

# *Astérisque*

M. P. SCHÜTZENBERGER

**Sur une caractérisation des parties reconnaissables  
d'un monoïde libre**

*Astérisque*, tome 38-39 (1976), p. 247-251

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1976\\_\\_38-39\\_\\_247\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__38-39__247_0)

© Société mathématique de France, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE CARACTÉRISATION DES PARTIES  
RECONNAISSABLES D'UN MONOÏDE LIBRE

par

M.P. SCHÜTZENBERGER

1.- INTRODUCTION

Une partie  $S$  d'un monoïde  $M$  est reconnaissable ssi il existe un morphisme  $\varphi$  de  $M$  dans un monoïde fini pour lequel  $S = S\varphi\varphi^{-1}$ . Une caractérisation remarquable de ces parties est donnée par S. Eilenberg (vol. A ; chap. XIII, Prop. 12.3) dans son traité "Automata, Languages and Machines". On se propose ici de montrer que dans le cas où  $M$  est le monoïde libre  $A^*$  (engendré par l'ensemble  $A$ ), on peut légèrement affaiblir les hypothèses de cet énoncé. Plus précisément, nous établirons la :

PROPRIÉTÉ .- Une condition nécessaire et suffisante pour que la partie  $S$  de  $A^*$  soit reconnaissable est l'existence d'un entier naturel  $n$  et de deux applications  $\lambda : A^* \rightarrow \mathbb{N}^n$  et  $\rho : A^* \setminus A^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}^n$  satisfaisant la condition que pour chaque  $a \in A^*$ ,  $f \in A^* \setminus A^{n+1}$  le produit scalaire  $a\lambda \cdot f\rho$  ait la valeur 1 ou 0 selon que  $af \in S$  ou non.

Il est trivial que la condition est nécessaire. En effet, soit  $S = S\varphi\varphi^{-1}$  où  $\varphi$  est un morphisme dans un monoïde  $P$  ayant  $n < \infty$  éléments. On peut considérer  $P$  comme un monoïde d'applications de  $P$  dans lui-même et associer à chaque mot  $a$  de  $A^*$  le  $P$ -vecteur ligne  $a\lambda$  (resp. colonne  $a\rho$ ) tel que pour chaque  $p \in P$  sa coordonnée  $a\lambda_p$  (resp.  $a\rho_p$ ) soit égale à 1 ou

à 0 selon que  $a\varphi = p$  ou non (resp.  $a\varphi.p \in S$  ou non). On a donc  $a\lambda.f\rho = 1$  ou 0 puisque  $a\lambda$  a exactement une coordonnée non nulle et  $a\lambda.f\rho = 1$  ssi  $a\varphi.f\varphi \in S\varphi$ .

Nous ne nous occuperons plus désormais que de la réciproque.

## 2.- VÉRIFICATION DE LA RÉCIPROQUE

Nous supposons remplies les conditions de l'énoncé. On pose  $F = A^* \setminus A^{n+1} A^*$  et on note  $\sigma$  la fonction caractéristique de  $S$  ( $a\sigma = 1$  ou 0 selon que  $a \in S$  ou non pour chaque mot  $a$  de  $A^*$ ). Il est clair que l'on peut supposer qu'aucune des coordonnées des vecteurs  $a\lambda$  ( $a \in A^*$ ) ou  $f\rho$  ( $f \in F$ ) n'est identiquement nulle. Comme  $(af)\sigma = a\lambda.f\rho$ , ceci entraîne que ces vecteurs aient toutes leurs coordonnées égales à 1 ou à 0.

Définissons deux relations d'équivalence sur  $A^*$  par les conditions :  $a \sim a'$  (resp.  $a(\sim)a'$ ) ssi  $(af)\sigma = (a'f)\sigma$  pour chaque  $f \in A^*$  (resp.  $f \in F$ ).

Il est bien connu que chaque relation  $a \sim a'$  implique  $ab(\sim)a'b$  et  $ab \sim a'b$  pour tout  $b \in A^*$  et que réciproquement  $ab(\sim)a'b$  pour tout  $b \in A^*$  entraîne  $a \sim a'$ . L'essentiel de la preuve est la remarque suivante :

2.1.- La relation  $a(\sim)a'$  implique  $a \sim a'$ .

Preuve.- Pour chaque indice  $j \leq n$ , soit  $r_j$  le  $F$ -vecteur ligne dont chaque coordonnée  $f$  est égale à la coordonnée  $j$  du  $n$ -vecteur colonne  $f\rho$  ( $f \in F$ ). Le sous-module  $R$  de  $\mathbb{Z}^F$  sous-tendu par les  $r_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) a donc dimension au plus  $n$ .

Soit, d'autre part,  $a\alpha$  pour chaque mot  $a$  de  $A^*$  le  $F$ -vecteur ligne dont chaque coordonnée  $f$  est égale à  $(af)\sigma$ . Comme  $(af)\sigma = a\lambda.f\rho$  ce vecteur est égal à la combinaison linéaire  $\sum_j a\lambda_j.r_j$  des vecteurs  $r_j$  et appartient donc à  $R$ . Pour la même raison, on a que chaque relation  $ab(\sim)a'b$  équivaut à  $(ab)\alpha - (a'b)\alpha = 0$ .

Supposons donc  $a(\sim)a'$  et qu'il existe un mot  $b$  pour lequel  $(ab)\alpha - (a'b)\alpha \neq 0$ . On peut prendre  $b = b_1 b_2 \dots b_m$  ( $m \geq 1$ ;  $b_1, b_2, \dots, b_m \in A$ ) de longueur minimale, ce qui fait que si  $f \in F$  est tel que les coordonnées  $(ab)\alpha_f$  et  $(a'b)\alpha_f$  sont différentes, on a  $f \in A^n$ . En effet, sinon on aurait :  $(ab')\alpha_{f'} \neq (a'b')\alpha_{f'}$ , avec  $b' = b_1, \dots, b_{m-1}$  et  $f' = b_m f \in F$ .

Soit  $\pi_j$  le morphisme de  $R$  dans lui-même annulant les coordonnées correspondant aux  $f' \in F$  de longueur  $> n - j$  ( $0 \leq j \leq n$ ). On vient de montrer que  $w_0 = (ab)\alpha - (a'b)\alpha$  satisfait  $w_0 \pi_1 = 0$  et  $w_0 \pi_0 \neq 0$ .

Plus généralement, soit  $f = a_1 a_2 \dots a_n$  ( $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ ) et pour chaque  $i$ ,  $b_i = b a_1 \dots a_i$ ,  $w_i = (ab_i)\alpha - (a'b_i)\alpha$ . Si  $f' \in F$  est de longueur au plus  $n - i$ , on a l'égalité  $(ab_i)\alpha_{f'} = (ab)\alpha_{f''}$  avec  $f'' = a_1 \dots a_i f' \in F$  puisque la valeur commune des deux membres est 1 ou 0 selon que  $ab_i f' = a b f''$  appartient ou non à  $S$ . La même observation s'applique aux  $(a'b_i)\alpha$  et il en résulte immédiatement que l'on a  $w_i \pi_{i+1} = 0$ ;  $w_i \pi_i \neq 0$  pour  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Ceci montre que les  $w_i$  constituent un système de  $n + 1$  vecteurs linéairement indépendants de  $R$  en contradiction avec  $\dim R \leq n$ . Par conséquent,  $ab(\sim)a'b$  pour tout  $b \in A^*$ , c'est-à-dire  $a \sim a'$ .

Q.E.D.

D'après la définition même de cette équivalence,  $S$  est une union de classe de  $\sim$ . Comme cette relation admet la multiplication à droite

il suffit, d'après la théorie classique, de vérifier qu'elle n'a qu'un nombre fini de classes. Pour cela, supposons que  $a\lambda = a'\lambda$ . Pour chaque  $f \in F$ , on a  $(af)\sigma = (a'f)\sigma$ , c'est-à-dire que  $a(\sim)a'$  et donc  $a \sim a'$  comme on vient de le montrer. Autrement dit, chaque classe de  $\sim$  est une union de parties de la forme  $v\lambda^{-1}$  où  $v \in V = \{a\lambda : a \in A^*\}$ , ce qui conclut la preuve puisque  $V$  a au plus  $2^n$  éléments.

Q.E.D.

### 3.- CAS AMBIGU

Nous considérons maintenant une formulation un peu différente de la

propriété et nous supposons qu'il existe  $n$  paires de parties  $X_i^! \subset A^*$  et  $Y_i^! \subset A^* \setminus A^{2^n} A^* = F^!$  telles que, pour chaque  $(a, f) \in A^* \times F^!$ , on ait  $a f \in S$  ssi  $a \in X_i^!$  et  $f \in Y_i^!$  pour au moins un indice  $i$ .

Observation.- Sous les hypothèses indiquées,  $S$  est une partie reconnaissable.

Preuve.- Pour chaque  $a \in A^*$ , soit  $a \lambda' = \{i \in [n] : a \in X_i^!\}$  où  $[n] = \{1 < 2 < \dots < n\}$ . Posons  $m = \text{Max} \{\text{Card } a \lambda' : a \in A^*\}$  et définissons  $Q$  comme l'ensemble des paires de la forme  $(i, \bar{q})$  où  $i \in [n]$  et où  $\bar{q}$  est une partie de  $[i-1]$  ( $= \emptyset$  pour  $i=1$ ) ayant au plus  $m-1$  éléments. Puisque  $Q$  est en bijection avec les parties non vides de  $[n]$  ayant  $m$  éléments au plus, on a  $\text{Card } Q \leq 2^n - 1$ .

A chaque mot  $a$  de  $A^*$ , on associe le  $Q$ -vecteur ligne  $a \lambda$  par la condition que si  $q = (i, \bar{q}) \in \bar{Q}$ , sa coordonnée  $a \lambda_q$  soit 1 ou 0 selon que l'on a ou non  $i \in a \lambda'$  et  $\bar{q} = a \lambda' \cap [i-1]$ .

De façon analogue, si  $f \in F$ , on pose  $f \rho' = \{j \in [n] : f \in Y_j^!\}$  et on définit le  $Q$ -vecteur colonne  $f \rho$  par la condition que  $f \rho_q = 1$  ou 0 selon que l'on a ou non  $j \in f \rho'$  et  $\bar{q} \cap f \rho' = \emptyset$  ( $q = (j, \bar{q})$ ).

Considérons un produit scalaire  $s = a \lambda \cdot f \rho$ . Par hypothèse  $a f \notin S$  ssi l'intersection  $I = a \lambda' \cap f \rho'$  est vide et dans ce cas  $s = 0$  d'après la définition des vecteurs  $a \lambda$  et  $f \rho$ . Dans le cas contraire où  $I$  est non vide, soit  $i$  son plus petit élément. Si  $\bar{q} = [i-1] \cap a \lambda'$ , les vecteurs  $a \lambda$  et  $f \rho$  ont tous les deux leur coordonnée  $(i, \bar{q})$  égale à 1, et par conséquent,  $s \geq 1$ . De fait, on a exactement  $s = 1$ . En effet, supposons que  $a \lambda_{q'} = a \rho_{q'} = 1$  pour un certain  $q' = (i', \bar{q}')$  de  $Q$ . On doit avoir  $i' \in I$  et  $\bar{q}' = [i'-1] \cap a \lambda'$  (d'après la définition de  $\lambda$ ). Ceci implique  $i' = i$  et donc  $\bar{q}' = \bar{q}$  puisque  $i' \geq i$  (d'après le choix initial de  $i = \text{Min } I$ ) ou en cas d'inégalité stricte, on aurait  $i \in \bar{q}' \cap f \rho'$  en contradiction avec  $f \rho_{q'} = 1$  (d'après la défini-

tion de  $\rho$ ). Par conséquent, on a identiquement  $(af)\sigma = a\lambda.f\rho$  pour tout  $a \in A^*$ ,  $f \in A^* \setminus A^{2^n} A^*$  et comme  $\text{Card } Q < 2^n$ , le résultat découle de la Propriété en remplaçant  $n$  par  $\text{Card } Q$ .

Q.E.D.

On notera que dans la Propriété il n'est pas possible de remplacer  $F$  par  $A^* \setminus A^{n'+1} A^*$  où  $n' < n$ . Considérons, en effet, le cas où  $A$  consiste en une seule lettre  $a$ , et, posant  $D = \{2^p : p \in \mathbb{N}\}$ , définissons les applications  $\lambda$  et  $\rho$  dans  $\mathbb{N}^2$  par :

$a^m \lambda = (1,0)$  si  $m \in D$  ;  $= (0,1)$  si  $m \in D+1$  ;  $= (0,0)$  dans les autres cas.

$$a\rho = (0,1) ; a^2\rho = (1,0).$$

On a donc que  $a^{m+2}\sigma = a^{m+1}\lambda.a\rho = a^m\lambda.a^2\rho$  est égal à 1 ou à 0 selon que  $m \in D+2$  ou non, ce qui donne la partie  $S = 1\sigma^{-1} = \{a^{2+d} : d \in D\}$  qui n'est évidemment pas reconnaissable.

\* \* \*

Marcel Paul SCHÜTZENBERGER  
 Département de Mathématiques  
 Université de Paris VII  
 Tour 45-55  
 2 place Jussieu  
 75005 PARIS