

Astérisque

GENEVIÈVE POURCIN

Grassmanniennes de MacPherson

Astérisque, tome 36-37 (1976), Séminaire Bourbaki, exp. n° IV, p. 79-85

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__79_0>

© Société mathématique de France, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GRASSMANNIENNES DE MAC PHERSON

par Geneviève POURCIN

Tout ce qui suit est extrait de ([1], ch. II, § 1 et ch. IV, § 2).

Le corps de base k est supposé algébriquement clos.

I - Introduction

Soient M une variété irréductible et X un sous-schéma fermé de M .

Soit $E_\bullet$ un complexe de fibrés sur M acyclique sur $M-X$

$$(E_\bullet) \quad 0 \longrightarrow E_r \longrightarrow \dots E_i \xrightarrow{d_i} E_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0$$

on note e_i le rang de E_i .

Soit $L(E_i, E_{i-1})$ le fibré des morphismes de E_i dans E_{i-1} ; il s'identifie à un ouvert du fibré en grassmanniennes

$$G_i = \text{Grass}_{e_i}(E_i \oplus E_{i-1})$$

des sous-espaces de dimension e_i de $E_i \oplus E_{i-1}$ par l'application qui en chaque point m de M associe à tout élément de $L((E_i)_m, (E_{i-1})_m)$ son graphe.

A tout morphisme de fibrés $f: E_i \longrightarrow E_{i-1}$ on associe donc la section $s(f)$ de G_i définie par

$$s(f)(m) = \{(v, f(v)) \mid v \in (E_i)_m\} \subset (G_i)_m.$$

Soit $G = G_r \times_M \dots \times_M G_1$; la projection $p: G \longrightarrow M$ est propre et au complexe $E_\bullet$ correspond la section $(s(d_i))_i$ de G . Pour tout $\lambda \in k$, on note s_λ la section $(s(\lambda d_i))_i$ de G ; on considère le plongement

$$\sigma: M \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow G \times \mathbb{P}^1$$

$$(m, \lambda) \longmapsto (s_\lambda(m), (1, \lambda))$$

et l'adhérence W de l'image de σ dans $G \times \mathbb{P}^1$; W est irréductible et pour tout $\lambda \in \mathbb{P}^1$ le cycle intersection

$$W_\lambda = [W] \cdot [G \times \{\lambda\}]$$

est défini ; on obtient ainsi une famille (W_λ) de cycles rationnellement équivalents sur G . On se propose d'étudier W_∞ .

Le paragraphe II donne une décomposition canonique de W_∞ dans le cas général, au paragraphe III on explicite cette décomposition dans le cas des intersections complètes.

On munit G du fibré virtuel $\xi = \sum_i (-1)^i \xi_i$ où ξ_i est le fibré canonique sur G_i .

II - Décomposition canonique de W_∞

LEMME 1.- Le morphisme σ se prolonge en un plongement (non fermé) de $M \times \mathbb{P}^1 - X \times \{\infty\}$ dans $G \times \mathbb{P}^1$.

Le complexe E , étant exact sur $M-X$, pour tout i , $\ker d_i|_{M-X}$ est un fibré et $W|_{M-X}$ est contenu dans la sous-variété fermée G_0 de $G|_{M-X}$ définie par

$$G_0 = \bigcap_i \text{Grass}_{e_i}(E_i \oplus \ker d_{i-1})|_{M-X}.$$

Si (λ_0, λ_1) désigne les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^1$, $(\infty = (0,1))$, et si $\lambda_0 \neq 0$, $\sigma(m, \lambda_0, \lambda_1)$ est l'ensemble

$$\{(z_i, z_{i-1}) \in (E_i \oplus \ker d_{i-1})_m \mid \lambda_0 z_{i-1} = \lambda_1 d_i(z_i)\}.$$

On prolonge σ en posant

$$\sigma(m, 0, 1) = (\ker d_i)_m \oplus (\ker d_{i-1})_m.$$

THÉOREME.- Le cycle W_∞ admet une décomposition canonique dans $Z_{\dim(M)}(G)$

$$W_\infty = Z + [M_*]$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) M_* est une variété irréductible, birationnellement équivalente à M par p et p induit un isomorphisme en dehors de X ,
- (ii) le cycle Z est dans $p^{-1}(X)$.

Il suffit de prendre pour M_* l'adhérence de $\sigma(M-X \times \{\infty\})$ dans W_∞ et $Z = W_\infty - [M_*]$.

III - Cas des intersections complètes.

On suppose maintenant que X est localement une intersection complète dans M de codimension p et que $F = \text{coker } d_1$ est un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre. Soit N le fibré normal à X , N est un fibré normal sur X localement trivial de rang p .

0. Quelques rappels.

Supposons X défini dans un ouvert U de M par la suite régulière $(f_1, \dots, f_p)$ et soit I le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_U$ engendré par $(f_1, \dots, f_p)$; le faisceau $\text{Hom}(I/I^2, \mathcal{O}_X)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X^p$ (i.e. le fibré normal N est trivial sur $U \cap X$). Soient $\tilde{N} = U \times \mathbb{A}^p$ et $\Lambda^* \tilde{N}$ le complexe de Koszul :

$$\delta_i : \Lambda^{i-1} \tilde{N} \longrightarrow \Lambda^{i-1} \tilde{N}$$

est défini par

$$\delta_i(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{i-1}}) = \sum_k (-1)^k f_{j_k} e_{j_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{j_k} \wedge \dots \wedge e_{j_{i-1}} .$$

$\Lambda^* \tilde{N}$ est une résolution de $\mathcal{O}_{X \cap U}$ minimale au sens de ([2], IV, app. 1) .

De plus, il résulte de la définition des δ_i que

$$\text{Tor}_{\mathcal{O}_U}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = H_i(\Lambda^* \tilde{N} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_X) = \Lambda^i N .$$

De même

$$\text{Tor}_{\mathcal{O}_U}^i(\mathcal{O}_X, F) = \Lambda^i N \otimes_{\mathcal{O}_X} F = H_i(E_\bullet \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_X) .$$

Enfin, si $F_U = (\mathcal{O}_{X \cap U})^q$, soit $\tilde{F} = \mathcal{O}_U^q$; la résolution minimale $\Lambda^* \tilde{N} \otimes_{\mathcal{O}_U} \tilde{F}$ de F s'identifie (non canoniquement) à un facteur direct de $E_\bullet|_U$ et l'on a

$$E_\bullet|_U = E'! \oplus E''!$$

où

$$E'! = \Lambda^* \tilde{N} \otimes_{\mathcal{O}_U} \tilde{F}$$

et où le complexe $E''!$ est exact sur tout U .

- Considérons $P = \mathbb{P}(N \oplus 1)$; c'est le fibré sur X obtenu en "ajoutant à chaque fibre de N des points à l'infini" ; soit H le fibré en hyperplans sur P défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \pi^*(N^\vee \oplus 1) \longrightarrow \mathcal{O}_P(1) \longrightarrow 0$$

où $\pi : P \longrightarrow X$ est la projection et $\mathcal{O}_P(1)$ le fibré canonique sur P .

On a

$$\Lambda^i_H \subset \Lambda^i \pi^*(N^\wedge \oplus 1) = \Lambda^i \pi^* N^\wedge \oplus \Lambda^{i-1} \pi^* N^\wedge$$

et au-dessus de N les Λ^i_H sont les graphes des différentielles du complexe de Koszul canonique $\Lambda^i \pi^* N^\wedge$ sur N . Soit alors j_1 le X -morphisme

$$j_1 : P \longrightarrow G_1 = \prod_i X \text{ Grass} \left(\begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} \right)_q ((\Lambda^i_H) \otimes F \oplus (\Lambda^{i-1}_H) \otimes F)$$

défini par

$$j_1(a) = ((\Lambda^i_H)_a \otimes F_{\pi(a)}) .$$

On vérifie que j_1 est un plongement.

- Les notations étant celles du théorème 1, on se propose de démontrer la proposition suivante

PROPOSITION.- (i) M_* est l'éclaté de M suivant X ,

(ii) Z est l'image de P par un plongement $j : P \longrightarrow G_X$ tel que

$$j^*(\xi) = \sum_i (-1)^i \Lambda^i_H \otimes p^* F ,$$

(iii) $Z.M_* = P_\infty$ où $P_\infty = \mathbb{P}(N)$ est l'hyperplan à l'infini de P ,

(iv) W est une intersection complète dans $G \times \mathbb{P}^1$.

1. Définition de j .

On va définir un plongement $j_2 : G_1 \longrightarrow G_X$ tel que $j = j_2 \circ j_1$ vérifie (ii).

Comme F est localement libre sur $\mathcal{O}_X$, pour tout i , $\ker(d_i|_X)$ et $H_i(E_* \otimes \mathcal{O}_X) = \Lambda^i N \otimes F$ sont $\mathcal{O}_X$ -localement libres. On a donc un plongement fermé

$$j'_2 : G_0 = \prod_i X \text{ Grass}_{e_i} (\ker d_i|_X \oplus \ker d_{i-1}|_X) \hookrightarrow G|_X$$

et les surjections $\ker d_i|_X \longrightarrow H_i(E_* \otimes \mathcal{O}_X) = \Lambda^i N \otimes F$ définissent par image réciproque un plongement fermé

$$j''_2 : \prod_i X \text{ Grass} \left(\begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} \right)_q ((\Lambda^i N) \otimes F \oplus (\Lambda^{i-1} N) \otimes F) \longrightarrow G_0 .$$

Il suffit alors de prendre $j_2 = j'_2 \circ j''_2$. On a bien

$$j^*(\xi) = \sum_i (-1)^i \wedge^i H \otimes p^*F .$$

Il nous reste à démontrer les assertions (i) et (iii) localement.

2. Description locale du morphisme σ du paragraphe I .

On suppose maintenant les fibrés F et N triviaux ; avec les notations

III.0 on a alors

$$E_{\bullet} = E'_{\bullet} \oplus E''_{\bullet}$$

où

$$E'_{\bullet} = \wedge^{\bullet} \tilde{N} \otimes \tilde{F}$$

et $E''_{\bullet}$ est exact sur M . On construit d'abord un morphisme

$$\tilde{j} : \mathbb{P}(\tilde{N} \oplus 1) \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow G \times \mathbb{P}^1$$

tel que

$$\tilde{j}|_{X \times \{\infty\}} = j .$$

Pour cela soit

$$G' = \prod_M \text{Grass}_{\binom{p}{i}_q} (\wedge^i \tilde{N}^{\wedge} \otimes F \oplus \wedge^{i-1} \tilde{N}^{\wedge} \otimes F)$$

$$G'' = \prod_i \text{Grass}_{e_i - \binom{p}{i}_q} (E''_i \oplus E''_{i-1}) .$$

On a un plongement fermé de $G' \times G''$ dans G .

- D'autre part, soient : $\tilde{H}$ le fibré en hyperplans sur $\tilde{P} = \mathbb{P}(\tilde{N} \oplus 1)$ défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{H} \longrightarrow p^*(\tilde{N}^{\wedge} \oplus 1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{P}}(1) \longrightarrow 0$$

et $j_1 : \tilde{P} \longrightarrow G'$ le morphisme défini par le "complexe de Koszul" $\wedge^{\bullet} \tilde{H} \otimes p^* \tilde{F}$.

- Soit $\sigma'' : M \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow G'' \times \mathbb{P}^1$ le plongement associé au complexe acyclique $E''_{\bullet}$ par le procédé du paragraphe I et du lemme 1 ; soit

$$j_2 : \tilde{P} \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{p \times 1} M \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sigma''} G'' \times \mathbb{P}^1$$

on pose alors $\tilde{j} = j_1 \times j_2$; au-dessus d'un point $(1, \lambda)$ de $\mathbb{P}^1$, $\tilde{j}_{\lambda}$ est défini par le complexe $\wedge^{\bullet} \tilde{H} \otimes p^*F \oplus (E''_{\bullet})_{\lambda}$ où $(E''_{\bullet})_{\lambda}$ est le complexe obtenu à partir de $E''_{\bullet}$ en multipliant les différentielles de $E''_{\bullet}$ par λ .

- Soient $f : M \longrightarrow \tilde{N}$ la section définie par $(f_1, \dots, f_p)$ et

$$\begin{aligned} \hat{f} : M \times \mathbb{A}^1 &\longrightarrow \tilde{N} \times \mathbb{P}^1 \subset \tilde{P} \times \mathbb{P}^1 \\ (m, \lambda) &\longmapsto (\lambda f(m), (1, \lambda)) \end{aligned}$$

Le morphisme $j \circ \hat{f}$ est associé aux complexes $(\mathcal{A}^* \tilde{N} \otimes F)_\lambda \circ (E'_\bullet)_\lambda = (E''_\bullet)_\lambda$
c'est donc le morphisme σ du paragraphe 1.

3. Fin de la démonstration de la proposition.

Comme $\tilde{j}$ est un plongement, il suffit d'étudier l'adhérence W de l'image de $\hat{f}$ dans $\tilde{P} \times \mathbb{P}^1 = M \times \mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^1$. Soient $(y_0, y_1, \dots, y_p)$ un système de coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^p$; W_∞ est alors défini par les équations

$$\begin{cases} \lambda_0 y_i = \lambda_1 f_i(x) y_0 \\ y_i f_j(x) = y_j f_i(x) \\ \lambda_0 \dots = 0 \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, p \quad .$$

On a donc $W_\infty = M_* \cup Z$ où
 M_* est l'éclaté de M suivant X ,
 $Z = X \times \mathbb{P}^p = \mathbb{P}(N \oplus 1)$,
 $Z \times_{W_\infty} M_* = X \times \mathbb{P}^{p-1} = \mathbb{P}(N)$.

4. Construction géométrique de W (donnée par A. Douady).

On suppose que X et M sont lisses et que $k = \mathbb{C}$; soit T un voisinage tubulaire de X ; T s'identifie au fibré en boules B_N du fibré normal N . Soit S_N le bord de B_N , S_N est un fibré en sphères de dimension $(2p-1)$.

La fibration de Hopf de ces sphères définit sur S_N une relation d'équivalence R dont les classes sont des cercles et le quotient S_N/R s'identifie à $\mathbb{P}(N)$.

La relation R étant prolongée par l'identité en dehors de S_N , B_N/R s'identifie à $\mathbb{P}(N \oplus 1)$ et $\mathbb{P}(N) = S_N/R$ à l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}(N \oplus 1)$.

D'autre part, $(M - B_N)/R$ est l'éclaté M_* de M suivant X ; en effet on a remplacé X dans M par $\mathbb{P}(N)$. Finalement on a

$$\begin{aligned}
 M/R &= M_* \bigcup_{\mathbb{P}(N)} \mathbb{P}(N \oplus 1) \\
 &= W_\infty \bullet
 \end{aligned}$$

- 1 BAUM-FULTON-Mac PHERSON - "Riemann-Roch for singular varieties".
- 2 SERRE - "Algèbre locale et multiplicités".