

Astérisque

MIREILLE DESCHAMPS

**Morphisme de Gysin et spécialisation du groupe de Chow
transformations naturelles du foncteur de Chow**

Astérisque, tome 36-37 (1976), Séminaire Bourbaki, exp. n° III, p. 64-78

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__64_0>

© Société mathématique de France, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MORPHISME DE GYSIN ET SPÉCIALISATION DU GROUPE DE CHOW
TRANSFORMATIONS NATURELLES DU FONCTEUR DE CHOW

par Mireille DESCHAMPS

Les parties I et II sont indépendantes

I. - MORPHISME DE GYSIN ET SPÉCIALISATION.

§ 1. Gysin.

0. Dans tout ce paragraphe, les schémas seront quasi-projectifs sur un corps k .

Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de schémas tel que O_Y soit de Tor-dimension finie sur O_X . Soit $z \in Z^k(X)$ un cycle réduit et irréductible tel que le support de f^*O_Z soit de codimension supérieure ou égale à k .

Posons :

$$\tilde{f}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i Z^k \operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_Y, O_Z) \quad (1)$$

Cette formule permet de définir, lorsque X est régulier, l'image inverse du cycle z .

Nous allons montrer que, sans hypothèse sur X , la formule (1) permet de définir une image inverse raisonnable, lorsque Y est un diviseur positif de "self-intersection" nulle.

1. Soient D un diviseur positif sur X et $i : D \longrightarrow X$ l'inclusion.

PROPOSITION.- Soit F un faisceau cohérent sur X dont le support est de codimension $\geq k$, et tel que $F|_D$ ait un support de codimension $\geq k$.

Alors le cycle $\sum_{i=0}^1 (-1)^i Z^k(\operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_D, F))$ ne dépend que du cycle $z = Z^k(F)$.

Si $F = O_V$, où V est réduite et irréductible

$$\sum_{i=0}^1 (-1)^i Z^k(\operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_D, O_V)) = Z^k(O_D \otimes O_V) .$$

La première assertion est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 1.- Soit A un anneau local, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ une suite A -régulière. Soit M un A -module de type fini tel que $M/\underline{\alpha}M$ soit de longueur finie. Notons $\chi(A/\underline{\alpha}, M) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i l(\text{Tor}_i^A(A/\underline{\alpha}, M))$. Alors $\chi(A/\underline{\alpha}, M)$ est positif ou nul, et il est nul si et seulement si la dimension de M est strictement plus petite que d .

Soit V une variété réduite et irréductible de codimension k telle que $i^*(O_V)$ ait un support de codimension k , c'est-à-dire telle que V ne soit pas contenue dans le support de D .

Quand on tensorise la suite exacte :

$$0 \longrightarrow O_X(-D) \longrightarrow O_X \longrightarrow O_D \longrightarrow 0$$

par O_V , elle reste donc exacte :

$$0 \longrightarrow O_V(-D) \longrightarrow O_V \longrightarrow O_V \otimes_{O_X} O_D \longrightarrow 0$$

donc

$$\sum_{i=0}^1 (-1)^i Z^k(\text{Tor}_i^{O_X}(O_D, O_V)) = Z^k(O_V \otimes O_D).$$

2. Supposons maintenant que $D = \text{div } t$, où t est une fonction sur X , régulière dans un voisinage de D .

Soit z un cycle irréductible et réduit de codimension k sur X .

Posons : $\tilde{i}(z) = Z^k(O_D \otimes O_z)$, si $z \not\subset D$

$\tilde{i}(z) = 0$, sinon.

En prolongeant par additivité, on définit donc un homomorphisme de groupe :

$$\tilde{i} : Z.X \longrightarrow Z.D.$$

Nous allons montrer que $\tilde{i}$ passe à l'équivalence rationnelle et permet de définir $i^* : \Lambda.X \longrightarrow \Lambda.D$.

Remarque.- Lorsque X est régulier, l'homomorphisme i^* ainsi défini coïncide avec l'image inverse, puisque lorsque z n'est pas contenu dans D , $i^*(z)$ est bien défini par la formule des Tor. D'autre part, avoir supposé que $\tilde{i}(z)$

est nul lorsque z est contenu dans D est bien naturel car avec les hypothèses faites sur D , z est alors rationnellement équivalent à un cycle qui ne coupe pas D .

3. Propriétés de $\tilde{i}$

Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas, D un diviseur effectif sur Y défini par une fonction régulière dans un voisinage de D et tel que le diviseur f^*D soit défini.

Soient $i : D \rightarrow Y$, $j : f^*D \rightarrow X$ les inclusions, $g : f^*D \rightarrow D$ le morphisme induit par f

a) Si f est propre, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z_*X & \xrightarrow{f_*} & Z_*Y \\ \tilde{j} \downarrow & & \tilde{i} \downarrow \\ Z_*(f^*D) & \xrightarrow{g_*} & Z_*D \end{array}$$

est commutatif.

b) Si f est plat, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z_*Y & \xrightarrow{f^*} & Z_*X \\ \tilde{i} \downarrow & & \tilde{j} \downarrow \\ Z_*D & \xrightarrow{g^*} & Z_*(f^*D) \end{array}$$

est commutatif.

c) $\tilde{i}_* \tilde{i}_* = 0$.

Démonstration.

a) Soit $[V]$ un cycle irréductible sur X . V est contenu dans le support de f^*D si et seulement si $f(V)$ est contenu dans le support de D , et dans ce cas : $g_* \tilde{j}[V] = \tilde{i}_* f_*[V] = 0$.

Sinon, on calcule $\tilde{i}$ et $\tilde{j}$ à l'aide de la formule des Tor, et le calcul fait dans le cas régulier reste valable ici et prouve le résultat.

b) Soit $[W]$ un cycle irréductible sur Y , de codimension k .

A cause de la platitude de f et de l'irréductibilité de W , W est contenu dans le support de D si et seulement si $f^{-1}(W)$ est contenu dans le support de f^*D , et dans ce cas : $\tilde{j}f^*[W] = g^*\tilde{i}[W] = 0$.

$$\text{Sinon : } g^*\tilde{i}[W] = Z^k[g^*i^*(O_W)]$$

$$\tilde{j}f^*[W] = Z^k[j^*f^*(O_W)]$$

et les deux cycles de droite sont égaux.

c) est vrai par construction.

Soient C une courbe lisse sur k , $f: X \rightarrow C$ un morphisme plat.

Soient t un point fermé de C , X_t la fibre de ce point, et $i: X_t \rightarrow X$ l'inclusion

$$\begin{array}{ccc} X_t & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \{t\} & \longrightarrow & C \end{array}$$

X_t est donc un diviseur sur X , de self-intersection nulle, et d'après ce qui précède, il existe un homomorphisme de groupes, gradué de degré -1

$$\tilde{i}: Z_*X \rightarrow Z_*X_t.$$

4. PROPOSITION.- $\tilde{i}$ est compatible avec l'équivalence rationnelle et l'équivalence algébrique.

Rappelons tout d'abord la définition de l'équivalence algébrique.

DEFINITION.- Soient X un schéma quasi-projectif sur k , z un cycle sur X . On dit que Z est algébriquement équivalent à 0 sur X s'il existe une courbe Σ , et deux points fermés σ_1 et σ_2 de Σ , un cycle z sur $X \times \Sigma$, tels que si $p_1: X \times \Sigma \rightarrow X$ et $p_2: X \times \Sigma \rightarrow \Sigma$ sont les deux projections, $Z \cdot \sigma_1$ et $Z \cdot \sigma_2$ soient définis, et $z = p_{1*}(Z \cdot ([\sigma_1] - [\sigma_2]))$.

La définition de l'équivalence rationnelle est la même en changeant Σ en $\mathbb{P}^1$. Nous ne ferons qu'une démonstration en indiquant, s'il est nécessaire, ce qui distingue l'équivalence rationnelle de l'équivalence algébrique.

a) Réduction au cas X irréductible.

On peut supposer que X est irréductible, et qu'il existe un morphisme $\alpha : X \rightarrow \Sigma$ tel que $z = \alpha^*[D]$ où $[D] = [\sigma_1] - [\sigma_2]$.

En effet, on veut montrer que, pour tout cycle irréductible Z sur $X \times \Sigma$, $\tilde{i}_{p_1}^*(Z \cdot [D])$ est équivalent à 0.

Soient $j : X_t \times \Sigma \rightarrow X \times \Sigma$, $\lambda : Z \rightarrow X \times \Sigma$, $\lambda_t : Z_t \rightarrow X_t \times \Sigma$ et $j' : Z_t \rightarrow Z$ les inclusions

$$\begin{array}{ccccc}
 Z_t & \xrightarrow{j'} & Z & & \\
 \lambda_t \downarrow & & \downarrow \lambda & & \\
 X_t \times \Sigma & \xrightarrow{j} & X \times \Sigma & \xrightarrow{p_2} & \Sigma \\
 p_{1t} \downarrow & & \downarrow p_1 & & \\
 X_t & \xrightarrow{i} & X & & \\
 \downarrow & & \downarrow f & & \\
 (t) & \longrightarrow & C & &
 \end{array}$$

$$\tilde{i}_{p_2}^*(Z \cdot [D]) = p_{1t}^* \cdot \tilde{j}'^*(Z \cdot [D])$$

- Si Z ne domine pas C, $Z \cdot [D]$ est contenu dans des fibres de f_{p_1} , donc son image par $\tilde{j}'$ est nulle.

- Sinon $\tilde{j}'^*(Z \cdot [D]) = \tilde{j}'^*(\lambda^*[Z] \cdot [D]) = \tilde{j}'^*(\lambda^*([Z] \cdot [D])) = \lambda_t^* \tilde{j}'^*([Z] \cdot [D])$
donc on est ramené à montrer que $\tilde{j}'^*([Z] \cdot [D])$ est équivalent à 0.

b) Supposons X irréductible.

f et α définissent un morphisme $(f, \alpha) : X \rightarrow C \times \Sigma$. Si (f, α) n'est pas dominant, l'image de X dans $C \times \Sigma$ est une courbe qui domine C et Σ , donc l'image réciproque de D dans cette courbe est formée de points, et $\alpha^*[D]$ est contenu dans des fibres de f, donc $\tilde{i}_{\alpha}^*[D]$ est nul.

c) Supposons X irréductible et (f, α) dominant.

LEMME 2.- Soient X et S deux variétés irréductibles, $f : X \rightarrow S$ un

morphisme dominant quasi-projectif. Soit $r = \dim X - \dim S$. Alors il existe des variétés V , X' , des morphismes ρ , ψ propres et birationnels, un morphisme F plat, tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{F} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

soit commutatif. Alors, pour tout point v de V , la dimension de $F^{-1}(v)$ soit inférieure ou égale à r .

De plus, si S est une surface lisse, on peut supposer que V est aussi lisse.

La démonstration du lemme sera faite ultérieurement.

d) Quitte à remplacer X par X' , on peut donc supposer que (f, α) se factorise :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & V \\ & \searrow (f, \alpha) & \downarrow \rho \\ & & C \times \Sigma \end{array}$$

où ρ et F sont des morphismes ayant les propriétés du lemme, et où V est une surface lisse, donc obtenue à partir de $C \times \Sigma$ en éclatant un nombre fini de points fermés

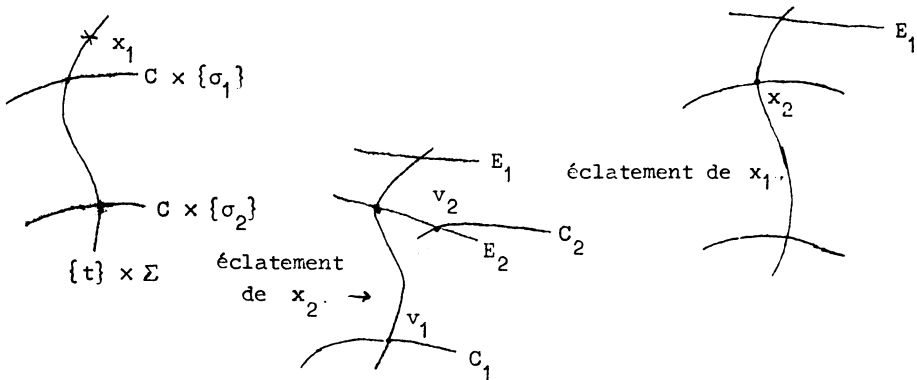
$$\alpha^*[D] = F^*\rho^*[C \times \{\sigma_1\}] - F^*\rho^*[C \times \{\sigma_2\}] .$$

Le diviseur $\rho^*[C \times \{\sigma_1\}]$ (resp. $\rho^*[C \times \{\sigma_2\}]$) est formé du transformé propre C_1 de $C \times \{\sigma_1\}$ (resp. C_2 de $C \times \{\sigma_2\}$) et de composantes ayant pour support des diviseurs exceptionnels, donc qui ont pour image dans C des points, et qui n'interviendront pas dans le calcul de $\tilde{I}$. On est ramené à montrer que $\tilde{I}[F^*C_1]$ et $\tilde{I}[F^*C_2]$ sont équivalents.

Soit $E = \rho^*[\{t\} \times \Sigma]$ le transformé total de $\{t\} \times \Sigma$, qui est formé de son transformé propre et de droites exceptionnelles. E est connexe et coupe

transversalement chaque courbe C_1 et C_2 en un seul point simple. C'est en effet une propriété vraie dans $C \times \Sigma$ et qui est conservée par chaque éclatement car, ou bien on éclate un point de la fibre $\{t\} \times \Sigma$ qui n'est pas un point d'intersection avec les sections $C \times \{\sigma_1\}$ et $C \times \{\sigma_2\}$ et rien n'est changé au voisinage de ces intersections, ou bien on éclate un point d'intersection, et puisque ce point est simple sur la section $C \times \{\sigma_i\}$ ($i = 1$ ou 2), le transformé propre de cette section est transversal au diviseur exceptionnel.

ex. :



LEMME 3.- Soit Δ une courbe lisse sur V qui coupe E transversalement en un point simple v . Soit L la composante de E qui contient v . Soient

$$X_L = F^*[L] ,$$

$$X_\Delta = F^*[\Delta] ,$$

et F_L la restriction de F à X_L de sorte qu'on a le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} X_L & \xrightarrow{F_L} & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{F} & V \end{array}$$

alors $\tilde{i}[X_\Delta] = F_L^*[v]$.

Démonstration.-

$F^*[\Delta]$ est bien défini puisque Δ est un diviseur, X est irréductible et

F dominant.

$F_L^*[v]$ est défini si la codimension dans X_L de $F^{-1}(v)$ est égale à 1, ce qui est vérifié à cause de la propriété des fibres de F.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \tilde{i}[X_\Delta] &= \Sigma(-1)^i Z^1 \text{Tor}_i^{O_X}(O_{X_\Delta}, O_{X_t}) , \\ F_L^*[v] &= \Sigma(-1)^i Z^1 \text{Tor}_i^{O_X}(O_{X_\Delta}, O_{\{v\}}) , \end{aligned}$$

or

$$\text{Tor}_i^{O_X}(O_{X_\Delta}, O_{X_t}) = \text{Tor}_i^{O_X}(O_{X_\Delta}, O_{X_E}) = \text{Tor}_i^{O_X}(O_{X_\Delta}, O_{X_L})$$

et puisque L et Δ se coupent transversalement en v et que F est équidimensionnel :

$$\text{Tor}_i^{O_X}(O_{X_\Delta}, O_{X_L}) = \text{Tor}_i^{O_X}(O_{\{v\}}, O_{X_L}) .$$

Il reste donc, pour terminer, à démontrer que les deux cycles $F_{L_1}^*[v_1]$ et $F_{L_2}^*[v_2]$, où L_1 (resp. L_2) est la composante de E qui coupe C_1 (resp. C_2) en v_1 (resp. v_2), sont algébriquement équivalents (resp. rationnellement équivalents, si $\Sigma = \mathbb{P}^1$), ce qui découlera du lemme suivant :

LEMME 4.- Tous les cycles $F_L^*[v]$ définis comme précédemment sont algébriquement équivalents (resp. rationnellement équivalents si $\Sigma = \mathbb{P}^1$).

Tous les points v appartenant à la même composante L (qui est soit une droite, soit une courbe isomorphe à Σ) sont algébriquement équivalents par définition, et le sont même rationnellement si $\mathbb{P}^1 = \Sigma$. Il suffit donc de voir que si v est le point d'intersection de deux composantes L et L' :

$$\text{Tor}_i^{O_X}(O_{\{v\}}, O_{X_L}) = \text{Tor}_i^{O_X}(O_{\{v\}}, O_{X_{L'}})$$

égalité qui est vraie car L et L' sont transversales en v.

e) Démonstration du lemme 2.

En prenant la clôture de X dans un espace projectif sur S, on se réduit au cas où X est un fermé dans $\mathbb{P}^n \times S$.

Il existe un ouvert S_0 de S au-dessus duquel X est plat, et détermine

donc un morphisme de S_0 dans le schéma de Hilbert de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$, soit $H(\mathbb{P}^n)$

$$C_0 : S_0 \longrightarrow H(\mathbb{P}^n) .$$

Soit V la clôture du graphe de C_0 dans $S \times H(\mathbb{P}^n)$, qui est propre sur S , puisque $H(\mathbb{P}^n)$ est un schéma dont les composantes sont projectives. (Si S est une surface lisse, on peut choisir pour V une surface obtenue à partir de S par une suite finie d'éclatements de points fermés, puisqu'on arrive par cette méthode à "lever l'indétermination" de n'importe quelle application rationnelle de V dans un schéma propre sur k). Soient $\rho : V \longrightarrow S$ et $C : V \longrightarrow H(\mathbb{P}^n)$ les deux projections. C définit un sous-schéma fermé X' de $\mathbb{P}^n \times V$, plat sur V , qui coïncide avec X sur S_0 . Puisque X' est plat sur V , ses composantes irréductibles dominent V , et puisqu'au-dessus de l'ouvert S_0 de V il n'y a qu'une composante X' est l'adhérence de $X \times_S S_0$ dans $\mathbb{P}^n \times V$.

On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{F} & V \\ \psi \downarrow & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

qui possède les propriétés cherchées.

5. DÉFINITION.— On appelle homomorphisme de Gysin, l'homomorphisme de groupes déduit de $\tilde{i}$ par passage au quotient. On le notera $i^* : A_*X \longrightarrow A_*X_t$.

Propriétés de i^* .

1) Il est compatible avec les morphismes propres et plats.

2) Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de X dans un schéma régulier Y , alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^*(Y) \otimes A_*(X) & \longrightarrow & A_*(X) \\ \downarrow 1 \otimes i^* & & \downarrow i^* \\ A^*(Y) \otimes A_*(X_t) & \longrightarrow & A_*(X_t) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont définies par l'intersection, commute.

1) est une conséquence des propriétés de $\tilde{i}$ pour les cycles.

2) il suffit de prendre un cycle irréductible sur X , $x = [V]$.

Soit y un cycle sur Y tel que $x \cdot_f y$ et $\tilde{i}(x) \cdot_f y$ soient définis

- si V est contenu dans X_t , $\tilde{i}(x \cdot_f y) = \tilde{i}(x) \cdot_f y = 0$;

- sinon, on se ramène au cas où $V = X$. Alors on peut bouger y dans sa classe d'équivalence de manière que $f^{-1}(y)$ ne soit pas contenu dans X_t .

L'égalité :

$$\tilde{i}([X] \cdot_f y) = \tilde{i}[X] \cdot_f y$$

est alors une conséquence d'un calcul sur les Tor , fait dans le cas régulier.

Cas particulier.

Soient C une courbe non-singulière rationnelle, X un schéma. $X \times C$ est alors plat sur C , et les résultats précédents permettent de définir pour chaque point t un morphisme de Gysin : $i_t^* : \Lambda_*(X \times C) \longrightarrow \Lambda_* X$.

Ces morphismes ne dépendent pas du point t de C choisi. En effet, on a vu que dans le cas où $Y = A^1$, le morphisme

$$\Lambda_* X \otimes \Lambda_* Y \longrightarrow \Lambda_*(X \times Y)$$

$$[V] \otimes [W] \longrightarrow [V \times W]$$

est surjectif.

Donc tout cycle de $X \times Y$ a un représentant de la forme $[x \times Y]$

et $i_t^*[x \times Y] = x$ quel que soit t .

Par la même occasion, on montre que le morphisme ci-dessus est injectif, puisqu'en le composant avec n'importe quel i_t^* , on obtient un morphisme injectif.

COROLLAIRE.— Si $Y = A^n$ est l'espace affine, pour tout schéma X

$$\Lambda_* X \otimes \Lambda_* Y \longrightarrow \Lambda_*(X \times Y)$$

est un isomorphisme.

§ 2. Spécialisation.

Dans ce paragraphe, tous les anneaux et schémas sont noethériens et excellents. Soient R un anneau de valuation discrète, k son corps résiduel, K son corps de fractions. Soient X un schéma plat et quasi-projectif sur R , X_k sa fibre spéciale, X_K sa fibre générique, i et j les inclusions :

$$\begin{array}{ccccc} X_k & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X_K \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\ k & \longrightarrow & R & \longleftarrow & K \end{array}$$

Les arguments du paragraphe précédent s'étendent au cas où $C = \text{Spec } R$, et où $C \times \mathbb{P}^1$ et V sont considérées comme des surfaces authentiques (cf. Abhyankar, "Resolution of singularities of arithmetical surfaces" ; Safarevitch, "Lectures on minimal models"). On obtient donc un homomorphisme de Gysin :

$$i_* : \Lambda_* X \longrightarrow \Lambda_* X_k \quad \text{de degré } -1.$$

On a vu d'autre part qu'il existe une suite exacte dite de Mayer-Vietoris, relative à tout ouvert U d'un schéma noethérien excellent X , qui s'écrit ici

$$\Lambda_* X_k \xrightarrow{i_*} \Lambda_* X \xrightarrow{j_*} \Lambda_* X_K \longrightarrow 0$$

où i_* est de degré 0 et j_* de degré -1.

Puisque $i_* i_* = 0$, il existe un homomorphisme unique $\sigma_X : \Lambda_* X_K \longrightarrow \Lambda_* X_k$, qui conserve les degrés et qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_* X & \xrightarrow{j_*} & \Lambda_* X_K \\ i_* \downarrow & \swarrow \sigma_X & \\ \Lambda_* X_k & & \end{array}$$

σ_X est l'homomorphisme de spécialisation.

Propriétés.

1) Soit f un morphisme de R -schémas plats et quasi-projectifs.

Si f est propre, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_* X_K & \xrightarrow{f_{K*}} & \Lambda_* Y_K \\ \sigma_X \downarrow & & \downarrow \sigma_Y \\ \Lambda_* X_k & \xrightarrow{f_{k*}} & \Lambda_* Y_k \end{array}$$

où les notations ont un sens évident, commute.

Si f est plat, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \cdot Y_K & \xrightarrow{f_K^*} & \Lambda \cdot X_K \\ \downarrow \sigma_Y & & \downarrow \sigma_X \\ \Lambda \cdot Y_k & \xrightarrow{f_k^*} & \Lambda \cdot X_k \end{array}$$

commute.

C'est une conséquence immédiate du paragraphe 1.

2) Soient R' un anneau de valuation discrète qui domine R , k' son corps résiduel, K' son corps de fractions, X un schéma plat quasi-projectif sur R , $X_{R'}$ le schéma obtenu par changement de base

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g} & X_{R'} \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ R & \xleftarrow{\quad} & R' \end{array}$$

Alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \cdot X_K & \xrightarrow{g_K^*} & \Lambda \cdot X_{K'} \\ \sigma_X \downarrow & & \downarrow \sigma_{X_{K'}} \\ \Lambda \cdot X_k & \xrightarrow{g_k^*} & \Lambda \cdot X_{k'} \end{array}$$

est commutatif.

C'est une conséquence de 1.

Cas où R est hensélien. Spécialisation des fibres géométriques.

Soit $\bar{K}$ (resp. $\bar{k}$) une clôture algébrique de K (resp. k). On considère le système inductif formé de tous les anneaux R_i normaux finis sur R , contenus dans $\bar{K}$. Puisque R est hensélien, un tel anneau est intègre et local, donc est un anneau de valuation discrète.

Ce système est inductif puisque si R' et R'' sont deux tels anneaux, $R' \otimes_R R''$ est décomposé en ses composantes locales. En normalisant la composante de $R' \otimes_R R''$ qui contient l'image réciproque du seul élément de $\text{Spec } \bar{K}$ par

le morphisme $R' \otimes_R R'' \longrightarrow \bar{K}$, on obtient un élément du système qui domine R' et R'' .

Soient K_i le corps de fractions de R_i , k_i son corps résiduel. On obtient, pour tout couple (i, j) tel que $R_i \subset R_j$, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 A \cdot X_{K_i} & \xrightarrow{\quad} & A \cdot X_{K_j} & \searrow & A \cdot X_{\bar{K}} \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 A \cdot X_{k_i} & \xrightarrow{\quad} & A \cdot X_{k_j} & \searrow & A \cdot X_{\bar{K}}
 \end{array}$$

D'où un homomorphisme : $\varinjlim_i A(X_{K_i}) \longrightarrow A \cdot X_{\bar{K}}$.

C'est un isomorphisme :

- tout cycle de $X_{\bar{K}}$ est défini par un nombre fini d'équations, donc provient de l'image d'un cycle sur un certain X_{R_i} ;
- si un cycle est équivalent à 0 dans $X_{\bar{K}}$, cette équivalence est définie par des fermés de $X_{\bar{K}}$ et des fonctions rationnelles sur ces fermés, qui se relèvent à un certain X_{R_i} .

On obtient alors un homomorphisme de spécialisation des fibres géométriques :

$$A \cdot X_{\bar{K}} \longrightarrow A \cdot X_{\bar{K}}$$

II. - TRANSFORMATIONS NATURELLES DU FONCTEUR DE CHOW.

Dans cette partie, nous travaillerons dans la catégorie des variétés projectives sur un corps.

On définit un foncteur covariant de cette catégorie dans $\underline{Ab}$ par :

$$H \cdot X = A \cdot X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Ce foncteur possède la propriété suivante dont la démonstration est due à A. Landman :

PROPOSITION.- Soit $\alpha : H. \longrightarrow H.$ une transformation naturelle de foncteurs.

Si pour tout entier n

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbb{P}^n) : H_*(\mathbb{P}^n) &\longrightarrow H_*(\mathbb{P}^n) \\ [\mathbb{P}^n] &\longrightarrow [\mathbb{P}^n] + \text{termes de degré } \neq n\end{aligned}$$

alors α est l'identité.

Remarque.— Soient X un objet de la catégorie, V une sous-variété irréductible de X ; alors $\alpha(X)[V] = \alpha(V)[V]$ par naturalité.

Donc :

- il suffira d'étudier les éléments $\alpha(V)[V]$ que nous noterons abusivement par $\alpha[V]$;
- α ne peut pas augmenter les degrés.

Démonstration de la proposition.

Soit $\beta = \alpha - \text{Id}$.

$$1) \quad \beta[\mathbb{P}^n] = 0 \quad .$$

Soit H la variété linéaire de $\mathbb{P}^n$ qui intervient dans $\beta[\mathbb{P}^n]$ avec le plus haut degré —qui est par hypothèse différent de n —

$$\beta[\mathbb{P}^n] = sH + \text{termes de plus bas degré.}$$

Supposons que H soit donné par les équations $T_r = \dots = T_n = 0$, $r \leq n$; soit f le morphisme : $\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ défini sur les algèbres de polynômes par

$$\begin{aligned}K[T_0, \dots, T_n] &\longrightarrow K[T_0, \dots, T_n] \\ T_i &\longrightarrow T_i^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{alors} \quad f_*[\mathbb{P}^n] &= \deg[K(t_1, \dots, t_n)/K(t_1^2, \dots, t_n^2)][\mathbb{P}^n] = d[\mathbb{P}^n] \\ f_*[H] &= \deg[K(t_1, \dots, t_{n-1})/K(t_1^2, \dots, t_{n-1}^2)][H] = e[H] \quad , \quad e \neq d\end{aligned}$$

puisque β est un morphisme de foncteurs :

$$f_*(\beta[\mathbb{P}^n]) = \beta(f_*[\mathbb{P}^n])$$

$$\text{or} \quad f_*(\beta[\mathbb{P}^n]) = sf_*[H] + \text{termes de plus bas degré}$$

puisque f_* ne peut pas augmenter le degré

$$\text{et} \quad \beta(f_*[\mathbb{P}^n]) = \beta(\alpha[\mathbb{P}^n]) = ds[H] + \text{termes de plus bas degré}$$

et nécessairement s est nul.

2) $\beta[X] = 0$, pour toute variété irréductible X .

Soit X irréductible et projective de dimension n . Grâce au lemme de normalisation, on construit un morphisme $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ fini et séparable. Soient X' , obtenue en normalisant X dans une extension de $K(X)$ galoisienne sur $K(\mathbb{P}^n)$ de groupe G , et $\sigma : X' \longrightarrow X$. Puisque X' est fini sur X :

$$\sigma_* \beta[X'] = \beta \sigma_* [X] = \lambda \beta[X].$$

Il suffit donc de montrer que $\beta[X']$ est nul, donc on peut remplacer X par X' .

LEMME.- Soit c un cycle sur X . Alors $f_* f_* c = \sum_{g \in G} g_* c$.

Alors puisque $f_* \beta[X] = \beta(f_* [X])$

$$f_* \beta[X] = 0$$

$$f_* f_* \beta[X] = 0$$

$$\sum_{g \in G} g_* \beta[X] = 0$$

mais $g_* \beta[X] = \beta g_* [X] = \beta[X]$ donc $\beta[X] = 0$.

Démonstration du lemme.

Soient V une variété irréductible de X , W son image dans $\mathbb{P}^n$.

Soient H le sous-groupe de G qui laisse V globalement invariant, et $V_0 = V$,

$V_1, \dots, V_r$ toutes les variétés distinctes transformées de V par G .

$f_i : V_i \longrightarrow \mathbb{P}^n$ la restriction de f à V_i

$$[V_i] = g_{i*} [V]$$

$$f_* f_* [V] = \sum_{i=1}^r f_{i*} f_* [V] = \sum_{i=1}^r f_{i*} (f_* g_i^{-1} [V_i]) = \sum_{i=1}^r f_{i*} f_{i*} [V_i]$$

et

$$\sum_{g \in G} g_* [V] = \sum_{i=1}^r \sum_{g \in g_i H} g_* [V].$$

Il suffit donc de montrer que : $f_{i*} f_{i*} [V_i] = \sum_{g \in g_i H} g_* [V]$

$$\sum_{g \in g_i H} g_* [V] = \sum_{h \in H} (g_i h g_i^{-1})_* [V_i] = \# H \cdot [V_i]$$

puisque $g_i h g_i^{-1}$ laisse V_i invariant.

L'égalité en découle puisque $\# H = \deg(V_i : W)$