

Astérisque

JEAN-LOUIS VERDIER

**Le théorème de Riemann-Roch pour les
intersections complètes**

Astérisque, tome 36-37 (1976), p. 189-228

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__189_0>

© Société mathématique de France, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH POUR LES INTERSECTIONS COMPLÈTES

par Jean-Louis VERDIER

Dans cet exposé k désigne un corps. Nous aurons à considérer des espaces $\mathbb{C}$ -analytiques ou bien des variétés algébriques sur k qu'on appellera parfois espaces algébriques.

§ 1. Intersection complète.

1.1. Rappelons quelques propriétés des intersections complètes. Pour les démonstrations dans le cas algébrique, nous renvoyons à [1] et [2]. Dans le cas analytique, nous demandons au lecteur d'adapter les démonstrations ci-dessus. Soit X un sous-espace localement fermé d'un espace analytique (resp. algébrique) Y . Nous dirons que X est régulièrement plongé dans Y si l'idéal de définition de X est défini localement par une suite régulière (nous nous écartons ici de [1] et [2] qui utilisent la terminologie de "régulièrement immergé"). Un morphisme de X dans Y est appelé un plongement régulier si c'est un isomorphisme sur un sous-espace régulièrement plongé.

1.2. Soient $X \hookrightarrow Y$ un sous-espace régulièrement plongé, I l'idéal de définition de X dans Y . Le faisceau $I \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X = I/I^2$ est un faisceau localement libre de type fini sur X . On pose $N_{X/Y} = \mathbb{W}(I/I^2)$. C'est un fibré vectoriel sur X dont le faisceau des sections est le dual de I/I^2 . Le fibré $N_{X/Y}$ est appelé le fibré normal de X dans Y . C'est le spectre analytique (resp. algébrique) de l'algèbre $\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(I/I^2) = \mathcal{O}_X \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \dots$

1.3. En tout point $x \in X$, on a

$$\text{rg}_x N_{X/Y} = \text{codim}_x(X, Y).$$

La fonction $x \mapsto \text{codim}_x(X, Y)$ est donc localement constante sur X . Pour

tout $x \in X$, $\text{codim}_x(X, Y)$ est le cardinal d'une suite régulière qui engendre l'idéal de définition de X en x .

1.4. Soient $f = X \rightarrow Y$ un morphisme et $x \in X$. On dit que f est un morphisme d'intersection complète en x si f se factorise, au voisinage de x , en un plongement régulier suivi d'un morphisme lisse. On dit que f est localement d'intersection complète s'il est d'intersection complète en tout point.

1.5. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement d'intersection complète. La fonction $x \rightarrow d_x(f) = \dim_x(X) - \dim_{f(x)} Y$ est localement constante sur X . L'entier $d_x(f)$ est appelé la dimension relative virtuelle de X sur Y en x .

1.6. On dit qu'un morphisme est lissifiable s'il se factorise en un plongement fermé suivi d'un morphisme lisse. Une telle factorisation est appelée une lissification du morphisme. Tout morphisme entre variétés algébriques quasi-projectives est lissifiable.

Soient $f = X \rightarrow Y$ un morphisme localement d'intersection complète et

$$\begin{array}{ccc} X & \xhookrightarrow{i} & V \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & Y & \end{array}$$

une lissification. Alors i est un plongement régulier.

Soit I l'idéal de définition de X dans V . La différentielle extérieure sur V induit une application $\mathcal{O}_X$ -linéaire

$$1.6.1. \quad \delta : I/I^2 \longrightarrow \Omega_{V/Y}^1 \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Notons T_f le complexe de faisceaux localement libres

$$\dots \longrightarrow (\Omega_{V/Y}^1 \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)^* \xrightarrow{\delta^*} (I/I^2)^* \longrightarrow 0 \dots$$

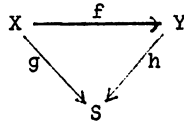
obtenu en passant aux faisceaux duaux dans 1.6.1, en plaçant $(I/I^2)^*$ en degré 1 et en mettant des faisceaux nuls en degré distinct de 0 et 1.

La classe d'isomorphisme de T_f dans la catégorie dérivée ne dépend pas de la lissification. Le complexe T_f est appelé le complexe tangent à f . En

particulier la classe $|T_f| \in K^*(X)$ est bien définie.

1.7. Soient $f = X \rightarrow Y$ un morphisme localement d'intersection complète et $g : Z \rightarrow Y$ un morphisme plat. Alors le morphisme $pr_2 : X \times_Y Z \rightarrow Z$ est localement d'intersection complète. Si g est fidèlement plat et si pr_2 est localement d'intersection complète, alors f l'est.

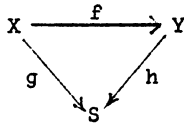
1.8. Soit



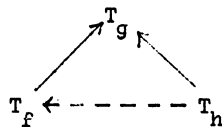
un diagramme commutatif tel que g et h soient plats, $x \in X$ un point au-dessus de $s \in S$, $f_s : X_s \rightarrow Y_s$ le morphisme induit par f sur les fibres en s . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est d'intersection complète en x ,
- (ii) f_s est d'intersection complète en x .

1.9. Soit



un diagramme commutatif. Si h et f sont des morphismes localement d'intersection complète alors g l'est aussi. Si g et h sont localement d'intersection complète alors f l'est aussi. Si f et g sont localement d'intersection complète alors h est d'intersection complète en tout point de l'image f . Si f, g, h sont localement d'intersection complète et lissifiables, on a un triangle distingué



et en particulier $|T_g| = |T_f| + f^*|T_h|$, dans $K^*(X)$.

§ 2. Un éclatement.

2.1. Soient $i : X \rightarrow Y$ un plongement fermé, I l'idéal de définition de X .

Notons A l'algèbre graduée à composantes cohérentes $0_X \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \dots$

On pose $N_{X/Y} = \text{spec}(A)$ (spectre analytique ou algébrique suivant les cas).

C'est un cône muni d'une projection sur X . On note $P(N_{X/Y})$ le fibré

projectif correspondant. On a $P(N_{X/Y}) = \text{Proj}(A)$. On note aussi $\hat{N}_{X/Y}$ la

fermeture projective de $N_{X/Y}$. C'est le spectre homogène de l'algèbre graduée B dont les composantes sont

$$2.1.1. \quad B_n = 0_X \oplus I/I^2 \oplus \dots \oplus I^n/I^{n+1}.$$

2.2. Le cône $N_{X/Y}$ est appelé le cône normal de X dans Y . Le cône normal est un fibré vectoriel sur X si et seulement si X est régulièrement plongé dans Y [2].

2.3. Le fibré $P(N_{X/Y})$ est le fermé des points à l'infini de $\hat{N}_{X/Y}$. L'ouvert complémentaire est $N_{X/Y}$. L'espace X est un fermé de $\hat{N}_{X/Y}$ contenu dans $N_{X/Y}$. C'est le sommet du cône.

2.4. On note $\tilde{Y}$ l'espace obtenu en éclatant X dans Y . C'est le spectre homogène de l'algèbre graduée $C = 0_Y \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots$. Le sous-espace des points de $\tilde{Y}$ au-dessus de X n'est autre que $P(N_{X/Y})$.

2.5. On note A la droite affine. Notons $\tilde{N}$ l'espace obtenu en éclatant $X \times \{0\}$ dans $Y \times A$. C'est un $Y \times A$ -espace défini comme le spectre homogène de l'algèbre graduée.

$$2.5.1. \quad D = 0_{Y \times A} \oplus L \oplus L^2 \oplus \dots$$

où L est l'idéal de définition de $X \times \{0\}$ dans $Y \times A$.

2.6. Notons $\tilde{M}_{X \times A}$ le sous-espace de $\tilde{M}$ image inverse de $X \times A \subset Y \times A$.

Par un calcul de produit tensoriel on montre que $\tilde{M}'_{X \times A} = \text{Proj}(E)$ où E est une $0_{X \times A}$ -algèbre graduée dont les composantes sont

$$2.6.1. \quad E_n = 0_{X \times A} \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \dots \oplus I^n/I^{n+1},$$

où I^P/I^{P+1} est un $0_{X \times \mathbb{A}^1}$ -module via le plongement $X \simeq X \times \{0\} \hookrightarrow X \times \mathbb{A}^1$.

2.7. Il résulte de 2.6.1. qu'on a un morphisme surjectif d'algèbre graduée

$$F \longrightarrow 0_{X \times \mathbb{A}^1}[T]$$

qui définit donc un plongement fermé sur les spectres homogènes

$$X \times \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \tilde{M}_X \times \mathbb{A}^1$$

qui est une section de la projection canonique $\tilde{M}_X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow X \times \mathbb{A}^1$.

Le transformé propre de $X \times \mathbb{A}^1$ dans l'éclatement est donc isomorphe à $X \times \mathbb{A}^1$.

2.8. Il résulte de 2.6.1 et de 2.1.1 qu'on a un isomorphisme $\tilde{M}_X \times \{0\} \simeq \hat{N}_{X/Y}$ et que $\tilde{M}_X \times \mathbb{A}^1$ est la réunion des sous-espaces fermés $X \times \mathbb{A}^1$ et $\hat{N}_{X/Y}$. De plus $(X \times \mathbb{A}^1) \cap \hat{N}_{X/Y} \simeq X$ plongé dans $X \times \mathbb{A}^1$ par $X \times \{0\}$ et dans $\hat{N}_{X/Y}$ comme le sommet de $\hat{N}_{X/Y}$.

2.9. On a donc le diagramme suivant de plongements fermés (diagramme cartésien) :

$$\begin{array}{ccccc} X \times \mathbb{A}^1 & \hookrightarrow & \tilde{M}_X \times \mathbb{A}^1 & \hookrightarrow & M \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ X \times \{0\} & \hookrightarrow & \hat{N}_{X/Y} \simeq \tilde{M}_X \times \{0\} & & \end{array}$$

2.9.1.

2.10. Notons $\tilde{M}_Y \times \{0\}$ le sous-espace de $\tilde{M}$ image inverse de $Y \times \{0\}$ dans $\tilde{M}$. Par un calcul de produit tensoriel à partir de 2.5.1, on montre que $\tilde{M}_Y \times \{0\} = \text{Proj}(F)$ où F est un 0_Y -algèbre graduée dont les composantes homogènes sont

$$\begin{cases} F_0 = 0_Y, \\ F_n = 0_X \oplus I/I^2 \dots \oplus I^{n-1}/I^{n-2} \oplus I^n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

2.10.1.

2.11. Il résulte de 2.10.1 et de 2.4 qu'on a un homomorphisme surjectif d'algèbres graduées $F \longrightarrow C$, d'où un plongement fermé compatible avec les projections sur Y :

$$\tilde{Y} \hookrightarrow \tilde{M}_Y \times \{0\}.$$

En se restreignant aux sous-espaces au-dessus de X , on obtient un diagramme commutatif cartésien de plongements fermés

2.11.1.

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{Y} & \hookrightarrow & \tilde{M}_Y \times \{0\} & \hookrightarrow & \tilde{M} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 P(N_{X/Y}) & \hookrightarrow & \tilde{M}_X \times \{0\} = \hat{N}_{X/Y} & &
 \end{array}$$

où le plongement de $P(N_{X/Y})$ dans $\hat{N}_{X/Y}$ est le plongement canonique et où $P(N_{X/Y})$ apparaît comme l'intersection de $\tilde{Y}$ et $\hat{N}_{X/Y}$. Il résulte de la description de ces plongements au niveau des algèbres graduées que $\tilde{M}_Y \times \{0\}$ est la réunion des sous-espaces fermés $\tilde{Y}$ et $\hat{N}_{X/Y}$. Donc le complémentaire de $\tilde{Y}$ dans $\tilde{M}_Y \times \{0\}$ est $N_{X/Y}$.

2.12. Comme $Y \times \mathbb{A}$ est plat sur $\mathbb{A}$, tout éclatement de $Y \times \mathbb{A}$ est plat sur $\mathbb{A}$. En particulier $\tilde{M}$ est plat sur $\mathbb{A}$.

2.13. Il résulte de 2.11.1, 2.9.1 et 2.3 que les sous-espaces $\tilde{Y}$ et $X \times \mathbb{A}$ de $\tilde{M}$ ont une intersection vide. Posons $M = \tilde{M} - \tilde{Y}$. On a un diagramme commutatif

2.13.1.

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \mathbb{A} & \xhookrightarrow{\quad} & M \\
 \searrow \text{pr}_2 & & \swarrow \pi \\
 & \mathbb{A} &
 \end{array}$$

où π est plat (2.12). On a un isomorphisme de paires d'espaces

$$(\pi^{-1}(\mathbb{A} - \{0\}), X \times (\mathbb{A} - \{0\})) \simeq (Y, X) \times (\mathbb{A} - \{0\})$$

et un isomorphisme de paires d'espaces

$$(\pi^{-1}(0), X \times \{0\}) \simeq (N_{X/Y}, X).$$

Le diagramme 2.13.1 est appelé le diagramme de déformation canonique au cône normal du plongement $X \hookrightarrow Y$. Lorsqu'il sera nécessaire de préciser on posera $M = M(X/Y)$, $\tilde{M} = \tilde{M}(X/Y)$.

2.14. Soit

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xhookrightarrow{i} & Y \\
 \searrow f & & \swarrow g \\
 & S &
 \end{array}$$

un diagramme commutatif tel que f et g soient plats et tel que le cône $N(X, Y)$ soit plat sur S . Tous les espaces introduits dans les numéros précédents sont alors plats sur S et la construction de ces espaces commute aux changements de bases $S' \rightarrow S$. En particulier pour tout $\lambda \in S$, la fibre en λ de la déformation canonique de i est la déformation canonique du plongement $i_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow Y_\lambda$ induit par i sur les fibres en λ . Il en résulte que le morphisme $M \rightarrow S \times \mathbb{A}^1$ est plat (critère de platitude fibre par fibre).

PROPOSITION 2.15.- Soit $X \rightarrow Y$ un sous-espace fermé défini par un idéal I .

Le Y -espace $M(X, Y)$ est le spectre affine de l'algèbre

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} t^n I^{-n}$$

en posant $I^n = 0_Y$ lorsque $n \leq 0$.

Lorsque A est une O_Y -algèbre et B une A -algèbre graduée, on note $\text{Proj spec}(B, A)$ le spectre homogène de l'algèbre graduée déduite de B sur le spectre affine de A . Par définition $\tilde{M}(X, Y) = \text{Proj spec}(D, O_Y[t])$ où D est la $O_Y[t]$ -algèbre graduée suivante :

$$D_0 = O_Y[t],$$

$$D_1 = I \oplus t O_Y[t],$$

...

$$D_n = I^n \oplus t I^{n-1} \oplus \dots \oplus t^n O_Y[t],$$

...

Le sous-espace fermé $\tilde{Y} \subset \tilde{M}(X, Y)$ est $\text{Proj Spec}(C, O_Y[t])$ où C est la $O_Y[t]$ -algèbre graduée suivante :

$$C_0 = O_Y[t],$$

$$C_1 = I,$$

...

$$C_n = I^n,$$

...

L'inclusion $\tilde{Y} \subset \tilde{M}(X, Y)$ est décrite par les homomorphismes de projection sur

le premier facteur $D_n \rightarrow C_n$. Si donc, pour faciliter le calcul, on introduit

une variable d'homogénéité U et si on pose $D = \bigoplus_{n \geq 0} D_n U^n$, l'équation de $\tilde{Y}$

est $t_U = 0$. L'ouvert complémentaire $M(X, Y)$ est donc le spectre affine de la O_Y -algèbre des éléments de degré 0 de l'algèbre localisée $D_{(U)}$ et on vérifie immédiatement que cette algèbre est celle décrite dans la proposition.

PROPOSITION 2.16.- Soient $X \hookrightarrow Z \hookrightarrow Y$ des plongements fermés tels que Y soit un cône de sommet Z dont l'algèbre affine est engendrée par ses éléments de degré 1. Il existe un isomorphisme

$$\mu : M(X \times_Z Y, Y) \xrightarrow{\sim} M(X, Y)$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & X \times \mathbb{A}^1 & \\ \swarrow & & \searrow \\ M(X \times_Z Y, Y) & \xrightarrow{\mu} & M(X, Y) \\ \searrow & & \swarrow \\ & \mathbb{A}^1 & \end{array}$$

où les flèches non nommées sont canoniques, soit commutatif.

Soient $\Gamma = O_Z \oplus \Gamma^1 \oplus \dots \oplus \Gamma^n \oplus \dots$ l'algèbre affine de Y et I l'idéal de X dans Z . L'idéal de X dans Y est donc

$$I = I \oplus \Gamma^1 \oplus \dots \oplus \Gamma^n \oplus \dots$$

et en vertu de l'hypothèse sur Y , on a

$$I^n = I^n \oplus I^{n-1}\Gamma^1 \oplus I^{n-2}\Gamma^2 \oplus \dots \oplus \Gamma^n \oplus \Gamma^{n+1} \oplus \dots$$

Il résulte de 2.15 que $M(X, Y)$ est le spectre affine de la O_Z -algèbre

$$A = \bigoplus_{r,p,s} A_{r,p,s} \quad \text{où on pose} \\ A_{r,p,s} = I^r \Gamma^p t^s$$

lorsque $(r, p, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifie l'une des trois conditions suivantes

$$\begin{cases} s \geq 0, & r = 0, & p \geq 0, \\ s < 0, & r = 0 \text{ et } p \geq -s \\ s < 0, & r > 0, & p \geq 0 \text{ et } r + p = -s \end{cases}$$

et $A_{r,p,s} = 0$

si aucune des conditions ci-dessus n'est satisfaite par (r, p, s) .

De même $X \times_Z Y$ est défini dans Y par un idéal J et on a

$$J^n = I^n \oplus I^{n-1} \oplus \dots \oplus I^{n-1} \oplus \dots$$

Il résulte de 2.15. que $M(X \times_Z Y, Y)$ est le spectre affine de l'algèbre affine

$$B = \bigoplus_{r,p,s} B_{r,p,s} \quad \text{où on pose}$$

$$B_{r,p,s} = I^r \Gamma^p t^s$$

si $(r,p,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifie l'une des deux conditions suivantes

$$\begin{cases} s \geq 0, & p \geq 0, & r = 0, \\ s < 0, & r = -s, & p \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{et} \quad B_{r,p,s} = 0$$

si aucune des conditions ci-dessus n'est satisfaite.

Notons $m : A \rightarrow B$ l'isomorphisme de O_X -algèbre qui envoie par l'identité $\Lambda_{r,p,s}$ sur $B_{r,p,p+s}$. Il définit un isomorphisme $\mu : M(X \times_Z Y, Y) \xrightarrow{\sim} M(X, Y)$ qui possède les propriétés cherchées.

COROLLAIRE 2.17.- Soient Y un cône, X son sommet. On suppose que l'algèbre affine de Γ est engendrée par ses éléments de degré 1. La déformation canonique au cône normal du plongement $X \hookrightarrow Y$ est isomorphe à la déformation constante $(X, Y) \times A$.

En effet, il suffit d'appliquer 2.16 au cas $X = Z$.

COROLLAIRE 2.18.- Soient $X \subset Z \subset Y$ deux plongements fermés tels que Y soit un cône de sommet Z , plat sur Z , dont l'algèbre affine est engendrée par les éléments de degré 1. Il existe un isomorphisme $M(X, Y) \simeq M(X, Z) \times_Z Y$ compatible avec les projections sur A et les plongements canoniques de $X \times A$.

En effet on a un morphisme de changement de base $M(X, Z) \times_Z Y \rightarrow M(X \times_Z Y, Y)$ qui est un isomorphisme lorsque Y est plat sur Z .

§ 3. Homomorphisme de spécialisation pour les plongements fermés en théorie de Chow.

Les espaces considérés dans les paragraphes 3, 4 et 5 sont des variétés algébriques quasi-projectives sur k .

3.1. Soient $X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé, $M(X, Y)$ la déformation canonique au cône normal $N(X, Y)$, $s : N(X, Y) \hookrightarrow M(X, Y)$ le plongement canonique. On a un isomorphisme $Y \times (\mathbb{A} - \{0\}) \simeq M(X, Y) - N(X, Y)$. On a donc un homomorphisme de Gysin de degré -1 (exp. 3)

$$s_* : A_*(Y \times (\mathbb{A} - \{0\})) \longrightarrow A_*(N(X, Y))$$

Soit $pr_1 : Y \times (\mathbb{A} - \{0\}) \longrightarrow Y$ la première projection. On a un homomorphisme d'image inverse, de degré 1 , (qui est d'ailleurs un isomorphisme cf. exp. 2)

$$pr_1^* : A_*(Y) \longrightarrow A_*(Y \times (\mathbb{A} - \{0\}))$$

On appelle homomorphisme de spécialisation et on note

$$\sigma_{Y/X}^* : A_*(Y) \longrightarrow A_*(N(X, Y))$$

l'homomorphisme composé $s_* \circ pr_1^*$. C'est un homomorphisme de degré 0 .

PROPOSITION 3.2.- Soit

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \hookrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow f \\ X & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

un diagramme cartésien, où X est un fermé de Y et f est propre. Notons

$$g : N(Z \times_Y X, Z) \longrightarrow N(X, Y)$$

le morphisme de changement de base. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_*(Z) & \xrightarrow{\sigma_{Z,Z \times_Y X}} & A_*(N(Z \times_Y X, Z)) \\ f_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ A_*(Y) & \xrightarrow{\sigma_{Y,X}} & A_*(N(X, Y)) \end{array}$$

3.2.1.

est commutatif.

On a un morphisme propre de changement de base

$$h : M(Z \times_Y X, Z) \longrightarrow M(X, Y)$$

qui induit g sur les diviseurs exceptionnels. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_*(Z \times (\mathbb{A} - \{0\})) & \longrightarrow & A_*(N(Z \times_Y X, Z)) \\ (f \times \text{id})_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ A_*(Y \times (\mathbb{A} - \{0\})) & \longrightarrow & A_*(N(X, Y)) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des homomorphismes de Gysin (exp. 3), d'où, aussitôt, la proposition

COROLLAIRE 3.3.- Soient $X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé, $W \subset Y$ une sous-variété fermée. Notons

$$g : N(W \cap X, W) \longrightarrow N(X, Y)$$

le morphisme canonique entre les cônes normaux. On a

$$\sigma_{Y,X}([W]) = g_*[N(W \cap X, W)] \quad .$$

On applique 3.2 dans le cas $Z = W$. On regarde le sort de $[W] \in \Lambda_*(W)$ dans le diagramme 3.2.1.

COROLLAIRE 3.4.- Soient $X \xrightarrow{i} Y$ un plongement fermé et notons $j : Y \hookrightarrow N(X, Y)$ le plongement canonique. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_*(Y) & \xrightarrow{\sigma_{Y,X}} & A_*(N(X, Y)) \\ i_* \swarrow & & \nearrow j_* \\ & A_*(X) & \end{array}$$

est commutatif.

Résulte immédiatement de 3.3.

3.5. Le corollaire 3.3 donne une description géométrique, au niveau des cycles effectifs, de l'homomorphisme de spécialisation. Ceci permettrait de définir et d'étudier dans le cas des espaces analytiques l'homomorphisme de spécialisation sur les cycles analytiques.

3.6. Il résulte immédiatement des résultats de l'exposé 3 que l'homomorphisme de spécialisation est compatible avec l'équivalence algébrique des cycles. Il passe donc au quotient et fournit un homomorphisme de spécialisation sur les classes d'équivalence algébrique de cycles. Exercice : étendre ces résultats aux classes d'équivalence analytique de cycles.

COROLLAIRE 3.7.— Soient $p : Y \longrightarrow X$ un morphisme lisse $s : X \longrightarrow Y$ une section de p , $q : N(s(X), Y) \longrightarrow s(X) = X$ la projection. Alors q est une fibration vectorielle et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_*(Y) & \xrightarrow{\sigma_{Y, s(X)}} & A_*(N(s(X), Y)) \\ p^* \swarrow & & \searrow q^* \\ & A_*(X) & \end{array}$$

est commutatif.

La première assertion est classique et on constate immédiatement que pour tout sous-espace $W \subset X$,

$$N(p^*(W) \cap s(X), Y) = q^*(W) \quad .$$

PROPOSITION 3.8.— Soit

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{\quad} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y \end{array}$$

un diagramme cartésien où X est un fermé de Y et f est plat. Alors le diagramme ci-après est commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_*(Y) & \xrightarrow{\sigma_{Y, X}} & A_*(N(X, Y)) \\ \downarrow f^* & & \downarrow g^* \\ A_*(Z) & \xrightarrow{\sigma_{Z, X} \times_Y Z} & A_*(N(X \times_Y Z, Z)) \quad . \end{array}$$

Résulte immédiatement de la définition 3.1 ou encore de la description 3.3.

3.9. Soient $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé défini par un idéal I de O_Y , F un O_Y -module, M la déformation canonique de i au cône normal, $p : M \rightarrow Y$ la projection, $n : N \hookrightarrow M$ le cône normal de X dans Y , $q : N \rightarrow X$ la projection, $A = \bigoplus_{n \geq 0} t^n O_Y \oplus \bigoplus_{n < 0} t^{n-n} I$ la O_Y -algèbre dont M est le spectre affine (2.15).

Notons p^*F l'image inverse de F sur M correspondant donc au A -module $\bigoplus_{n \geq 0} t^n F \oplus \bigoplus_{n < 0} t^{n-n} F$. Notons $\mathbb{L}p^*F$ l'objet de la catégorie dérivée des O_M -modules correspondant à $A \otimes_{O_Y} F$. Enfin notons $p^h F$ le O_M -module correspondant au A -module $\bigoplus_{n \geq 0} t^n F \oplus \bigoplus_{n < 0} t^{n-n} F$. On a un homomorphisme canonique $\mathbb{L}p^*F \rightarrow p^*F$ qui induit un isomorphisme sur l'homologie de degré 0. Les groupes $\text{Tor}_i^{O_Y}(A, F)$, $i > 0$, sont des A -modules de support contenu dans $q^{-1}(X \cap \text{supp } F)$: en effet on a $\text{supp } \text{Tor}_i^{O_Y}(A, F) \subset p^{-1}(\text{supp } F)$ et en dehors de N , M est plat sur O_Y ; on a donc

$$\text{supp } \text{Tor}_i^{O_Y}(A, F) \subset p^{-1}(\text{supp } F) \cap N = q^{-1}(\text{supp } F \cap X).$$

On a de même un homomorphisme surjectif $p^*F \rightarrow p^h F$ et on constate comme plus haut que le support du noyau est dans $q^{-1}(X \cap \text{supp } F)$.

3.10. Avec les notations précédentes on pose $\text{Grad}_X F = u^* p^h F$. C'est un N -module correspondant au B -module gradué $\bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n F / I^{n+1} F$ où $B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n / I^{n+1}$ est l'algèbre affine de N sur X . Le O_N -module gradué $\text{Grad}_X F$ correspond donc au gradué associé de F pour la filtration I -adique.

PROPOSITION 3.11.- Soit $[F]$ (resp. $[\text{Grad}_X F]$) le cycle de Y (resp. $N(X, Y)$) associé à F (resp. $\text{Grad}_X F$) (exp. 0). On a

$$3.11.1. \quad \sigma_{Y, X}[F] = [\text{Grad}_X F].$$

De plus si $\text{codim}_X(\text{supp } F \cap X, X) = \text{codim}_X(X, Y)$ en tout point $x \in \text{supp } F \cap X$ et si le complexe $\mathbb{L}(i \circ q)^* F$ est borné, alors

$$3.11.2. \quad \sigma_{Y, X}[F] = [\mathbb{L}(i \circ q)^* F] = \sum_i (-1)^i [\text{Tor}_i^{O_Y}(O_N, F)].$$

Le O_M -module $p^h F$ restreint à $M - N = Y \times \mathbb{A}^1 - \{0\}$ n'est autre que l'image inverse de F par la première projection. Comme la multiplication par t dans $p^h F$ est injective, le support de F n'a aucune composante dans N . Il résulte alors de la définition de l'homomorphisme de Gysin pour les diviseurs principaux (exp. 3) que $\sigma_{Y, X}[F] = [p^h F \otimes_{O_N} O_N]$ d'où 3.11.1 compte-tenu de 3.10.

Démontrons la deuxième assertion. On a un homomorphisme surjectif $p^*F \longrightarrow p^!F$ (3.9) dont le noyau H a un support contenu dans N et de dimension $<$ à la dimension du support de $p^!F$. Il s'ensuit que $[(\mathbb{L}u^*)(p^*F)] = [\text{Grad}_X F]$;

d'où

$$\sigma_{Y,X}[F] = [O_N \otimes_{O_M} p^*F] - [\text{Tor}_1^{O_M}(O_N, p^*F)] .$$

L'homologie de $\mathbb{L}p^*F$ de degré > 0 est formée de O_M -module à support contenu dans N et de dimension $<$ à la dimension du support de $p^!F$. On a donc

$$\sigma_{Y,X}[F] = \sum_i (-1)^i \{ [\text{Tor}_i^{O_Y}(F, O_M) \otimes_{O_M} O_N] - [\text{Tor}_1^{O_M}(\text{Tor}_i^{O_Y}(F, O_M), O_N)] \} .$$

Dans le groupe de Grothendieck des O_M -modules de dimension $\leq \dim \text{supp } F$, on a d'après la suite spectrale des Tor :

$$\sum_i (-1)^i \{ \text{cl } \text{Tor}_i^{O_Y}(F, O_M) \otimes_{O_M} O_N - \text{cl } \text{Tor}_1^{O_M}(\text{Tor}_i^{O_Y}(F, O_M), O_N) \} = \sum_i (-1)^i \text{cl } \text{Tor}_i^{O_Y}(F, O_N) ,$$

d'où le résultat.

3.12. Nous avons implicitement utilisé dans la démonstration de 3.11 le fait suivant : si $F_\bullet$ est un complexe borné sur O_Y tel que $\mathbb{L}(i \circ q)^*F_\bullet$ soit borné, alors $\mathbb{L}p^*F_\bullet$ est un complexe borné. Démontrons cela. Soit I le O_Y idéal de X . Quitte à translater $F_\bullet$, on peut supposer que la cohomologie de $F_\bullet$ est en degré négatif. L'hypothèse entraîne qu'il existe un entier m tel que pour tout n , la cohomologie de $F_\bullet \otimes_{O_Y}^{\mathbb{L}} I^n/I^{n+1}$ soit nulle en dehors de l'intervalle $[-m, 0]$. Les suites exactes $0 \longrightarrow I^{n+1} \longrightarrow I^n \longrightarrow I^n/I^{n+1} \longrightarrow 0$ entraînent alors que $F_\bullet \otimes_{O_Y}^{\mathbb{L}} I^n$ a une cohomologie nulle en dehors de l'intervalle $[-\sup(m-1, 0), 0]$. Il s'ensuit en vertu de 2.15 que $\mathbb{L}p^*F_\bullet$ est un complexe borné.

3.13. Notons $A^*(Y)$ et $A^*(N)$ les anneaux de Chern de Y et N respectivement (exposé 5). On a un homomorphisme d'anneaux

$$(i \circ q)^* : A^*(Y) \longrightarrow A^*(N) .$$

Les groupes de Chow $A_*(Y)$ et $A_*(N)$ sont des modules sur leurs anneaux de Chern respectifs. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'homomorphisme de spécialisation $\sigma_{Y,X}$ est un di-homomorphisme de modules.

§ 4. Homomorphisme de Gysin pour les plongements réguliers en théorie de Chow.

4.1. Soit $s : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé régulier. Le cône normal $N(X, Y)$ est un fibré vectoriel sur X de rang d . Notons $p : N(X, Y) \rightarrow X$ la projection. On sait alors que l'homomorphisme d'image inverse

$$p^* : A_*(X) \longrightarrow A_*(N(X, Y))$$

est un isomorphisme de degré d (exp. 2 et 3).

On appelle homomorphisme de Gysin et on note

$$s^* = A_*(X) \longrightarrow A_*(X)$$

l'homomorphisme de degré $-d$ obtenu en composant $(p^*)^{-1}$ avec l'homomorphisme de spécialisation $\sigma_{Y, X} : A_*(Y) \rightarrow A_*(N(X, Y))$.

4.2. Supposons que le plongement régulier $s : X \hookrightarrow Y$ admette une rétraction lisse $p : Y \rightarrow X$. On a alors

$$4.2.1. \quad s^* p^* = \text{Id}_{A_*(X)}$$

ainsi qu'il résulte de 3.7. En particulier si Y est un fibré vectoriel sur X et si s est la section nulle, on a

$$4.2.2. \quad s^* = (p^*)^{-1}.$$

Il résulte alors de 4.1 que

$$4.2.3. \quad i^* = j^* \circ \sigma_{Y, X},$$

où $j : X \hookrightarrow N(X, Y)$ est le plongement canonique.

PROPOSITION 4.3.- Soient $s : X \rightarrow Y$ un plongement régulier

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{i} & \Delta \\ \text{pr}_2 \searrow & & \swarrow \pi \\ & \mathbb{A}^1 & \end{array}$$

un diagramme commutatif tel que π soit plat et i un plongement régulier. On suppose que la paire $(X \times (\mathbb{A}^1 - \{0\}), \pi^{-1}(\mathbb{A}^1 - \{0\}))$ est isomorphe à $(X, Y) \times (\mathbb{A}^1 - \{0\})$ de sorte qu'on a un homomorphisme de spécialisation

$$A_*(Y) \xrightarrow{\tau} A_*(\Delta_0).$$

Alors le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A_*(Y) & \xrightarrow{s^*} & A_*(X) \\
 \tau \downarrow & & \nearrow i_0^* \\
 A_*(\Delta_0) & &
 \end{array}$$

Soit $M(i)$ la déformation canonique au cône normal de i . L'espace $M(i)$ est muni d'un morphisme $M(i) \rightarrow \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$. Comme le cône normal de i est plat sur $X \times \mathbb{A}^1$, donc sur $\mathbb{A}^1$, pour toute valeur λ du premier paramètre de $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, la fibre $M(i)_\lambda$ est la déformation canonique du plongement régulier $i_\lambda : X \hookrightarrow \Delta_\lambda$ (2.14). On a donc un diagramme commutatif de spécialisation

$$\begin{array}{ccc}
 A_*(Y) & \xrightarrow{\tau} & A_*(\Delta_0) \\
 \sigma_{Y,X} \downarrow & & \downarrow \sigma_{\Delta_0,X} \\
 A_*(N(X,Y)) & \xrightarrow{\tau'} & A_*(N(X,\Delta_0))
 \end{array}$$

Comme le cône normal de i est un fibré vectoriel sur X le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A_*(N(X,Y)) & \xrightarrow{\tau} & A_*(N(X,\Delta_0)) \\
 \downarrow q^* & & \downarrow p^* \\
 A_*(X) & = & A_*(X)
 \end{array}$$

où p et q sont les projections canoniques, d'où la proposition.

THÉOREME 4.4. — Soient $X \xhookrightarrow{u} Z \xhookrightarrow{v} Y$ deux plongements réguliers. Alors $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

Supposons d'abord que Y soit un fibré vectoriel sur Z et soit $p : Y \rightarrow Z$ la projection. En vertu de 4.2.2, il suffit de montrer que $(v \circ u)^* \circ p^* = u^*$. Soit $W \subset Z$ un sous-espace fermé, $N(W \cap X, X) \subset N(X, Z)$ le cône normal de $W \cap X$ dans X . On a (3.3) :

$$4.4.1. \quad \pi^* u^* [W] = [N(W \cap X, X)] ,$$

où $\pi : N(X, Z) \rightarrow X$ est la projection canonique.

On a une suite exacte scindée de fibrés vectoriels sur X

$$0 \longrightarrow N(X, Z) \xleftarrow{q} N(X, Y) \longrightarrow X \times_Z Y \longrightarrow 0$$

et on constate immédiatement que

$$q^*N(W \cap X, X) = N(p^*W \cap X, p^*W) \quad .$$

On déduit donc de 4.4.1 et de 3.3 l'égalité

$$(q^* \circ \pi^*)u^*[W] = q^*\pi^*(v \circ u)^* \circ p^*[W]$$

d'où le théorème dans ce cas car $q^*\pi^* = (\pi \circ q)^*$ est l'image inverse par la projection canonique $\pi \circ q : N(X, Y) \longrightarrow X$, et cette image inverse induit un isomorphisme sur les groupes de Chow.

Dans le cas général, la proposition 4.3, appliquée au plongement $X \times A \hookrightarrow M(X, Y)$, fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_*(Y) & \xrightarrow{(v \circ u)^*} & A_*(X) \\ \sigma_{Y, Z} \downarrow & \nearrow (v' \circ u)^* & \\ A_*(N(Z, Y)) & & \end{array}$$

où $v' : Z \hookrightarrow N(Z, Y)$ est le plongement donné par la section nulle du fibré vectoriel $N(Z, Y)$ de base Z . En vertu de ce qui précède, on a donc

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v'^* \circ \sigma_{Y, Z}$$

d'où le résultat en vertu de 4.2.2 et de la définition 4.1.

PROPOSITION 4.4.- Soit $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé régulier de codimension d . Pour tout $\alpha \in A_*(X)$, on a

$$i_*i_*(\alpha) = \alpha \cdot c_d(N(X, Y)) \quad .$$

Posons $N = N(X, Y)$; notons $p : N \longrightarrow X$ et $j : X \hookrightarrow N$ la projection et la section nulle. Par définition on a $i_*i_*(\alpha) = (p^*)^{-1}\sigma_{Y, X}i_*(\alpha)$ et d'après 3.4, on a $i_*i_*(\alpha) = (p^*)^{-1}j_*(\alpha)$. Il s'agit donc de démontrer que

$$4.4.1. \quad j_*(\alpha) = p^*(\alpha) \cdot c_d(p^*N)$$

où p^*H est le fibré vectoriel de base N déduit de $p : N \longrightarrow X$ par le changement de base $p : N \longrightarrow X$. Il suffit de démontrer cette formule lorsque $\alpha = [W]$ où $W \subset X$ est un sous-espace fermé. Notons $p' : N' \longrightarrow W$, le fibré déduit de N par changement de base, $j' : W \longrightarrow N'$ la section nulle,

$\pi : N' \hookrightarrow N$ le plongement canonique. On a

$$j_*(\alpha) = \pi_* j_*^! [W] \quad . \quad p^*(\alpha) \cdot c_d(p^*N) = \pi_* \cdot p'^* [W] \cdot c_d(p'^*N') \quad .$$

On peut donc se borner à démontrer 4.4.1 lorsque $\alpha = [X]$, c'est-à-dire à montrer que

$$4.4.2. \quad j_*[X] = [N] \cdot c_d(p^*N) \quad .$$

Or p^*N possède une section canonique sur N dont l'espace des zéros est $j(X)$ et par suite 4.4.2 résulte de l'exposé 5.

PROPOSITION 4.5.- Soient $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé régulier de codimension d , F un $\mathcal{O}_Y$ -module tel que $\text{supp } F \cap X$ soit de codimension d dans X . Alors

$$i^*[F] = \sum (-1)^i [\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_Y}(F, \mathcal{O}_X)] \quad .$$

Soient N le fibré normal de X dans Y et $p : N \rightarrow X$ la projection. Il résulte de 3.10 que

$$\sigma_{Y,X}[F] = \sum (-1)^i [p^* \text{Tor}_i^{\mathcal{O}_Y}(F, \mathcal{O}_X)] \quad ,$$

d'où la proposition en vertu de 4.1.

4.6. Lorsque X est un diviseur dans Y , les propositions 4.4 et 4.5 permettent de décrire le cycle $i^*[W]$ pour tout sous-espace irréductible W de Y . En effet ou bien $W \subset X$ et alors on applique 4.4 ou bien $W \not\subset X$ et on applique 4.5. En particulier, lorsque X est un diviseur principal, il résulte de 4.4 et de 4.5 que l'homomorphisme de Gysin étudié ici coïncide avec l'homomorphisme de Gysin étudié à l'exposé 3.

COROLLAIRE 4.7.- Soit $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé régulier, tel que Y soit lisse. Pour $\alpha \in A_*[Y]$ notons $cl(\alpha) \in A^*(Y)$ l'élément tel que $\alpha = cl(\alpha)_*[Y]$. Alors on a, avec les notations de l'exposé 5 :

$$i^*(\alpha) = [X]_i \cdot cl(\alpha) \quad .$$

Résulte de 4.5 et des définitions de l'exposé 5.

4.8. **Exercice.-** Soient $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé régulier de codimension

d , W une sous-variété de Y tel que $W \cap X$ soit régulièrement plongé dans W , de codimension d' . Alors $N(W \cap X, W)$ est un sous-fibré de $N(X, Y)_W$, notons E le fibré quotient et $j : W \cap X \hookrightarrow X$ le plongement canonique. Alors $i^*[W] = j_*([W \cap X] \cdot C_{d-d'}(E))$.

§ 5. Homomorphisme de Gysin pour les morphismes d'intersection complète en théorie de Chow.

5.1. Soient X et Y des variétés quasi-projectives et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement d'intersection complète (1.4), de dimension relative virtuelle $d \in \mathbb{Z}$ (1.5).

Soit

5.1.1.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Z \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & Y & \end{array}$$

une factorisation de f en un plongement régulier suivi d'un morphisme lisse (1.6). Notons

5.1.2.

$$f^* : A_*(Y) \longrightarrow A_*(X)$$

l'homomorphisme composé $f^* = i^* \circ p^*$. C'est un homomorphisme de degré d .

PROPOSITION 5.2.- L'homomorphisme f^* ne dépend pas de la factorisation.

On utilise pour cela le lemme suivant.

LEMME 5.3.- Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i'} & Z' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{i} & Z \end{array}$$

un diagramme cartésien où f est lisse et i un plongement régulier. Alors on a

$$i'^* f^* = f'^* i^* .$$

Conséquence immédiate de 3.8 et 4.1.

5.4. Démontrons la proposition 5.2. Il s'agit de comparer les homomorphismes définis par deux factorisations. En utilisant un produit fibré, on se ramène au cas où $f : X \hookrightarrow Y$ est un plongement régulier et où on a une factorisation où p est lisse

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow i & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Introduisons alors le produit fibré $X \times_Y Z$. On a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \xrightarrow{f'} & Z \\ p' \uparrow \downarrow s & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

et $f' \circ s = i$. On a donc $i^*p^* = s^*f'^*p^*$ en vertu de 4.4 ; $s^*p'^*f^*$ en vertu de 5.3 et $s^*p'^*f^* = f^*$ en vertu de 4.2.1, d'où la proposition.

5.5. On appelle homomorphisme de Gysin défini par f , l'homomorphisme 5.1.2.

PROPOSITION 5.6.- Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ deux morphismes localement d'intersection complète entre variétés quasi-projectives, de dimension relative d et d' respectivement. Alors on a

$$(f \circ g)^* = f^* \circ g^* .$$

Vérification formelle à partir de 4.4, 5.3 et 5.6.

PROPOSITION 5.7.- Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow p' & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

un diagramme cartésien de variétés quasi-projectives où f est localement d'intersection complète et p plat. Alors

$$p'^* \circ f^* = f'^* \circ p^* .$$

Résulte de 5.3.

PROPOSITION 5.8.- Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme localement d'intersection complète de dimension relative d entre variétés quasi-projectives et F un $\mathcal{O}_Y$ -module tel que pour tout point $x \in X \cap f^{-1}(\text{supp } F)$ on ait

$$\dim_x (X \cap f^{-1}(\text{supp } F)) \leq \dim_{f(x)} (\text{supp } F) + d.$$

Alors

$$f^*[F] = \sum_i (-1)^i [\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_Y}(f_* F, \mathcal{O}_X)] .$$

Résulte de 4.5.

5.8. Il résulte de 5.7 que lorsque f est plat l'homomorphisme de Gysin n'est autre que l'image inverse des cycles. Il résulte aussi de 5.7 que lorsque Y est lisse, on a pour tout $\alpha \in A_*(Y)$:

$$5.8.1. \quad f^*(\alpha) = [X]_f \cdot \text{cl}(\alpha) ,$$

(cf. 4.7).

5.9. Notons $A^*(Y)$ et $A^*(X)$ les anneaux de Chern de Y et X respectivement (exp. 2). On a un homomorphisme d'anneaux

$$f^* : A^*(Y) \longrightarrow A^*(X)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'homomorphisme de Gysin est un di-homomorphisme de modules.

§ 6. Homomorphisme de spécialisation pour les plongements fermés en K_* -théorie.

6.1. Si X est un espace analytique ou algébrique, et F un $\mathcal{O}_X$ -faisceau cohérent, on note $|F|$ la classe de F dans le groupe $K_*(X)$. Si $F_\bullet$ est un complexe borné de $\mathcal{O}_X$ -modules à cohomologie cohérente, on pose

$$|F_\bullet| = \sum (-1)^i |H^i(F_\bullet)| .$$

PROPOSITION 6.2.- Soient $X \xrightarrow{i} Y$ un plongement fermé, N le cône normal de X dans Y , $q : N \longrightarrow X$ la projection.

a) il existe un et un seul homomorphisme

$$\sigma_{Y,X} : K_*(Y) \longrightarrow K_*(N)$$

tel que, pour tout $\mathcal{O}_Y$ -module cohérent F , on ait (3.10)

$$\sigma_{Y,X}(|F|) = |\text{Grad}_X F| ;$$

b) si $F_\bullet$ est un complexe borné de $\mathcal{O}_Y$ -modules à cohomologie cohérente tel que $\mathbb{L}(i \circ q)^*(F_\bullet)$ soit borné, alors

$$\sigma_{Y,X}(|F_\bullet|) = |\mathbb{L}(i \circ q)^*(F_\bullet)| .$$

Notons I l'idéal de définition de X dans Y , M la déformation canonique au cône normal, $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} t^n I^{-n}$ l'algèbre affine de M (2.15), $u : N \hookrightarrow M$ le plongement canonique, $p : M \rightarrow Y$ la projection. Comme N est un diviseur principal dans M , l'homomorphisme composé

$$K_\bullet(N) \xrightarrow{u} K_\bullet(M) \xrightarrow{u^*} K_\bullet(N)$$

est nul. Pour tout $\mathcal{O}_Y$ -module F posons (3.9) :

$$p^h F = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I^{-n} F t^n .$$

Il lui correspond un $\mathcal{O}_M$ -module noté encore $p^h F$. Soit

$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de $\mathcal{O}_Y$ -modules. Alors la suite

$$0 \longrightarrow p^h F' \xrightarrow{p^h \alpha} p^h F \xrightarrow{p^h \beta} p^h F'' \longrightarrow 0$$

n'est pas en général exacte. Cependant $p^h \beta$ est surjectif, $p^h \alpha$ est injectif et le conoyau de l'homomorphisme injectif $p^h F' \hookrightarrow \text{Ker } p^h \beta$ est un Λ -module de torsion, ou encore un $\mathcal{O}_M$ -module à support dans N (lemme d'Artin-Rees). La classe de ce conoyau dans $K_\bullet(M)$ est donc dans l'image de $K_\bullet(N)$ et on a

$$|p^h F| = |p^h F'| + |p^h F''| \text{ mod } u_* K_\bullet(N) .$$

Il résulte de ce qui précède que l'application $F \longrightarrow |\mathbb{L}u^*(p^h F)|$ est additive sur les suites exactes. Par ailleurs on constate que $\mathbb{L}_1 u^* p^h F = 0$ et $u^* p^h F = \text{Grad}_X F$, d'où la première assertion. Démontrons la deuxième assertion.

Il résulte de 3.12 que $\mathbb{L}p^* F_\bullet$ est un complexe borné. La suite spectrale d'hyperhomologie fournit des homomorphismes de lisière

$$H_i(\mathbb{L}p^* F_\bullet) \longrightarrow p^*(H_i F_\bullet)$$

dont les noyaux et conoyaux sont à support dans N . On a donc

$$|\mathbb{L}p^* F_\bullet| = \sum_i (-1)^i |p^*(H_i F_\bullet)| \text{ mod } u_* K_\bullet(N) .$$

Les homomorphismes canoniques $p^*(H_i F_\bullet) \rightarrow p^h(H_i F_\bullet)$ (3.9) sont surjectifs et le noyau est à support dans N . On a donc

$$|\mathbb{L}p^*F_\bullet| = \sum_i (-1)^i p^h(H_i F) \bmod u_* K_*(N).$$

Il résulte que

$$\sigma_{Y,X}(|F_\bullet|) = |\mathbb{L}u^*\mathbb{L}p^*F_\bullet|$$

et l'assertion résulte alors de la fonctorialité de l'image inverse.

6.3. L'homomorphisme $\sigma_{Y,X} : K_*(Y) \rightarrow K_*(N)$ est appelé l'homomorphisme de spécialisation.

6.4. Soit $X \xrightarrow{i} Y$ un plongement fermé régulier. Il résulte alors de 6.2 que le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_*(Y) & \xrightarrow{i^*} & K_*(X) \\ & \searrow \sigma_{Y,X} & \downarrow q^* \\ & & K_*(N) \end{array}$$

Par ailleurs, lorsque X et Y sont algébriques, il résulte de l'exposé 5 que q^* est un isomorphisme. On a donc

$$6.4.1. \quad i^* = (q^*)^{-1} \circ \sigma_{Y,X} = j^* \circ \sigma_{Y,X}$$

où $j : X \rightarrow N$ est l'injection canonique.

THÉOREME 6.5.- Soient $X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé de variétés algébriques quasi-projectives, N le cône normal de X dans Y . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_*(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & A_*(Y) \otimes Q \\ \sigma_{Y,X} \downarrow & & \downarrow \sigma_{Y,X} \otimes \text{Id}_Q \\ K_*(N) & \xrightarrow{\tau_N} & A_*(N) \otimes Q \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des homomorphismes de Riemann-Roch (exp. 4) et les flèches verticales des homomorphismes de spécialisation, est commutatif.

Soit M la déformation canonique de Y au cône normal. On a donc un

plongement $N \xhookrightarrow{u} M$ et l'ouvert complémentaire n'est autre que $Y \times (\mathbb{A}^1 - \{0\})$.

On a de plus une projection plate $M \rightarrow \mathbb{A}^1$.

6.6. Montrons d'abord que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 K_*(N) & \xrightarrow{\tau_N} & A_*(N) \otimes Q \\
 u^* \uparrow & & \uparrow u^* \\
 K_*(M) & \xrightarrow{\tau_M} & A_*(M) \otimes Q
 \end{array}$$

6.6.1.

est commutatif.

Soient F un $\mathcal{O}_M$ -module plat sur $\mathbb{A}^1$, $M \hookrightarrow Z$ un plongement fermé dans une variété lisse. On en déduit un plongement rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 M & \hookrightarrow & Z \times \mathbb{A}^1 \\
 & \searrow & \downarrow \text{pr}_2 \\
 & & \mathbb{A}^1
 \end{array}$$

Par construction de τ , on a (exp. 5) :

$$\tau_M(|F|) = \text{ch}_M^{Z \times \mathbb{A}^1}(F) \cdot \text{Todd}(Z \times \mathbb{A}^1).$$

Par suite

$$u^* \tau_M(|F|) = u^*(\text{ch}_M^{Z \times \mathbb{A}^1}(F)) \cdot \text{Todd}(Z \times \mathbb{A}^1).$$

Il résulte de la propriété d'homotopie (exp. 4) que $u^*(\text{ch}_M^{Z \times \mathbb{A}^1}(F)) = \text{ch}_N^Z(u^*F)$.

Comme $\text{Todd}(Z \times \mathbb{A}^1) = \text{Todd}(Z)$, on a bien

$$u^* \tau_M(|F|) = \tau_N(|u^*(F)|).$$

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{A}^1$ et F un $\mathcal{O}_{M_\lambda}$ -module où M_λ est la fibre de M au-dessus de λ . Notons $i_\lambda : M_\lambda \hookrightarrow M$ l'inclusion. On a $|u^* i_{\lambda*} F| = 0$ et $\tau_M(|i_{\lambda*} F|)$ est, par functorialité du τ , la classe d'un cycle contenu dans M_λ et par suite $u^* \tau_M(|i_{\lambda*} F|) = 0$. On a donc bien

$$u^* \tau_M(|i_{\lambda*} F|) = \tau_N(u^* |i_{\lambda*} F|).$$

Comme $K^*(M)$ est engendré par les classes des $\mathcal{O}_M$ -modules considérés ci-dessus, la commutativité de 6.6.1 est établie.

6.7. On a des suites exactes

$$\begin{aligned} K_*(N) &\xrightarrow{u_*} K_*(M) \longrightarrow K_*(Y \times (\mathbb{A} - \{0\})) \longrightarrow 0 \\ A_*(N) &\xrightarrow{u_*} A_*(M) \longrightarrow A_*(Y \times (\mathbb{A} - \{0\})) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et on a $u^*u_* = 0$. Par suite les homomorphismes de Gysin u^* se factorisent en morphismes de restriction à l'ouvert $Y \times (\mathbb{A} - \{0\})$ suivi d'un morphisme noté v^* . Comme la transformation τ commute à la restriction aux ouverts (exp. 2) on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_*(N) & \xrightarrow{\tau_N} & A_*(M) \otimes Q \\ \uparrow v^* & & \uparrow v^* \\ K_*(Y \times (\mathbb{A} - \{0\})) & \xrightarrow{\tau_Y(\mathbb{A} - \{0\})} & A_*(Y \times (\mathbb{A} - \{0\})) \otimes Q \end{array}$$

6.7.1.

6.8. Notons $\pi : Y \times (\mathbb{A} - \{0\}) \longrightarrow Y$ la première projection. Montrons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_*(Y \times (\mathbb{A} - \{0\})) & \xrightarrow{\sigma_Y \times (\mathbb{A} - \{0\})} & A_*(Y \times (\mathbb{A} - \{0\})) \otimes Q \\ \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* \\ K_*(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & A_*(Y) \otimes Q \end{array}$$

6.8.1.

est commutatif. Soient F un O_Y -module, $Y \hookrightarrow Z$ un plongement lisse. Alors on a un plongement lisse $Y \times (\mathbb{A} - \{0\}) \hookrightarrow Z \times \mathbb{A} - \{0\}$. On a

$$\tau_Y(|F|) = \text{ch}_Y^Z(F) \cdot \text{Todd } Z$$

$$\text{d'où} \quad \pi^* \tau_Y(|F|) = \pi^* \text{ch}_Y^Z(F) \cdot \pi^*(\text{Todd } Z).$$

D'après l'exposé 2, on a

$$\pi^* \text{ch}_Y^Z(F) = \text{ch}_{Y \times (\mathbb{A} - \{0\})}^Z(\pi^* F), \quad \text{car } \pi \text{ est plat.}$$

Comme de plus $\pi^*(\text{Todd } Z) = \text{Todd } Z \times (\mathbb{A} - \{0\})$, on a bien la commutativité

de 6.8.1. Comme on a $\sigma_{Y,X} = u^* \cdot \pi^*$, le théorème résulte de la commutativité de 6.8.1 et 6.7.1.

§ 7. Le théorème de Riemann-Roch pour les morphismes localement d'intersections complètes.

THÉOREME 7.1.- Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement d'intersection complète (1.4) entre variétés quasi-projectives et T_f le complexe tangent à f (1.6). Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_*(X) & \xrightarrow{\tau_X} & A_*(X) \otimes \mathbb{Q} \\ f^* \uparrow & & \uparrow f^* \cdot \text{Todd}(T_f) \\ K_*(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & A_*(Y) \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

où le f^* de gauche est l'image inverse en K -théorie et le f^* de droite l'homomorphisme de Gysin (5.5) est commutatif.

7.2. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux morphismes localement d'intersection complète. Alors $g \circ f$ est localement d'intersection complète (1.9).

On a $(g \circ f)^* = f^* g^*$ aussi bien en K -théorie qu'en théorie de Chow (5.6).

On a $|T_{g \circ f}| = |T_f| + f^* |T_g|$ (1.9) et la classe de Todd transforme les sommes en produits. De sorte que si le théorème 7.1 est vrai pour f et g il est vrai pour $g \circ f$. Il suffit donc de vérifier le théorème dans 3 cas :

- 1) f est un plongement fermé régulier,
- 2) f est la projection d'un fibré projectif,
- 3) f est un plongement ouvert.

Le cas où f est un plongement ouvert est connu (exp. 5), il reste à examiner les deux premiers cas.

7.3. Cas où f est la projection d'un fibré projectif.

Supposons que X soit le fibré projectif $P(E)$ d'un fibré vectoriel E sur Y et que f soit la projection. Il existe un plongement fermé de Y dans une variété lisse et quasi-projective Z munie d'un fibré vectoriel F tel que $E = F \times_Z Y$. On a donc un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & P(F) \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \hookrightarrow & Z \end{array}$$

Soit G un faisceau cohérent sur Y . On a

$$\sigma_Y(|G|) = \text{ch}_Y^Z(G) \cdot \text{Todd } Z.$$

Par suite

$$f^* \tau_Y(|G|) = f^* \text{ch}_Y^Z(G) \cdot \text{Todd } p^* T_Z.$$

D'après l'exposé 2 (II), on a $f^* \text{ch}_Y^Z(G) = \text{ch}_X^{P(F)}(f^* G)$. Notons T_p le fibré des vecteurs tangents verticaux sur $P(F)$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_p \longrightarrow T_{P(F)} \longrightarrow p^* T_Z \longrightarrow 0,$$

d'où $\text{Todd } T_{P(F)} = \text{Todd } F_p \cdot \text{Todd } p^* T_Z$.

On a donc

$$\text{Todd } T_p \cdot f^* \tau_Y(|G|) = \tau_X(|f^* G|),$$

d'où le théorème dans ce cas.

7.4. Cas où f est la projection d'un fibré vectoriel.

Un tel morphisme se factorise en un plongement ouvert et une fibration projective. Vu la remarque 7.2, ce cas résulte de 7.3.

7.5. Cas où f est la section nulle d'un fibré vectoriel.

Notons $p : Y \rightarrow X$ la projection. D'après 7.4, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_*(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & A_*(Y) \otimes Q \\ p^* \uparrow & & \uparrow p^* \cdot \text{Todd } Y \\ K_*(X) & \xrightarrow{\tau_X} & A_*(X) \otimes Q \end{array}$$

Comme $f^* = (p^*)^{-1}$ on en déduit aussitôt le théorème dans ce cas.

7.6. Cas où f est un plongement fermé régulier.

D'après 6.5, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 K_*(N) & \xrightarrow{\tau_N} & A_*(X) \otimes Q \\
 \uparrow \sigma_{Y,X} & & \uparrow \sigma_{Y,X} \\
 K_*(Y) & \xrightarrow{\tau_X} & A_*(Y) \otimes Q
 \end{array}$$

et d'après 4.2.3 et 6.4.1, on a $i^* = j^* \circ \sigma_{Y,X}$. Il suffit donc de démontrer le théorème pour $j : X \hookrightarrow N$ plongement canonique de X dans son fibré normal, et ce cas a été traité en 7.5, d'où le théorème.

§ 8. Homomorphisme de spécialisation pour les plongements fermés, en homologie.

8.1. Soit $\bar{k}$ la clôture algébrique de k . On note A un anneau égal à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_1$, 1 premier, lorsqu'on considère des espaces analytiques ou bien égal à $\mathbb{Z}_1$, 1 premier à la caractéristique de k , lorsqu'on considère des variétés algébriques sur k . Soit X un espace analytique, on note $H_*(X, A)$ l'homologie singulière localement finie de X à coefficients dans A (exp. 6). Soit X une variété algébrique sur k , on note $H_*(X, A)$ l'homologie étale de $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$ à coefficients dans A (exp. 8), de sorte que le groupe de Galois $\text{Gal}(k_s/k)$ opère naturellement sur cette homologie. On désignera par $\mathfrak{q}$ une famille de supports sur X . Lorsque X sera une variété algébrique sur k , $\mathfrak{q}$ sera sauf mention contraire la famille de tous les fermés ou la "famille des compacts".

Notons que lorsque X est une variété algébrique sur $\mathbb{C}$ et $A = \mathbb{Z}_1$, les théories de l'homologie étale et de l'homologie singulière de l'espace analytique correspondant X_{an} coïncident (exp. 6).

On notera $H^*(X, A)$, $H_{\mathfrak{q}}^*(X, A)$ les théories de la cohomologie correspondantes, étales ou singulières selon les cas. Dans le cas algébrique, ces groupes sont munis d'une action de $\text{Gal}(k_s/k)$.

8.2. Soient $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé, N le cône normal de X dans Y . $q : N \rightarrow X$ la projection, M la déformation canonique au cône normal,

$\pi : M \longrightarrow A$ la projection canonique sur la droite affine. On a $\pi^{-1}\{0\} = N$ et $\pi^{-1}(A - \{0\}) = Y \times (A - \{0\})$ et sur cet ouvert π est la deuxième projection. On pose $i \quad q = \rho : N \longrightarrow Y$. On note T_Y (resp. T_N) le complexe dualisant (exp. 7 et 8) sur Y (resp. N).

Soit $R\pi_! A$ le complexe des images directes à supports propres de A . La fibre en $0 \in A$ de ce complexe est $R\Gamma_C(N, A)$ et $R\pi_! A|_{A - \{0\}}$ est isomorphe au complexe constant $R\Gamma_C(Y, A)$. On a donc un morphisme de généralisation

$$R\Gamma_C(N, A) \longrightarrow R\Gamma_C(Y, A)$$

d'où en dualisant, un morphisme de spécialisation

$$8.2.0. \quad R\Gamma(Y, T_Y) \longrightarrow R\Gamma(N, T_N)$$

compatible avec la localisation sur Y . On obtient donc, en localisant sur Y , un morphisme de complexes de faisceaux

$$8.2.1. \quad \sigma_{Y, X} : \rho^* T_Y \longrightarrow T_N$$

appelé l'homomorphisme de spécialisation.

En dualisant et bidualisant, ce morphisme peut avoir différents avatars.

Tout d'abord, il peut être interprété comme un élément

$$8.2.2. \quad \sigma_{Y, X} \in R^0\Gamma(N, R\text{Hom}(\rho^* T_Y, T_N))$$

Il résulte de la bidualité locale sur Y que

$$R\text{Hom}(\rho^* T_Y, T_N) = \rho^! A$$

où $\rho^!$ est le foncteur image inverse tordue (exp. 8). On dispose donc d'une classe

$$8.2.3. \quad \sigma_{Y, X} \in R^0\Gamma(N, \rho^! A)$$

appelée classe de spécialisation. En utilisant la dualité relative pour le morphisme $q : N \longrightarrow X$, la classe 8.2.3 s'interprète encore comme un homomorphisme de complexes sur X :

$$8.2.4. \quad \sigma_{Y, X} : Rq_! A \longrightarrow Ri^! A$$

où, en utilisant la dualité relative pour $\rho : N \longrightarrow Y$, la classe 8.2.3 donne un homomorphisme de complexes sur Y

$$8.2.5. \quad \sigma_{Y,X} : R\rho_! A \longrightarrow A \quad .$$

Tous ces homomorphismes seront appelés homomorphismes de spécialisation.

Lorsque Y est un cône de sommet X , on vérifie facilement que les homomorphismes de spécialisation sous la forme 8.2.0 et 8.2.4 sont des isomorphismes.

8.3. Soit $\tilde{\varnothing}$ une famille de supports sur Y . L'homomorphisme 8.2.1 induit des homomorphismes encore notés

$$8.3.1. \quad \sigma_{Y,X} : H_{\bullet}^{\tilde{\varnothing}}(Y, A) \longrightarrow H_{\bullet}^{\tilde{\varnothing}}(N, A) \quad .$$

Soit ψ une famille de supports sur Y et $\beta \in H_{\psi}^*(Y, A)$. On a alors, pour $\alpha \in H_{\bullet}^{\tilde{\varnothing}}(Y, A)$,

$$8.3.2. \quad \sigma_{Y,X}(\alpha) \cap \rho^* \beta = \sigma_{Y,X}(\alpha \cap \beta) \quad .$$

Soit $\tilde{\varnothing}'$ une famille de supports sur N , adaptée à $\tilde{\varnothing}$ (i.e. si $W \in \tilde{\varnothing}'$, $\rho(W) \in \tilde{\varnothing}$, et $\rho|_W$ est propre). Alors 8.2.5 induit des homomorphismes encore notés

$$8.3.3. \quad \sigma_{Y,X} : H_{\tilde{\varnothing}}^*(N, A) \longrightarrow H_{\tilde{\varnothing}}^*(Y, A) \quad .$$

Lorsque $\tilde{\varnothing}$ et $\tilde{\varnothing}'$ sont les familles des compacts, l'homomorphisme 8.3.3 est le dual (au sens dérivé) de 8.3.1 pour la famille de tous les fermés.

8.4. Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

un diagramme cartésien où f est propre, N (resp. N') le cône normal de X (resp. X') dans Y (resp. Y'). Le morphisme f induit un morphisme propre $g : N' \longrightarrow N$ au-dessus de f , i.e. on a un diagramme commutatif

$$8.4.1. \quad \begin{array}{ccc} N' & \xrightarrow{g} & N \\ \rho' \downarrow & & \downarrow \rho \\ Y' & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

On a donc des diagrammes en homologie

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\bullet}^{\tilde{\sigma}}(Y, \Lambda) & \xrightarrow{\sigma_{Y,X}} & H^{\rho-1}(\tilde{\sigma})(N, \Lambda) \\
 \uparrow f^* & & \uparrow g^* \\
 H_{\bullet}^{\tilde{\sigma}-1}(\tilde{\sigma})(Y', \Lambda) & \xrightarrow{\sigma_{Y',X'}} & H^{(\rho \circ \rho)-1}(\tilde{\sigma})(N', \Lambda)
 \end{array}$$

et en cohomologie pour des familles adaptées

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\tilde{\sigma}}^{\bullet}(Y, \Lambda) & \xrightarrow{\sigma_{Y,X}} & H_{\psi}^{\bullet}(N, \Lambda) \\
 \downarrow f^* & & \downarrow g^* \\
 H_{f^{-1}(\tilde{\sigma})}^{\bullet}(Y', \Lambda) & \xrightarrow{\sigma_{Y',X'}} & H_{g^{-1}(\psi)}^{\bullet}(N', \Lambda)
 \end{array}$$

PROPOSITION 8.5.- Les diagrammes 8.4.2 et 8.4.3 sont commutatifs.

Soient M et M' les déformations canoniques aux cônes normaux de X et X' respectivement. On a un morphisme

$$\begin{array}{ccc}
 h : M' & \longrightarrow & M \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \Lambda &
 \end{array}$$

au-dessus de Λ qui est propre, qui induit g sur la fibre en 0 et f sur les fibres non nulles. On a donc un diagramme commutatif de générations

$$\begin{array}{ccc}
 R\Gamma_C(N, \Lambda) & \xrightarrow{g^*} & R\Gamma_C(N', \Lambda) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R\Gamma_C(Y, \Lambda) & \xrightarrow{f^*} & R\Gamma_C(Y', \Lambda)
 \end{array}$$

La proposition s'en déduit par des manipulations formelles en dualisant.

COROLLAIRE 8.6.- Notons $j : X \hookrightarrow N$ l'inclusion canonique. Le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\bullet}^{\tilde{\sigma}}(Y, \Lambda) & \xrightarrow{\sigma_{Y,X}} & H_{\bullet}^{\rho-1}(\tilde{\sigma})(N, \Lambda) \\
 \nwarrow i^* & & \nearrow j^* \\
 & H^{\tilde{\sigma}} \cap X(X, \Lambda) &
 \end{array}$$

C'est le cas particulier où $Y' = X$.

PROPOSITION 8.7.- Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & Y' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

un diagramme cartésien avec f plat de dimension relative d et i plongement fermé, N et N' les cônes normaux de i et i' respectivement, $g : N' \rightarrow N$ le morphisme plat induit par f , $\mathcal{S}$ une famille de supports sur Y . Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_0^0 \circ g^{-1}(\mathcal{S})(N')(-d) & \xleftarrow{\sigma_{Y',X'}} & H_0^{f^{-1}(\mathcal{S})}(Y')(-d) \\ g^* \uparrow & & \uparrow f^* \\ H_0^{g^{-1}(\mathcal{S})}(N) & \xleftarrow{\sigma_{Y,X}} & H_0^{\mathcal{S}}(Y) \end{array}$$

où f^* et g^* sont les images inverses (fonctorialité extraordinaire) (exp. 7, n°2 et exp. 8) est commutatif^(*).

Soient M et M' les déformations canoniques aux cônes normaux de X et X' respectivement. On a un morphisme

$$\begin{array}{ccc} h : M' & \longrightarrow & M \\ & \searrow \pi' & \swarrow \pi \\ & A & \end{array}$$

qui induit f sur les fibres non nulles et g sur la fibre en 0 . Comme f est plat, h est plat. Le morphisme

$$\mathrm{Tr}_h : \mathrm{Rh}_! A \longrightarrow A(-d)$$

est donc défini (exp. 6 et exp. 8), d'où un morphisme

$$\mathrm{R}\pi_! \mathrm{Tr}_h : \mathrm{R}\pi_! A \longrightarrow \mathrm{R}\pi_! A(-d) .$$

On en déduit un diagramme commutatif de génératisation

$$\begin{array}{ccc}
 R\Gamma_C(N', A) & \xrightarrow{R\Gamma_C(\text{Tr}_g)} & R\Gamma_C(N, A)(-d) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R\Gamma_C(Y', A) & \xrightarrow{R\Gamma_C(\text{Tr}_f)} & R\Gamma_C(Y, A)(-d)
 \end{array}$$

La proposition s'en déduit par des manipulations formelles en dualisant.

8.8. Dans l'exposé 6, on définit la classe fondamentale d'un espace analytique X . C'est une classe d'homologie $[X] \in H_{2\dim X}(X, A)$. Dans l'exposé 8, dans le cas k algébriquement clos, la classe fondamentale de X a été définie comme une classe $[X] \in H_{2\dim X}(X, A)(-\dim X)$. Posons $d = \dim X$. La torsion de $-\dim X = -d$ provient de ce que, lorsque X est irréductible, $H_{2d}(X, A)$ s'identifie naturellement à $\mu_{1^\infty}^{\otimes d} = A(d)$. De sorte que $H_{2d}(X, A)(-d)$ est canoniquement isomorphe à A et la classe $[X]$ dans cet isomorphisme correspond à l'entier $m_X \in \mathbb{Z}_1$ où m_X est la multiplicité générique de X .

Lorsque k n'est pas algébriquement clos, on a posé $H_{2d}(X, A) = H_{2d}(\bar{X}, A)$ de sorte que $H_{2d}(X, A)$ est un $\text{Gal}(k_s/k)$ -module et que $H_{2d}(X, A)(-d)$ est le $\text{Gal}(k_s/k)$ -module $H_{2d}(X, A) \otimes \mu_{p^\infty}^{-d}$. L'action du groupe de Galois sur ce module n'est pas en général triviale (par exemple si X est irréductible mais non géométriquement irréductible). Cependant la classe fondamentale de $\bar{X}$ est un élément fixe sous cette action. On l'appelle la classe fondamentale de X et on la note $[X] \in H_{2d}(X, A)(-d)$.

Plus généralement si W est un cycle de X de dimension n , la classe d'homologie associée à W est un élément $[W]$ dans le $\text{Gal}(k_s/k)$ -module $H_{2n}(X, A)(-n)$. On posera dans la suite $\tilde{H}_n(X, A) = H_{2n}(X, A)(-n)$ lorsque X est algébrique et $H_n(X, A) = H_{2n}(X, A)$ lorsque X est analytique.

PROPOSITION 8.9.- Soient $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé, N le cône normal de i . L'homomorphisme de spécialisation

$$\tilde{\sigma}_{Y,X} : \tilde{H}_*(Y) \longrightarrow \tilde{H}_*(N)$$

transforme la classe fondamentale de Y en la classe fondamentale de N .

Résulte de l'exposé 6 dans le cas analytique. On peut faire une démonstration analogue dans le cas algébrique.

COROLLAIRE 8.10.— Soit $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé de variétés algébriques. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_*(Y) & \xrightarrow{\sigma_{Y,X}} & A_*(N) \\ \text{cl} \downarrow & & \downarrow \text{cl} \\ \tilde{H}_*(Y) & \xrightarrow{\sigma_{Y,X}} & \tilde{H}_*(N) \end{array}$$

est commutatif.

Résulte de 8.9, de la définition de l'homomorphisme cl (exp. 6, exp. 8) et de 8.5.

§ 9. Homomorphisme de Gysin pour les plongements fermés réguliers, en homologie.

9.1. Soient $X \xrightarrow{i} Y$ un plongement fermé et régulier de codimension d , $q : N \rightarrow X$ le fibré normal à i . Alors l'homomorphisme d'image inverse

$$q^* : H_*(X)(d) \longrightarrow H_*(N)$$

est un isomorphisme de degré $2d$. On pose

$$i^* = (q^*)^{-1} \circ \sigma_{Y,X}$$

de sorte que

$$9.1.1. \quad i^* : H_*(Y) \longrightarrow H_*(X)(d)$$

est un homomorphisme de degré $-2d$. On l'appelle l'homomorphisme de Gysin.

9.2. Comme la formation de la classe d'homologie associée à un cycle commute aux images inverses par les morphismes plats (exp. 6 et 8), il résulte aussitôt des définitions 9.1 et 4.1 et de la proposition 8.10 qu'on a un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} A_*(Y) & \xrightarrow{i^*} & A_*(X) \\ \text{cl} \downarrow & & \downarrow \text{cl} \\ \tilde{H}_*(Y) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{H}_*(X) \end{array}$$

9.2.1.

9.3. Notons $j : X \hookrightarrow N$ l'injection canonique. Comme on a $q \circ j = \text{Id}_X$, on a $j^! \circ q^! A = A$ et par suite on a un homomorphisme canonique de complexes de N faisceaux

$$9.3.1. \quad \begin{cases} \theta_N : A \xrightarrow{\sim} j^!(A[2d])(d) \\ \theta_N : A_X \longrightarrow A[2d](d) \end{cases}$$

qu'on interprète comme une classe de cohomologie

$$\theta_N \in H_X^{2d}(N, A)(d)$$

qu'on appelle la classe de Thom du fibré N .

Par ailleurs on a une classe de spécialisation (8.2.3)

$$\sigma_{Y,X} : A \longrightarrow p^! A$$

d'où en appliquant le foncteur $j^!$ un morphisme composé de complexes de faisceaux sur X

$$\theta_N \circ j^! \sigma_{Y,X} [2d](d) = \theta_{X,Y} : A \longrightarrow i^! A[2d](d)$$

qu'on peut interpréter comme un morphisme sur Y

$$9.3.1. \quad \theta_{X,Y} : A_X \longrightarrow A[2d](d)$$

c'est-à-dire une classe de cohomologie

$$9.3.2. \quad \theta_{X,Y} \in H_X^{2d}(Y, A)(d)$$

qu'on appelle la classe de Thom du plongement fermé régulier $X \hookrightarrow Y$.

9.4. On constate alors que l'homomorphisme de Gysin (9.1.1.) n'est autre que le cap-produit avec la classe de Thom. Plus généralement si $\tilde{\varphi}$ est une famille de supports sur X , le cap-produit avec la classe de Thom est un homomorphisme de degré $-2d$

$$i^* : H_{\tilde{\varphi}}^*(Y, A) \longrightarrow H_*(X, A)(d)$$

qu'on appelle homomorphisme de Gysin.

De même en composant avec la classe de Thom on obtient des homomorphismes de Gysin en cohomologie de degré $2d$

$$i^* : H_{\tilde{\varphi} \cap X}^*(X, A) \longrightarrow H_{\tilde{\varphi}}^*(Y, A)(d) .$$

Lorsque $\tilde{\varphi}$ est la famille des compacts (resp. de tous les fermés) l'homomor-

phisme de Gysin en cohomologie est dual (au sens dérivé) de l'homomorphisme de Gysin en homologie pour la famille de tous les fermés (resp. des compacts).

9.5. En interprétant la classe de Thom comme un morphisme de complexes sur Y

$$\theta_{Y,X} : T_Y \longrightarrow Ri_* T_X[-2d](-d)$$

en regardant les homomorphismes dans un complexe variable F^* sur Y et en utilisant les théorèmes de dualité sur X et sur Y , on constate que $\theta_{Y,X}$ est déterminé par les homomorphismes fonctoriels en F^* défini par le cup-produit par $\theta_{Y,X} \in H_X^{2d}(Y, A)(d)$:

$$9.5.1. \quad \cdot \cap \theta_{Y,X} : H_C^*(X, F^*/X) \longrightarrow H_C^{*+2d}(Y, F^*)(d) .$$

De plus les homomorphismes 9.5.1 peuvent se décrire ainsi : notons $r : M \rightarrow Y$ le morphisme canonique sur Y de la déformation canonique au cône normal. Le morphisme $\pi : M \rightarrow A$ et le faisceau r^*F permettent de définir un homomorphisme de généralisation

$$9.5.2. \quad H_C^*(N; p^*F^*) \xrightarrow{\sigma_{Y,X}} H_C^*(Y, F^*) .$$

La classe de Thom de N définit un cup-produit

$$9.5.3. \quad H_C^*(X, F^*/X) \longrightarrow H_C^{*+2d}(N, p^*F)(d)$$

et le morphisme 9.5.1 est le composé des morphismes 9.5.2 et 9.5.3.

PROPOSITION 9.6.- Soient $i : X \rightarrow Y$ un plongement régulier,

$$\begin{array}{ccc} & & W \\ & \nearrow j & \downarrow r \\ A \times X & \xleftarrow{i \times Id} & Y \times A \end{array}$$

un diagramme commutatif où j est une immersion régulière et W est plat sur A . On suppose que r induit un isomorphisme de $r^{-1}(Y \times (A - \{0\}))$ sur $Y \times (A - \{0\})$. De sorte que, pour tout complexe de faisceaux F^* sur Y , on a un homomorphisme de généralisation

$$H_C^*(Y, F^*) \xrightarrow{g} H_C^*(W_0, r_0^*F) .$$

Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H_C^*(Y, F^*) & \xrightarrow{g} & H_C^*(W_0, r_0^* F) \\
 \nearrow \cap \theta_{Y,X} & & \nearrow \cap \theta_{W_0,X} \\
 & H_C^*(X, F^*/X) &
 \end{array}$$

est commutatif.

Pour démontrer le lemme, on adapte la démonstration de 4.3 et on utilise la description des homomorphismes de cup-produit donnée en 9.5.

THÉOREME 9.7.- Soient $X \rightarrow Z \rightarrow Y$ deux plongements fermés réguliers de codimension d et d' respectivement. Alors la classe de Thom

$0_{Y,X} \in H_X^{2(d+d')}(Y, \mathbb{A})(d+d')$ est la classe composée des classes de Thom
 $\theta_{Y,Z} \in H_Z^{2d'}(Y, \mathbb{A})(d')$ et $\theta_{X,Z} \in H_X^{2d}(Z, \mathbb{A})(d)$.

D'après 9.5, il suffit de montrer que $\theta_{Y,X}$ et $\theta_{Y,Z} \theta_Z$ ont le même effet sur la cohomologie $H_C^*(Y, F^*)$ d'un complexe quelconque sur Y . Supposons d'abord que Y soit un fibré vectoriel sur Z de projection $p: Y \rightarrow Z$ sur Z et que F^* soit de la forme p^*G^* où G^* est un complexe de faisceaux sur Z . En vertu de la propriété de changement de base par les morphismes plats (cf. 8.7) on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H_C^*(X, G^*/X) & \xrightarrow{\cap \theta_{Z,X}} & H_C^*(Z, G^*)(d) \\
 \uparrow \cap \theta_{X \times_Z Y, X}^{-1} & & \uparrow (\cap \theta_{Y,Z})^{-1} \\
 H_C^*(X \times_Z Y, p^*G^*/X)(d') & \xrightarrow{\cap \theta_{Y, X \times_Z Y}} & H_C^*(Y, p^*G^*)(d)(d')
 \end{array}$$

De plus la déformation canonique $M(X, Y)$ est canoniquement isomorphe à $M(X \times_Z Y, Y)$ (2.16). On a donc

$$\cap \theta_{Y, X \times_Z Y} = \sigma_{Y, X \times_Z Y} \circ (\cap \theta_{N(X \times_Z Y, Y), X \times_Z Y})$$

De plus on a

$$\cap \theta_{N(X, Y), X} = (\cap \theta_{N(X \times_Z Y, Y), X \times_Z Y}) \circ (\cap \theta_{X \times_Z Y, X})$$

car le théorème est vrai lorsque Z et Y sont des fibres vectoriels sur X

et $Z \rightarrow Y$ un morphisme de fibrés vectoriels.

Il résulte alors de la commutativité de 9.7.1 qu'on a

$$9.7.2. \quad \theta_{Y,Z} \circ \theta_{Z,X} = \theta_{Y,X} \quad .$$

Dans le cas général, on applique 9.6 à la déformation canonique au cône normal de Z dans Y . On obtient

$$9.7.3. \quad \theta_{Y,X} = \sigma_{Y,Z} \circ \theta_{N(Y,Z),X} \quad .$$

D'où compte tenu de 9.7.2

$$\theta_{Y,X} = \sigma_{Y,Z} \circ \theta_{Y,Z} \circ \theta_{Z,X}$$

et par 9.5, on sait que

$$\theta_{Y,Z} = \sigma_{Y,Z} \circ \theta_{Y,Z}$$

d'où le théorème.

PROPOSITION 9.8.- Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow q & \downarrow p \\ & & Z \end{array}$$

un diagramme commutatif tel que i soit un plongement régulier, p et q des morphismes plats de dimension relative d et d' . Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_C^*(X, q^*F) & \xrightarrow{\cap \theta_{Y,X}} & H_C^*(Y, p^*F)(d' - d) \\ \text{Tr}_p \downarrow & & \swarrow \text{Tr}_q \\ H_C^*(Z, F^*)(-d) & & \end{array}$$

est commutatif.

La proposition est tout d'abord immédiate lorsque Y est un fibré vectoriel sur X et i la section nulle. Dans le cas général, notons $p : N \rightarrow Y$ le cône normal à i . D'après 9.6, appliqué la déformation canonique M de i , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & H_C^*(N, p^*p^*F) \\ & \nearrow \cap \theta_{N,X} & \downarrow \sigma_{Y,X} \\ H_C^*(X, q^*F) & \xrightarrow{\cap \theta_{Y,X}} & H_C^*(Y, p^*F) \end{array}$$

Il suffit donc de vérifier la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H_C^*(N) \otimes p^*p^*F & \longrightarrow & H_C^*(Y, p^*F) \\
 \searrow \text{Tr}_{p \circ \rho} & & \searrow \text{Tr}_p \\
 & & H_C^*(Z, F')(-d')
 \end{array}$$

qui résulte du fait que M est plat sur $Z \times A$ (2.14) et que le morphisme trace commute aux changements de base.

COROLLAIRE 9.9.- Soient $X \xleftarrow{i} Z \xrightarrow{j} Y$ deux plongements fermés réguliers de codimension d et d' , δ une famille de supports sur Y . Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H_*^{\delta}(Y, A) & \xrightarrow{j^*} & H_*^{\delta \cap Z}(Z, A)(d') \\
 \searrow (j \circ i^*) & & \downarrow i^* \\
 & & H_*^{\delta \cap X}(X, A)(d + d')
 \end{array}$$

est commutatif.

Résulte immédiatement de 9.7 et 9.4.

COROLLAIRE 9.10.- Soient

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow{i} & Y \\
 \searrow p & & \searrow q \\
 & & Z
 \end{array}$$

un diagramme commutatif où p et q sont plats de dimension relative d et d' , i est un plongement régulier, δ une famille de supports sur Z . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H_*^{p^{-1}(\delta)}(X, A)(-d') & \xleftarrow{i^*} & H_*^{q^{-1}(\delta)}(Y, A)(-d) \\
 \nwarrow p^* & & \nearrow q^* \\
 & & H_*^{\delta}(Z, A)
 \end{array}$$

où p^* et q^* sont les homomorphismes d'image inverse (exp. 8 et 9) et i^* l'homomorphisme de Gysin est commutatif.

Résulte de 9.8 en dualisant.

9.11. On peut déduire de 9.7 et 9.8 des propriétés de commutation pour l'homomorphisme de Gysin en cohomologie.

§ 10. L'homomorphisme de Gysin pour les morphismes d'intersection complète, en homologie.

10.1. Soit $f = X \rightarrow Y$ un morphisme lissifiable localement d'intersection complète (1.4) de dimension relative virtuelle $d \in \mathbb{Z}$ (1.5). Soit

10.1.1.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Z \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & Y \end{array}$$

une factorisation de f en un plongement régulier suivi d'un morphisme lisse.

Notons
$$f^* : H_{\bullet}^{\delta}(Y, A) \longrightarrow H_{\bullet + 2d}^{f^{-1}(\delta)}(X, A)(-d)$$

l'homomorphisme composé $f^* = i^* \circ p^*$. C'est un homomorphisme de degré $2d$.

On démontre, avec les mêmes méthodes qu'au paragraphe 5, que cet homomorphisme ne dépend pas de la factorisation, qu'il est multiplicatif en f , qu'il coïncide avec l'image inverse lorsque f est plat et qu'il se calcule avec le cup-produit lorsque Y est lisse. On appelle cet homomorphisme, l'homomorphisme de Gysin.

10.2. Il résulte immédiatement des définitions que dans le cas algébrique, la formation des classes d'homologies associées à des cycles commutent aux homomorphismes de Gysin.

- [1] S.G.A.G. - Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch,
P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE, Springer-Verlag, n°225.
- [2] E.G.A. IV (4e partie) par A. GROTHENDIECK, Publ. Math. I.H.E.S., n°32.