers $V = (x_1, \ldots, x_k)$ par les conditions :

$$
\begin{aligned}
Vm &= (0, x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+x_2+\dots+x_k) \\
Vd &= (x_1+x_2+\dots+x_k, x_2+\dots+x_k, \dots, x_{k-1}+x_k, x_k, 0) \qquad (14) \\
V\Sigma &= x_1+\dots+x_k
\end{aligned}
$$

On a alors la formule :

PROPOSITION 4.1. Le nombre de permutations de [n] ayant la forme w est égal à

$$p(w) = (1)\,\overline{w}\circ\Sigma \qquad (15)$$

où $\overline{w}$ désigne l'opérateur obtenu en remplaçant dans le mot w la lettre + (resp. -) par l'opérateur m (resp.d) et la concaténation des lettres par la composition des opérateurs .

EXEMPLE 4.1. Pour n =6 et w= + - + + - , la formule (15) revient à dresser le tableau suivant dont chaque ligne représente une application de l'opérateur m ou d.

				1		
+			0	1		
-			1	1	0	
+		0	1	2	2	
+	0	0	1	3	5	
-	9	9	9	8	5	0

Alors $p(w) = (1)\,\overline{w}\circ\Sigma = 40$ est la somme des éléments de la dernière ligne.

Cet algorithme est l'un des plus simples de construction de classes de permutations satisfaisant à des contraintes sur les montées-descentes selon les indices ou valeurs, les comontées-codescentes (c'est-à-dire les montées-descentes de la permutation $\sigma^* = x_n \dots x_1$), les avances-reculs (c'est-à-dire les montées-descentes de la permutation inverse σ^{-1}) et les coavances-coreculs (c'est-à-dire les montées-descentes de $(\sigma^{-1})^*$. On se repportera à [9] pour un dénombrement des permutations ayant un système donné de montées-descentes et de comontées-codescentes sur les valeurs (ce qui revient au système appelé pics, creux , double montées et doubles descentes). D'autres dénombrements permettent de retrouver à nouveau les nombres d'Euler et de Genocchi. On trouvera dans Viennot [19] la construction des permutations ayant une forme donnée et un système donné d'avances,reculs; coavances, coreculs. Celle-ci conduit encore à une formule exacte de dénombrement permettant de démontrer la conjecture de Foata et Schützenberger

selon laquelle il y a équidistribution simultanée des avances et des coavances entre les pics et les creux des permutations ayant une forme donnée (voir [17]).

Remarquons enfin que tous ces algorithmes se prettent très bien à une implémentation en langage APL et qui est effectuée en collaboration avec J.M. Rifflet.

Remerciements . L'auteur remercie J.Françon, J.Vuillemin et S.G.Williamson pour quelques indications bibliographiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W.H.BURGE, An analysis of a tree sorting method and some properties of a set of trees, First USA-JAPAN Computer Conference (1972).

[2] L.CARLITZ, Permutations with a prescribed pattern, Math. Nachrichten 58 (1973) 31-53.

[3] C. GREENE, An extension of Schensted's theorem, Advances in Math., 14(1974) 254-265.

[4] D.FOATA et V.STREHL, Rearrangements of the symmetric group and enumerative properties of the tangent and secant numbers, Math.Z., 137(1974) 257-264.

[5] D.FOATA et M.P.SCHUTZENBERGER, Nombres d'Euler et permutations alternantes, in "A Survey of Combinatorial Theory", J.N.Srivastava and al., eds, North-Holland (1973).

[6] H.O.FOULKES, Enumeration of permutations with prescribed up-down and inversion sequences, Discrete Math., 15 (1976) 235-252.

[7] J.FRANÇON , Arbres binaires de recherche : propriétés combinatoires et applications, à paraître dans R.I.R.O.

[8] J.FRANÇON, Représentation d'une file de priorité par un arbre binaire, à paraître.

[9] J.FRANÇON et G.VIENNOT, Détermination des permutations selon leurs pics, creux montées et descentes, à paraître.

[10] M.L.FREDMAN , On computing the length of longest increasing subsequences, Discrete Math., 11 (1975) 29-35.

[11] D.E.KNUTH , The Art of Computer Programming, Vol.I, Addison Wesley (1973)

[12] D.E.KNUTH , The Art of Computer Programming, Vol III, Addison Wesley (1973)

[13] I.NIVEN, A combinatorial problem of finite sequences, Nieuw Archief voor Wiskunde, 16 (1968) 116-123.

[14] G.de B. ROBINSON, On the representations of the symmetric group, Amer.J. of Math., 60 (1938) 745-760.

[15] C.SCHENSTED , Longest increasing and decreasing sequences, Canad. J. of Math. 13 (1961) 179-192.

[16] M.P.SCHUTZENBERGER, La correspondance de Robinson, Table ronde "Combinatoire et représentation du groupe symétrique",Strasbourg, Mai 1976, à paraître aux "Lectures Notes in Math.".

[17] M.P.SCHUTZENBERGER, Quelques remarques sur une propriété d'équidistribution des permutations, Journées de Combinatoire et Informatique, Bordeaux, Juin 1975, publications de l'Université de Bordeaux, (1976).

[18] G.VIENNOT , Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted, Table ronde "Combinatoire et représentation du groupe symétrique", Strasbourg Mai 1976, à paraître aux "Lectures Notes in Math.".

[19] G.VIENNOT,, Equidistribution des avances et coavances des permutations ayant une forme donnée, à paraître.

Gérard VIENNOT
Centre de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75005 PARIS