

Astérisque

GÉRARD LAUMON

Homologie étale

Astérisque, tome 36-37 (1976), p. 163-188

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__163_0>

© Société mathématique de France, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HOMOLOGIE ÉTALE

par Gérard LAUMON

0. Rappels.(0.1) Image à supports propres.

(0.1.1) Soit k un corps algébriquement clos. Soient X et Y deux k -schémas de type fini et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme. D'après Nagata, il existe une compactification

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \bar{X} \\ f \searrow & & \swarrow \bar{f} \\ & Y & \end{array}$$

où $\bar{X}$ est un k -schéma de type fini, $\bar{f}$ est propre et i est une immersion ouverte.

Soient A un anneau de torsion et $i_!$ le foncteur "prolongement par zéro" de $D(X, A)$ dans $D(\bar{X}, A)$. Alors le foncteur composé :

$$Rf_! = R\bar{f}_* \circ i_! : D(X, A) \longrightarrow D(Y, A)$$

ne dépend pas de la compactification de f choisie.

Si $f : X \rightarrow \text{Spec}(k)$ est le morphisme canonique, on pose pour tout $F \in \text{Mod}(X, A)$

$$H_C^q(X, F) = H^q(Rf_! F) \quad .$$

(0.1.2) Propriétés de $Rf_!$.

- (a) commute au changement de base.
- (b) commute à la composition.
- (c) si les fibres de f sont de $\dim \leq d$, alors $R^i f_! F = 0$ pour tout $F \in \text{Mod}(X, A)$ et $i > 2d$.
- (d) si $F \in \text{Mod}(X, A)$ est constructible, il en est de même de $Rf_! F$.

(0.2) Morphisme trace.

Soit $p = \text{car}(k)$, supposons que la torsion de A est première à p .
 Considérons les triples (f, d, F) tels que

- (i) $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme entre k -schémas de type fini.
- (ii) $F \in \text{Mod}(Y, A)$ et d est un entier.
- (iii) il existe un ouvert U de X tel que $f|_U : U \rightarrow Y$ soit plat, de présentation finie à fibres de dimension $\leq d$ et tel que les fibres de $f|_{X-U} : X-U \rightarrow Y$ soient de dimensions $< d$.

THÉOREME (0.2.1).- A tout triple (f, d, F) ci-dessus, on peut associer d'une façon et d'une seule un morphisme trace

$$\text{Tr}_f : R^{2d}_{f,!} f^* F(d) \rightarrow F$$

tel que :

- (Var 1) il soit fonctoriel en F .
- (Var 2) il commute au changement de base.
- (Var 3) il soit compatible à la composition.
- (Var 4) (I) Si f est fini, localement libre de rang n et si $d = 0$, alors le morphisme composé

$$F \rightarrow f_* f^* F = f_! f^* F \xrightarrow{\text{Tr}_f} F$$

est la multiplication par n .

- (II) Si K est un corps algébriquement clos de car p , si f est une courbe $X \rightarrow \text{Spec}(K)$ et si $d = 1$, alors le morphisme trace

$$\text{Tr}_f : H^2_c(X, A(1)) \rightarrow A$$

s'obtient de la façon suivante : soit $\bar{X}$ une courbe complète sur K contenant X_{red} comme ouvert dense, soit I l'ensemble des composantes irréductibles de X (ou $\bar{X}$), pour tout $i \in I$, soient η_i le point générique de la composante irréductible i et $n_i = \text{lg}(\mathcal{O}_{X, \eta_i})$. Alors si on identifie $H^2_c(X, A(1))$ à A^I par les isomorphismes

$$H_C^2(X, \mathbb{A}(1)) \simeq H_C^2(X_{\text{red}}, \mathbb{A}(1)) \simeq H^2(\bar{X}, \mathbb{A}(1)) \simeq \mathbb{A}^1$$

le morphisme trace n'est autre que le morphisme

$$t : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}$$

donné par $t((a_i)) = \sum a_i n_i$.

(0.3) Image inverse extraordinaire.

THÉORÈME (0.3.1).- Sous les hypothèses de (0.2), le foncteur

$$Rf_! : D(X, \mathbb{A}) \longrightarrow D(Y, \mathbb{A})$$

admet un adjoint à droite partiel

$$Rf^! : D^+(Y, \mathbb{A}) \longrightarrow D^+(X, \mathbb{A})$$

i.e. pour $K \in D(X, \mathbb{A})$, $L \in D^+(Y, \mathbb{A})$, on a

$$\text{Hom}(Rf_! K, L) \simeq \text{Hom}(K, Rf^! L)$$

ceci fonctoriellement en K et L .

(0.3.2) Propriétés de $Rf^!$.

(a) Si $f : X \longrightarrow Y$ est une immersion fermée, alors $Rf^! = R\Gamma_X$ où Γ_X est le foncteur "faisceau des germes de sections à support dans X ".

(b) Si $f : X \longrightarrow Y$ est lisse de dimension relative d , alors $Rf_!$ admet pour adjoint à droite le foncteur

$$K \longrightarrow f^* K(d)[2d]$$

avec pour flèche d'adjonction le morphisme trace (dualité de Poincaré).

(c) Si F est un faisceau de $\mathbb{A}$ -modules constructibles, $Rf^! F$ est à cohomologie bornée constructible (exposé 7).

Remarque (0.3.3).- On notera $D^C(X, \mathbb{Z}_\ell)$ la catégorielle des complexes constructibles de $\mathbb{Z}_\ell$ -faisceaux. Tout ce qui a été dit auparavant s'étend à ces catégories (voir SGA 5) puisqu'on a les théorèmes de finitude pour $Rf_!$ et $Rf^!$.

VIII-04

1. Complexe dualisant.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p , soit e un nombre premier $\neq p$.

DÉFINITION (1.1).— Soit $\pi : X \longrightarrow \text{Spec}(k)$ un k -schéma de type fini, on appelle complexe dualisant et on note T_X , le complexe constructible de $\mathbb{Z}$ -faisceaux $R\pi^! \mathbb{Z}_\ell \in D^C(X, \mathbb{Z}_\ell)$.

THEOREME (1.2).— (Deligne) — Si on note $D_X(\cdot)$ le foncteur $R\text{Hom}(\cdot, T_X)$ de $D^C(X, \mathbb{Z}_\ell)$ dans elle-même, alors le morphisme naturel

$$\text{Id} \longrightarrow D_X \circ D_X$$

est un isomorphisme.

COROLLAIRE (1.2.1).— Soit x un point géométrique de X . Soient $V(x)$ l'hensélisé strict de X en x , $\{x\}$ l'image de x dans X et $\{\bar{x}\}$ son adhérence. Alors si $\delta = \dim\{\bar{x}\}$, on a un isomorphisme canonique

$$T_{X,x} \simeq R\text{Hom}(R\Gamma_{\{x\}}(V(x), \mathbb{Z}_\ell), \mathbb{Z}_\ell) [2\delta](\delta)$$

et donc on a les suites exactes

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(H_{\{x\}}^{q+2\delta+1}(V(x), \mathbb{Z}_\ell), \mathbb{Q}_e/\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H_q T_{X,x}(-\delta) \longrightarrow \text{Hom}(H_{\{x\}}^{q+2\delta}(V(x), \mathbb{Z}_\ell), \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow 0$$

En effet $R\Gamma_{\{x\}}(V(x), \mathbb{Z}_\ell)$ est la fibre en x de $R\text{Hom}(\mathbb{Z}_{\ell, \{\bar{x}\}}, \mathbb{Z}_\ell)$ où $\mathbb{Z}_{e, \{\bar{x}\}}$ est le faisceau caractéristique de $\{\bar{x}\}$ dans X . Or $\mathbb{Z}_\ell \simeq R\text{Hom}(T_X, T_X)$, donc $R\text{Hom}(\mathbb{Z}_{\ell, \{\bar{x}\}}, \mathbb{Z}_\ell)$ est la fibre en x de

$$R\text{Hom}(\mathbb{Z}_{\ell, \{\bar{x}\}}, R\text{Hom}(T_X, T_X)) \simeq R\text{Hom}(T_X \otimes \mathbb{Z}_{\ell, \{\bar{x}\}}, R\text{Hom}(\mathbb{Z}_{\ell, \{x\}}, T_X))$$

Or $R\text{Hom}(\mathbb{Z}_{\ell, \{\bar{x}\}}, T_X) = T_{\{\bar{x}\}}$ et donc on a un isomorphisme.

$$R\Gamma_{\{x\}}(V(x), \mathbb{Z}_e) \simeq R\text{Hom}(T_X \otimes \mathbb{Z}_{e, \{\bar{x}\}}, T_{\{\bar{x}\}})_x .$$

Mais au voisinage de x , point générique de $\{\bar{x}\}$, $T_{\{\bar{x}\}}$ est isomorphe à $\mathcal{N}_e^{\otimes \delta} [2\delta]$ (car $\{\bar{x}\}$ est lisse au voisinage de x) ; d'autre part la cohomologie de $T_X \otimes \mathbb{Z}_{e, \{\bar{x}\}}$ est localement constante au voisinage de x dans $\{\bar{x}\}$.

Donc

$$R\text{Hom}(T_X \otimes \mathbb{Z}_{e, \{\bar{x}\}}, T_{\{\bar{x}\}})_x = R\text{Hom}((T_X \otimes \mathbb{Z}_{e, \{\bar{x}\}})_x, T_{\{\bar{x}\}, x})$$

d'où

$$R\Gamma_{\{x\}}(V(x), \mathbb{Z}_e) \simeq R\text{Hom}(T_{X, x}, \mathbb{Z}_e)(\delta) [2\delta]$$

d'où par bidualité l'isomorphisme cherché.

(1.3) On en déduit les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \tau_q \longrightarrow H_q^T X \longrightarrow L_q \longrightarrow 0$$

où τ_q et L_q sont les faisceaux associés aux préfaisceaux suivants :

$$U \longmapsto \text{Hom}(H_C^{q+1}(U, \mathbb{Z}_e), \mathbb{Q}_e / \mathbb{Z}_e)$$

et

$$U \longmapsto \text{Hom}(H_C^q(U, \mathbb{Z}_e), \mathbb{Z}_e)$$

$$q = 2d, \tau_{2d} = 0, \text{ donc}$$

$$H_{2d}^T X = L_{2d} .$$

De plus si $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X , on a la suite spectrale de localisation

$$E_1^{-p, q} = \bigoplus_{|\underline{i}| = p+1} H_C^q(U_{\underline{i}}, \mathbb{Z}_e) \Rightarrow H_C^{-p+q}(X, \mathbb{Z}_e)$$

où $\underline{i} = (i_0, \dots, i_k)$, $|\underline{i}| = k$ et $U_{\underline{i}} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$.

D'où la suite exacte :

$$\prod_{i,j} H_c^{2d}(U_i \cap U_j, \mathbb{Z}_e) \rightrightarrows \prod_i H_c^{2d}(U_i, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow H^{2d}(X, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow 0$$

et par dualité la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_c^{2d}(X, \mathbb{Z}_e)^\vee \longrightarrow \prod_i H_c^{2d}(U_i, \mathbb{Z}_e)^\vee \rightrightarrows \prod_{i,j} H_c^{2d}(U_i \cap U_j, \mathbb{Z}_e)$$

donc $U \longmapsto \text{Hom}(H_c^{2d}(X, \mathbb{Z}_e), \mathbb{Z}_e)$ est déjà un faisceau et pour $U \subset X$ ouvert

$$H_{2d}^T X(U) = \text{Hom}(H_c^{2d}(U, \mathbb{Z}_e), \mathbb{Z}_e) .$$

PROPOSITION (1.4).- Supposons $\dim X = d$, soient $(C_i)_{i \in I}$ les composantes irréductibles de dimension d de la normalisée de X_{red} et $p_i : C_i \longrightarrow X$ les projections canoniques. Alors le faisceau $H_q^T X$ est canoniquement iso-
morphe à $\bigoplus_{i \in I} p_{i*} \mu_e^{\otimes d}$.

En effet si $U \subset X$ est un ouvert tel que U_{red} soit lisse et équi-dimensionnel de dim d , alors par dualité de Poincaré sur U ,

$$\text{Hom}(H_c^{2d}(U, \mathbb{Z}_e), \mathbb{Z}_e) \simeq \bigoplus_{\pi_0(U)} \mu_e^{\otimes d} .$$

Si $V \subset U \subset X$ sont deux ouverts de X tels que $\dim(U-V) < d$, on a pour des raisons de dimensions

$$H_c^{2d}(U, \mathbb{Z}_e) = H_c^{2d}(V, \mathbb{Z}_e) .$$

D'où clairement la conclusion.

PROPOSITION (1.5).- Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme entre schémas de type fini sur k et $X \in D^b(Y, \mathbb{Z}_e)$ supposée constructible. On a alors un isomor-
phisme canonique

$$D_X f^* D_Y K \xrightarrow{\sim} Rf_! K .$$

Soit en effet $L \in D(X, \mathbb{Z}_e)$, on a $\text{Hom}(L, D_X(f^* D_Y K)) = \text{Hom}(L \otimes^{\mathbb{L}} f^* D_Y K, T_X)$
or par définition de l'image inverse extraordinaire

$$\text{Hom}(L \otimes^{\mathbb{L}} f^* D_Y K, R\pi_X^! \mathbb{Z}_e) = \text{Hom}(R\pi_X^! (L \otimes^{\mathbb{L}} f^* D_Y K), \mathbb{Z}_e)$$

mais

$$R\pi_X^! (L \otimes^{\mathbb{L}} f^* D_Y K) = R\pi_Y^! \circ Rf_! (L \otimes^{\mathbb{L}} f^* D_Y K)$$

et donc par formule de projection

$$R\pi_{X!}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} f^*D_Y K) = R\pi_{Y!}(Rf_! L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D_Y K)$$

par suite

$$\text{Hom}(L, D_X f^* D_Y K) = \text{Hom}(R\pi_{Y!}(Rf_! L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D_Y K), \mathbb{Z}_e)$$

et donc par dualité absolue sur Y

$$\text{Hom}(L, D_X f^* D_Y K) = \text{Hom}(Rf_! L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D_Y K, T_Y)$$

d'où par définition de D_Y et bidualité sur Y

$$\text{Hom}(L, D_X f^* D_Y K) = \text{Hom}(Rf_! L, D_Y(D_Y K)) = \text{Hom}(Rf_! L, K)$$

ce qui démontre la proposition par unicité de l'adjoint.

2. Homologie.

DÉFINITION (2.1).— Soit X un k -schéma de type fini (k algébriquement clos). On appelle homologie localement finie de X à valeurs dans $\mathbb{Z}_e$, le groupe gradué $H_\bullet(X, \mathbb{Z}_e) = H^\bullet(X, T_X)$. On a donc $H_i(X, \mathbb{Z}_e) = H^{i-1}(X, T_X)$.

PROPOSITION (2.2).— (i) les $H_i(X, \mathbb{Z}_e)$ sont des $\mathbb{Z}_e$ -modules de type fini.

(ii) On a un isomorphisme

$$H_\bullet(X, \mathbb{Z}_e) = H_\bullet R \operatorname{Hom}(R\Gamma_c(X, \mathbb{Z}_e), \mathbb{Z}_e)$$

et, par suite, on a les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Tors}(H_C^{i+1}(X, \mathbb{Z}_e)), \mathbb{Q}_e/\mathbb{Z}_e) &\longrightarrow H_i(X, \mathbb{Z}_e) \\ &\longrightarrow \operatorname{Hom}(H_C^i(X, \mathbb{Z}_e), \mathbb{Z}_e) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

pour tout i .

(i) résulte du théorème de finitude de Deligne.

D'autre part $R\Gamma_c(X, \mathbb{Z}_e) = R\pi_! \mathbb{Z}_e$ si $\pi : X \longrightarrow \operatorname{Spec}(k)$ est le morphisme canonique, donc par dualité :

$$R \operatorname{Hom}(R\Gamma_c(X, \mathbb{Z}_e), \mathbb{Z}_e) = R \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_e, T_X)$$

d'où (ii) car

$$\begin{aligned} R \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_e, T_X) &= R\Gamma(X, R \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_e, T_X)) \\ &= R\Gamma(X, T_X). \end{aligned}$$

(2.3) On déduit de (ii), par bidualité le résultat suivant

$$R\Gamma_c(X, \mathbb{Z}_e) = R \operatorname{Hom}(R\Gamma(X, T_X), \mathbb{Z}_e)$$

donc les suites exactes pour tout i :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Tors}(H_i(X, \mathbb{Z}_e)), \mathbb{Q}_e/\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_C^{i+1}(X, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H_{i+1}(X, \mathbb{Z}_e), \mathbb{Z}_e) \longrightarrow 0.$$

Par suite on a deux accouplements

$$(1) \quad H_i(X, \mathbb{Z}_e) \otimes H_C^i(X, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow \mathbb{Z}_e$$

$$(2) \quad \operatorname{Tors}(H_i(X, \mathbb{Z}_e)) \otimes \operatorname{Tors}(H_C^{i+1}(X, \mathbb{Z}_e)) \longrightarrow \mathbb{Q}_e/\mathbb{Z}_e.$$

Le premier est parfait modulo torsion. Le second est parfait. On les note

respectivement

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \int_{\alpha} \beta$$

et

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \text{Tors}(\alpha, \beta) \quad .$$

On déduit du premier accouplement et du cup-produit :

$$U : R\Gamma(X, \mathbb{Z}_e) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma_C(X, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow R\Gamma_C(X, \mathbb{Z}_e)$$

une structure de module de $H_*(X, \mathbb{Z}_e)$ sur l'anneau (pour le cup-produit)

$H^*(X, \mathbb{Z}_e)$. Pour $\alpha \in H^*(X, \mathbb{Z}_e)$ et $\gamma \in H_*(X, \mathbb{Z}_e)$, on notera $\alpha \cap \gamma$ cette structure de module. On a par définition

$$\int_{\alpha \cap \gamma} \beta = \int_{\gamma} \alpha \cup \beta$$

pour tout $\beta \in H_C^*(X, \mathbb{Z}_e)$.

PROPOSITION (2.4).- Si $\dim X = d$, on a :

(i) $H_i(X, \mathbb{Z}_e) = 0$ pour $i < 0$ et $i > 2d$.

(ii) $H_0(X, \mathbb{Z}_e)$ est le $\mathbb{Z}_e$ -module libre engendré par les composantes connexes propres de X .

(iii) $H_{2d}(X, \mathbb{Z}_e)(-d)$ est le $\mathbb{Z}_e$ -module libre engendré par les composantes irréductibles de dimension d de X .

Comme $\text{Tor}(H_C^0(X, \mathbb{Z}_e)) = 0$, on a $H_i(X, \mathbb{Z}_e) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_C^i(X, \mathbb{Z}_e), \mathbb{Z}_e)$ pour $i < 0$, or $H_C^i(X, \mathbb{Z}_e) = 0$ pour $i < 0$, donc $H_i(X, \mathbb{Z}_e) = 0$ pour $i < 0$. Pour $i > 2d$, on a $H_C^i(X, \mathbb{Z}_e) = 0$, donc $H_i(X, \mathbb{Z}_e) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_C^i(X, \mathbb{Z}_e), \mathbb{Z}_e)$ est aussi nul d'où (i) .

On a la suite exacte

$$\text{Hom}(\text{Tors}(H_C^1(X, \mathbb{Z}_e)), \mathbb{Q}_e/\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_0(X, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_C^0(X, \mathbb{Z}_e)^\vee \longrightarrow 0$$

donc pour montrer (ii), il suffit de voir que $\text{Tors}(H_C^1(X, \mathbb{Z}_e)) = 0$. Or

soit $\bar{X}$ un k -schéma propre contenant X comme ouvert, alors on a la suite exacte

$$H^0(\bar{X} - X, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_C^1(X, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow H^1(\bar{X}, \mathbb{Z}_e)$$

comme H^0 est sans torsion, il suffit de voir que $H^1(\bar{X}, \mathbb{Z}_e)$ est sans torsion, ce qui est bien connu.

Enfin, si $(C_i)_{i \in I}$ sont les composantes irréductibles de dimension d de la normalisée de X_{red} , on a vu que

$$H_{2d}^T X = \bigoplus_{i \in I} p_{i*} \omega_e^{\otimes d}$$

où $p_i : C_i \rightarrow X$ sont les projections canoniques, donc

$$H_{2d}(X, \mathbb{Z}_e)(-d) = \bigoplus_{i \in I} \Gamma(C_i, \mathbb{Z}_e)$$

d'où (iii).

3. Classe fondamentale.

(3.0) Soit X un schéma de type fini de dimension d sur un corps algébriquement clos.

Soit $(C_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles de dimension d de la normalisée de X_{red} . Soit $p_i : C_i \rightarrow X$ la projection canonique et soit n_i la multiplicité générique de C_i dans X .

On a alors

$$H_{2d}(X, \mathbb{Z}_e)(-d) = \bigoplus_{i \in I} \Gamma(C_i, \mathbb{Z}_e)$$

on a donc un élément canonique $[X]_h$ de $H_{2d}(X, \mathbb{Z}_e)(-d)$ en posant

$$[X]_h = \sum_{i \in I} n_i 1_{C_i}.$$

DÉFINITION (3.1). $[X]_h$ est appelé la classe fondamentale de X .

PROPOSITION (3.2).- Si X est lisse, de dimension d , et équidimensionnel, alors $H_*(X, \mathbb{Z}_e)(-d)$ est le $H^*(X, \mathbb{Z}_e)$ -module libre engendré par $[X]_h$.

En effet sous les hypothèses de la proposition $T_X = \mu_e^{\otimes d} [2d]$, donc

$$H_i(X, \mathbb{Z}_e)(-d) = H^{2d-i}(X, \mathbb{Z}_e)$$

et en particulier

$$H_{2d}(X, \mathbb{Z}_e)(-d) = H^0(X, \mathbb{Z}_e)$$

l'élément $[X]_h$ correspondant à 1_X .

Le cup-produit

$$H^j(X, \mathbb{Z}_e) \otimes H_{2d}^j(X, \mathbb{Z}_e)(-d) \longrightarrow H_{2d-j}^j(X, \mathbb{Z}_e)(-d)$$

se réinterprète alors comme le cup-produit

$$H^j(X, \mathbb{Z}_e) \otimes H^0(X, \mathbb{Z}_e) \xrightarrow{\cup} H^j(X, \mathbb{Z}_e)$$

et comme $H^j(X, \mathbb{Z}_e) \xrightarrow{\alpha \mapsto \alpha \cup 1_X} H^j(X, \mathbb{Z}_e)$ est un isomorphisme, il en est

de même de $H^j(X, \mathbb{Z}_e) \xrightarrow{\alpha \mapsto \alpha \cap [X]_h} H_{2d-j}^j(X, \mathbb{Z}_e)(-d)$ d'où la conclusion.

4. Fonctorialité ordinaire - Kunneth - Formule de projection.

(4.0) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre entre schémas de type fini sur k algébriquement clos. On a alors un morphisme de complexes

$$R\Gamma_c(f) : R\Gamma_c(Y, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow R\Gamma_c(X, \mathbb{Z}_e)$$

par dualité, on en déduit un morphisme

$$f^* = H_*(f) : H_*(X, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_*(Y, \mathbb{Z}_e)$$

qui est fonctoriel en f .

Soient X, Y deux k -schémas de type fini, on a un morphisme de complexes de faisceaux

$$T_X \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} T_Y \longrightarrow T_{X \times Y}.$$

PROPOSITION (4.1).- C'est un isomorphisme de complexes et on a les suites exactes

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{r+s=i} H_r(X) \otimes H_s(Y) \longrightarrow H_i(X \times Y) \longrightarrow \bigoplus_{r+s=i-1} \text{Tor}(H_r(X), H_s(Y)) \longrightarrow 0$$

PROPOSITION (4.2).- Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre entre k -schémas de type fini, pour tout $\alpha \in H_*(X)$ et $\beta \in H_C^*(Y)$ on a

$$f_*(\alpha \cap f^*\beta) = f_*(\alpha) \cap \beta.$$

En effet si $\alpha \in H_i(X)$, $\beta \in H_C^j(Y)$ alors pour tout $x \in H_C^{i-j}(Y)$, on a

$$\int_{f_*} (\alpha \cap f^* \beta)^x = \int_{\alpha \cap f^* \beta} = \int_{\alpha} f^* x \cup f^* \beta$$

or f^* commute au cup-produit, donc

$$\int_{f_*} (\alpha \cap f^* \beta)^x = \int_{\alpha} f^* (x \cup \beta) = \int_{f_* \alpha} x \cup \beta = \int (f_* \alpha) \cap \beta^x$$

d'où la conclusion.

5. Fonctorialité extraordinaire.

Considérons les couples (f, d) où f est un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ entre schémas de type fini sur un corps k algébriquement clos et où d est un entier tel que f vérifie la propriété :

$(*)_d$: il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $f|_U$ soit plat, de présentation finie à fibres de dimension $\leq d$ et tel que $f|_{X-U}$ soit à fibres de dimension $< d$.

THÉORÈME (5.1). — On peut associer à tout couple (f, d) ci-dessus un homomorphisme gradué de degré $2d$.

$$f^* = H_{\bullet}^!(f) : H_{\bullet}(Y) \longrightarrow H_{\bullet+2d}(X)(-d)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (EXTRA 1) compatibilité à la composition.
- (EXTRA 2) changement de base propre.
- (EXTRA 3) linéarité par rapport au cup-produit.
- (EXTRA 4) Kunneth : $(f \times g)^* = f^* \boxtimes g^*$.
- (EXTRA 5) Normalisations

(I) Si f est fini localement libre de rang n et si $d = 0$, alors le morphisme composé

$$H_i(Y) \xrightarrow{f^*} H_i(X) \xrightarrow{c_*} H_i(Y)$$

est la multiplication par n .

(II) Si $Y = \text{Spec}(k)$ et si $\dim X = d$, alors

$$f^*(1_Y) = [X]_h \in H_{2d}(X)(-d).$$

En effet on dispose d'un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f : \mathrm{Rf}_! \mathbb{Z}_e(d)[2d] \longrightarrow \mathbb{Z}_e$$

d'où un morphisme

$$\mathrm{Tr}_f \otimes \mathrm{id} : \mathrm{Rf}_! \mathbb{Z}_e(d)[2d] \xrightarrow{\alpha} T_Y \longrightarrow T_Y$$

qui par la formule de projection se récrit

$$\mathrm{Tr}_f \otimes \mathrm{id} : \mathrm{Rf}_! f^* T_Y(d)[2d] \longrightarrow T_Y$$

et donc par adjonction, fournit un morphisme

$$f^* T_Y(d)[2d] \longrightarrow \mathrm{Rf}_! T_Y = T_X$$

d'où en passant à la cohomologie, des morphismes :

$$f^* : H_i(Y, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_{i+2d}(X, \mathbb{Z}_e)(-d) \quad .$$

Les propriétés (EXTRA) résultant alors des propriétés (VAR) de Tr_f .

En particulier soit $\mathbb{P} \xrightarrow{\pi} X$ un fibré projectif de rang d , on a un morphisme

$$\pi^* : H_*(X, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_{*+2d}(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_e)(-d)$$

d'où un morphisme

$$H_*(X, \mathbb{Z}_e) \otimes_{H^*(X, \mathbb{Z}_e)} H^*(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_{*+2d}(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_e)(-d)$$

donné par $\alpha \otimes \beta \longmapsto \pi^* \alpha \cap \beta$.

PROPOSITION (5.2).- Le morphisme ci-dessus est un isomorphisme.

Provient par dualité de l'énoncé correspondant en cohomologie.

6. Classe d'homologie associée à un cycle.

Soit X un schéma de type fini sur k algébriquement clos. On pose

$$\tilde{H}_i(X) = H_{2i}(X, \mathbb{Z}_e)(-i)$$

et
$$\tilde{H}_*(X) = \bigoplus_i \tilde{H}_i(X) .$$

On note $Z(X)$ le groupe additif des cycles de X .

THÉOREME (6.1). - Il existe un homomorphisme additif, fonctoriel pour les morphismes propres

$$cl_X : Z_*(X) \longrightarrow \tilde{H}_*(X)$$

uniquement déterminé par la propriété : "pour tout X , l'image du cycle fondamental de X est la classe fondamentale".

De plus cl_X commute à la fonctorialité extraordinaire pour les morphismes plats.

1 - Soit en effet $Z \subset X$ un sous-schéma réduit irréductible, par fonctorialité si $i : Z \hookrightarrow X$ est l'inclusion (qui est propre), on doit avoir

$$(*) \quad cl_X([Z]) = i_*([Z]_h)$$

où $[Z]_h$ est la classe fondamentale de Z dans $\tilde{H}_*(Z)$ et où $i_* : \tilde{H}_*(Z) \rightarrow \tilde{H}_*(X)$.

Ceci montre l'unicité de cl_X .

2 - Définissons donc cl_X par la formule $(*)$ et par additivité. Vérifions la fonctorialité ordinaire : soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre, $Z \subset X$ un sous-schéma intègre, $f(Z)$ l'image de Z muni de sa structure réduite. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i} & X \\ f|_Z \downarrow & & \downarrow f \\ f(Z) & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

d'où un diagramme commutatif pour $d = \dim Z$

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{H}_d(Z) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_d(X) \\
 (f|_Z)_* \downarrow & & \downarrow f_* \\
 \tilde{H}_d(f(Z)) & \xrightarrow{j_*} & \tilde{H}_d(Y)
 \end{array}$$

3 - Si $\dim f(X) < d$, on a $\tilde{H}_d(f(Z)) = 0$ et $f_*([Z]) = 0$ (dans $Z_*(Y)$)
donc on a $cl_Y(f_*([Z])) = 0$ et $f_*cl_X([Z]) = f_* \circ i_*([Z]_h) = j_* \circ (f|_Z)_*([Z]_h) = 0$
donc on a bien dans ce cas $f_*cl_X([Z]) = cl_Y(f_*([Z]))$.

4 - Si $\dim f(Z) = d$ alors on est ramené par fonctorialité à vérifier que
 $(f|_Z)_*([Z]_h) = [f_*([Z])]_h$ i.e. on peut supposer X, Y intègres, $\dim X = \dim Y$, $Y = f(X)$ et $Z = X$. Quitte à se restreindre à un ouvert de Y ,
ce qui ne change par l'homologie de dimension maximale, on peut supposer f
fini et plat et il faut alors vérifier que

$$f_*([X]_h) = \deg f \cdot [Y]_h$$

puisque

$$f_*([X]) = \deg f \cdot [f(X)] = \deg f \cdot [Y].$$

Mais on a (EXTRA 5) (I), donc le composé

$$\tilde{H}_d(Y) \xrightarrow{f^*} \tilde{H}_d(X) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_d(Y)$$

est la multiplication par $\deg f$.

Donc $f_*(f^*([Y]_h)) = \deg f \cdot [Y]_h$. Or on a par (EXTRA 5)(II) et (EXTRA 1)

$$(**) \quad f^*([Y]_h) = [X]_h$$

d'où la conclusion.

5 - Pour la fonctorialité extraordinaire pour les morphismes plats, on se
ramène par linéarité à montrer que si Z est un sous-schéma intègre de Y
et si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme plat, on a

$$cl_X(f^*[Z]) = f^*cl_Y([Z])$$

or on a le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}(Z) & \xhookrightarrow{\quad i \quad} & X \\
 \downarrow f|_{f^{-1}(Z)} = g & & \downarrow f \\
 Z & \xhookrightarrow{\quad j \quad} & Y
 \end{array}$$

Donc par changement de base on a

$$f^*cl_Y([Z]) = f^*i_*[Z]_h = j_*g^*[Z]_h$$

or $g^*[Z]_h = [f^{-1}(Z)]_h$ (c'est la formule (**)) ci-dessus) donc

$$f^*cl_Y([Z]) = cl_X(f^*[Z])$$

ce qu'il fallait démontrer (on n'a pas ici à supposer $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$ si on fait la convention $\tilde{H}_*(\emptyset) = 0$).

Rappel (6.2).— Deux cycles $Z_1, Z_2 \in Z_n(X)$ sont dits algébriquement équivalents s'il existe une courbe lisse connexe C , un cycle $W \in Z_{n+1}(X \times C)$ tel que si $W = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [W_{\alpha}]$ où $W_{\alpha} \xrightarrow{i_{\alpha}} X \times C$ est un sous-schéma intègre alors $\pi_{\alpha} : W_{\alpha} \rightarrow C$ restriction de la seconde projection soit plat, et s'il existe deux points fermés $t_1, t_2 \in C$ tels que

$$p_*(\sum_{\alpha} m_{\alpha} i_{\alpha*} \pi_{\alpha}^*([t_i])) = Z_i$$

pour $i = 1, 2$ où $p : X \times C \rightarrow X$ est la première projection.

THÉOREME (6.3).— Soient $Z_1, Z_2 \in Z_n(X)$ deux cycles algébriquement équivalents.

Alors $cl_X(Z_1) = cl_X(Z_2)$.

Par linéarité on peut supposer que $m_{\alpha} = 0$ pour $\alpha \neq \alpha_0$, $m_{\alpha_0} = 1$ et donc $W = [W_{\alpha_0}]$, i.e. on peut supposer que $W \xrightarrow{i} X \times C$ est un sous-schéma intègre. On note π la restriction de la seconde projection à W , par hypothèse $\pi : W \rightarrow C$ est plate. Quitte à plonger C dans une courbe projective $\bar{C}$ qui contient C comme ouvert dense, à remplacer W par son adhérence $\bar{W}$ dans $X \times \bar{C}$ et à prolonger π en $\bar{\pi} : \bar{W} \rightarrow \bar{C}$ qui restera plat, on peut supposer C propre/ k .

Par fonctorialité ordinaire il suffit de montrer que

$$\text{cl}_W(\pi^*[t_1]) = \text{cl}_W(\pi^*[t_2]) \quad .$$

Comme π est plat, par fonctorialité extraordinaire

$$\text{cl}_W(\pi^*[t_i]) = \pi^*\text{cl}_C([t_i])$$

pour $i = 1, 2$. Donc il suffit de montrer que $\text{cl}_C([t_1]) = \text{cl}_C([t_2])$ i.e. par dualité que pour tout

$$\sigma \in H^0(C, \mathbb{Z}_e)$$

on a $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ (C est propre et $H^1(C, \mathbb{Z}_e)$ est sans torsion donc $\tilde{H}_0(C) = \text{Hom}(H^0(C, \mathbb{Z}_e), \mathbb{Z}_e)$) or ceci résulte de la connexité de C .

COROLLAIRE (6.3.1).— Si X est un schéma de type fini

$$\text{cl}_X : Z_*(X) \longrightarrow \tilde{H}_*(X)$$

se factorise à travers $\Lambda_*(X)$ en une application additive notée encore

$$\text{cl}_X : \Lambda_*(X) \longrightarrow \tilde{H}_*(X)$$

du groupe de Chow de X dans l'homologie localement finie de X .

Remarque (6.4).— Si X est lisse et équidimensionnelle de dimension d sur k algébriquement clos on a en posant :

$$H^*(X) = H^{2*}(X, \mathbb{Z}_e)(.)$$

l'isomorphisme

$$H^{d-i}(X) \xrightarrow{\cap [X]_h} \tilde{H}_i(X)$$

donc il existe pour $z \in \Lambda_i(X) = \Lambda^{d-i}(X)$ un unique élément $\text{cl}^X(z) \in \tilde{H}^{d-i}(X)$ tel que $\text{cl}^X(z) \cap [X]_h = \text{cl}_X(z)$. D'où une application classe

$$\text{cl}^X : \Lambda^*(X) \longrightarrow H^*(X)$$

quand X est lisse et équidimensionnel de $\dim d$ sur k .

7. Intersection.

(7.0) Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps k algébriquement clos. Soit $E(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie des fibrés vectoriels sur X . Pour tout $c \in E(X)$ et tout $i \in \{1, \dots, \text{rg } c\}$, on se donne une indéterminée $C_{c,i}$. On appelle anneau des opérateurs de Chern universel l'anneau quotient

$$\mathbb{Z}[\{C_{c,i} \mid c \in E(X), 1 \leq i \leq \text{rg } c\}] / R$$

où R est l'idéal engendré par les relations classiques que vérifient les classes de Chern. On note cet anneau $\text{Och}^*(X)$, il est gradué si l'on pose degré $(C_{c,i}) = i$.

Soit $H^*(X) = \bigoplus_i H^{2i}(X, \mathbb{Z}_e(i))$ la théorie des classes de Chern l -adique fournit un homomorphisme d'anneaux gradués

$$\varphi_X : \text{Och}^*(X) \longrightarrow H^*(X)$$

donné par $\varphi(C_{c,i}) = C_i(E)$ où E est un fibré vectoriel de la classe d'isomorphie c et $C_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z}_e(i))$ est sa i -ème classe de Chern (SGA 5).

L'anneau $\text{Och}^*(X)$ opère comme on l'a déjà vu sur $A_*(X)$. D'autre part le cup-produit

$$\cap : H^{2i}(X, \mathbb{Z}_e(i)) \otimes H_{2j}(X, \mathbb{Z}_e(-j)) \longrightarrow H_{2(j-i)}(X, \mathbb{Z}_e(-(j-i)))$$

définit une opération de $\tilde{H}^*(X)$ sur $\tilde{H}_*(X)$.

THÉOREME (7.1).— L'application $cl_X : A_*(X) \longrightarrow \tilde{H}_*(X)$ est une application $\mathbb{P}$ -semi-linéaire du $\text{Och}^*(X)$ -module $A_*(X)$ dans le $\tilde{H}^*(X)$ -module $\tilde{H}_*(X)$.

1 - Par linéarité, on est ramené à vérifier que pour tout fibré E sur X , tout entier i , $1 \leq i \leq \text{rg } E$ et tout sous-schéma fermé intègre Y de X , on a

$$(*) \quad cl_X(C_{c,i} \cdot y) = C_i(E) \cap cl_X(y)$$

(avec les notations évidentes).

2 - Soit $i : Y \longrightarrow X$ l'inclusion, par les formules de projections pour i , on se ramène au cas $Y = X$ et $y = x$. Soit alors $p : X \longrightarrow X$ la normalisation de X , alors de même, les formules de projections pour p permettent de supposer $X = X$, i.e. X normal.

3 - Soit $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$, le fibré projectif de E . Alors π^*E possède un quotient L de rang 1. Définissons N par la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

on a alors les formules

$$C_i(\pi^*E) = C_i(N) + C_1(L) \cdot C_{i-1}(N)$$

$$C_{\pi^*E, i} = C_{N, i} + C_{C, 1} \cdot C_{N, i-1}$$

(avec les notations évidentes). Or les morphismes $\pi^* : \tilde{H}_*(X) \longrightarrow \tilde{H}_*(\mathbb{P}(E))$

et $\pi^* : A_*(X) \longrightarrow A_*(\mathbb{P}(E))$ sont injectifs, donc par récurrence sur le rang,

on peut se ramener au cas $\text{rg } E = 1$. En écrivant $E = E' \otimes (E'')^\vee$ où E' ,

E'' sont des fibrés sur X de rang 1 ayant des sections, on peut supposer

que E a des sections.

4 - Soient U le lieu lisse de X et $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion, comme $\dim(X - U) \leq d - 2$, si $d = \dim X$, (X est normal), on n'a que les functorialités extraordinaires

$$j^* : A_{d-1}(X) \longrightarrow A_{d-1}(U)$$

et

$$j^* : \tilde{H}_{2d-2}(X) \longrightarrow \tilde{H}_{2d-2}(U)$$

sont injectives. Par suite, on est ramené au cas $X = U$, i.e. au cas X lisse.

5 - On peut donc supposer X lisse, E fibré de rang 1 sur X ayant une section σ , et on a à montrer

$$cl_X(C_{e, 1} \cdot x) = C_1(E) \cap cl_X(x) \quad .$$

Soit W le sous-schéma de X des zéros de σ , on a $C_{e, 1} \cdot x = w$, si w est la classe de $[W]$ dans $A_*(X)$. On doit montrer que $cl_X^X(w) = C_1(E)$ dans $H^2(X, \mathbb{Z}_e(1))$, ce qui résulte de SGA 5.

THÉOREME (7.2).— Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-projectif d'un schéma X de type fini sur k dans un schéma quasi-projectif lisse sur k . Alors pour tout $v \in \Lambda^* X$ et tout $w \in \Lambda^* Y$ on a

$$cl_X(w \cdot_f v) = f^* cl^Y(w) \cap cl_X(v)$$

dans $\tilde{H}_*(X)$ i.e. l'application

$$cl_X : \Lambda^* X \longrightarrow \tilde{H}_*(X)$$

du $\Lambda^* Y$ -module $\Lambda^* X$ dans le $\tilde{H}^*(X)$ -module $\tilde{H}_*(X)$ est $f^* cl$ - semi-linéaire

où $f^* cl^Y : \Lambda^* Y \xrightarrow{cl^Y} \tilde{H}^*(Y) \xrightarrow{f^*} \tilde{H}^*(X)$ est le morphisme d'anneaux composé de la classe cohomologique et de la functorialité pour f .

COROLLAIRE (7.2.1).— Si X est un schéma quasi-projectif lisse sur k algébriquement clos, l'application

$$cl^X : \Lambda^* X \longrightarrow \tilde{H}^*(X)$$

est un homomorphisme d'anneaux.

(7.2.2) Preuve du théorème.

1 - Par linéarité et par le "moving lemma", on peut supposer que v (resp w) est la classe du cycle associé à un sous-schéma intègre V de dimension p de X (resp W de codimension q de Y) et que V et W sont en bonne position (i.e. que toutes les composantes irréductibles de $V \cap f^{-1}(W)$ sont de dimension $p - q$).

2 - En utilisant la formule de projection pour l'inclusion $V \hookrightarrow X$, on est ramené au cas où $V = X$ et $v = x$ est la classe fondamentale de X dans $\Lambda^* X$.

3 - On peut alors supposer que f est une immersion. En effet comme f est quasi-projectif, il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_Y^n = P \\ & \searrow f & \swarrow \pi \\ & Y & \end{array}$$

où i est une immersion et π est la projection canonique. Comme i est une immersion fermée, on a par hypothèse

$$cl_X(\pi^*w \cdot_i x) = i^*cl^P(\pi^*w) \cap cl_X(x) \quad .$$

Or $cl^P \cdot \pi^* = \pi^* \cdot cl^Y$ (en effet comme π est plat, $cl_P \cdot \pi^* = \pi^* \cdot cl_Y$ donc il suffit de voir que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda^* Y & \xrightarrow{cl^Y} & \tilde{H}^*(Y) \\
 \downarrow \parallel & \searrow \pi^* & \downarrow \cap[Y]_h \\
 \Lambda^* P & \xrightarrow{cl^P} & \tilde{H}^*(P) \\
 \downarrow \parallel & \searrow \pi^* & \downarrow \cap[P]_h \\
 \Lambda^* Y & \xrightarrow{cl_Y} & \tilde{H}_*(Y) \\
 \downarrow \parallel & \searrow \pi^* & \downarrow \cap[P]_h \\
 \Lambda^* P & \xrightarrow{cl_P} & \tilde{H}_*(P)
 \end{array}$$

Ce qui résulte de la forme $\pi^*[Y]_h = [P]_h$.

Par suite :

$$cl_X(w \cdot_f x) = cl_X(\pi^*w \cdot_i x) = f^*cl^Y(w) \cap cl_X(x) \quad .$$

4- On s'est donc ramené à la situation suivante : $f : X \hookrightarrow Y$ est une immersion d'un schéma intègre X dans un schéma lisse quasi-projectif sur k , $W \hookrightarrow Y$ est un sous-schéma intègre fermé en bonne position par rapport à X . On note n la dimension de X , q la codimension de W dans Y , de sorte que $W \cap X$ est de dimension pure $n-q$. On veut montrer dans cette situation la formule

$$cl_X(w \cdot_f x) = f^*cl^Y(w) \cap cl_X(x) \quad .$$

5 - Pour cela on va être amené à se localiser le long de W . Plus précisément

VIII-22

soit $i : W \hookrightarrow Y$ l'inclusion et soit T_Y le complexe dualisant de Y ,
 $T_Y = \mathbb{Z}_e[2d](d)$ où $d = \dim Y$ puisque Y est lisse. Le complexe dualisant
 T_W de W n'est autre que $Ri^! T_Y$ par suite

$$H_i(W, \mathbb{Z}_e) = H^{-i}(W, T_W) = H_W^{-i}(Y, T_Y)$$

donc

$$H_i(W, \mathbb{Z}_e) \cong H_W^{2(d-i)}(Y, \mathbb{Z}_e)(d)$$

et donc

$$\tilde{H}_i(W) \cong \tilde{H}_W^{(d-i)}(Y)$$

où

$$\tilde{H}_W^j(Y) \cong H_W^{2j}(Y, \mathbb{Z}_e)(j) \quad .$$

On a par suite un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_i(W) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_i(Y) \\ \parallel \wr & & \parallel \wr \\ \tilde{H}_W^{(d-i)}(Y) & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{H}^{d-i}(Y) \end{array}$$

où α est l'application canonique, donc comme $cl_Y(w) = i_* cl_W(w)$ il existe
un élément canonique $cl_W^Y(w) \in \tilde{H}_W^q(Y)$ tel que $\alpha(cl_W^Y(w)) = cl^Y(w)$, c'est
l'image de $cl_W(w)$ par l'isomorphisme $\tilde{H}_{d-q}^q(W) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_W^q(Y)$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_W^q(Y) & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{H}^q(Y) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \tilde{H}_{X \cap W}^q(X) & \xrightarrow{\beta} & \tilde{H}^q(X) \end{array}$$

où α et β sont les flèches canoniques, donc on a un élément

$$f^*(cl_W^Y(w)) \in \tilde{H}_{W \cap X}^q(X)$$

tel que $\beta(f^*(cl_W^Y(w))) = f^* cl^Y(w)$.

On peut définir un cup-produit

$$\tilde{H}_{W \cap X}^i(X) \otimes \tilde{H}_j(X) \xrightarrow{\cup} \tilde{H}_{j-i}^i(X \cap W)$$

et on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{H}_{W \cap X}^q(X) \otimes \tilde{H}_n(X) & \xrightarrow{\quad \cap \quad} & \tilde{H}_{n-q}^q(X \cap W) \\
 \downarrow \beta \otimes \text{id} & & \downarrow i_* \\
 \tilde{H}^q(X) \otimes \tilde{H}_n(X) & \xrightarrow{\quad \cap \quad} & \tilde{H}_{n-q}^q(X)
 \end{array}$$

Par suite, on est ramené à montrer la formule suivante :

$$(*) \quad \text{cl}_{X \cap W}(w \cdot_f x) = f^* \text{cl}_W^Y(w) \cap \text{cl}_X(x) \quad .$$

Lemme de localisation (7.2.3).— Soit $U \subset Y$ un ouvert, on notera $X_U = X \cap U$, $W_U = W \cap U$, $f_U : X_U \hookrightarrow U$ la restriction de f , w_U la classe de W_U dans $\Delta^* U$, x_U la classe de X_U dans $\Delta^* X_U$ et $(*)_U$ la formule

$$\text{cl}_{X_U \cap W_U}(w_U \cdot_{f_U} x_U) = f_U^* \text{cl}_{W_U}^U(w_U) \cap \text{cl}_{X_U}(x_U) \quad .$$

Alors la formule $(*)$ est vérifiée si et seulement si la formule $(*)_U$ est vraie pour U parcourant un recouvrement ouvert de Y .

En effet, soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de Y et pour tout $U \in \mathcal{U}$, $j_U : U \hookrightarrow Y$ l'inclusion. De la suite spectrale de Mayer-Vietoris, on déduit que l'application

$$\tilde{H}_{n-q}^q(X \cap W) \xrightarrow{\prod_{U \in \mathcal{U}} j_U^*} \bigoplus_{U \in \mathcal{U}} \tilde{H}_{n-q}^q(U \cap X \cap W)$$

est injective. Par suite la formule $(*)$ est vérifiée si et seulement si les formules $j_U^*((*)) = (*)_U$ sont vérifiées pour tout $U \in \mathcal{U}$.

6 - Pour montrer la formule $(*)$, on peut supposer que $f : X \hookrightarrow Y$ est une immersion fermée (en effet X est localement fermé, donc l'assertion résulte du lemme de localisation).

7 - Pour démontrer la formule $(*)$, on peut supposer W lisse, localement intersection complète de diviseurs lisses. Pour cela on se ramène à la diagonale. Posons $X' = X \times W$, $Y' = Y \times Y$, $f' = f \times i : X' \hookrightarrow Y'$ où $i : W \hookrightarrow Y$ est l'inclusion, $W' = \Delta_Y$ (où Δ_Y est la diagonale de $Y \times Y$) et soient w'

la classe de W' dans A^*Y' et x' la classe de X' dans $A.X'$. Comme Δ_Y est lisse, localement intersection de diviseurs lisses dans $Y \times Y$ (Y est lisse), on doit montrer que la formule

$$(*)' \quad cl_{X' \cap W'}(w' \cdot_f x') = f'^* cl_{W'}^{Y'}(w') \cap cl_{X'}(x')$$

entraîne la formule $(*)$. On a le lemme suivant

LEMME (7.2.4).- Soient Y un k -schéma lisse quasi-projectif sur k ,

$Z_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} Y$ un sous-schéma fermé intègre ($\alpha = 1, 2$). Alors :

$$\begin{aligned} i_1^* cl_{Z_2}^Y(z_2) \cap cl_{Z_1}(z_1) &= [cl_{Z_1}^Y(z_1) \cup cl_{Z_2}^Y(z_2)] \cap cl_Y(y) \\ &= i_2^* cl_{Z_1}^Y(z_1) \cap cl_{Z_2}(z_2) \end{aligned}$$

où z_α est la classe de Z_α dans $A.Z_\alpha$ et y la classe de Y dans $A.Y$.

Appliquons ce lemme à la situation

$$X' = X \times W \xrightarrow{f'} Y' = Y \times Y \xleftarrow{\delta} \Delta_Y = W'$$

où δ est l'immersion diagonale.

On obtient la relation

$$f'^* cl_{W'}^{Y'}(w') \cap cl_{X'}(x') = \delta^* cl_{X'}^{Y'}(x') \cap cl_{W'}(w')$$

d'où d'après $(*)'$

$$\delta^* cl_{X'}^{Y'}(x') \cap cl_{W'}(w') = cl_{X' \cap W'}(x' \cdot_f w')$$

ceci dans $\tilde{H}_*(\Delta_Y) = \tilde{H}_*(W')$. Or la première projection induit un isomorphisme

$\pi : \Delta_Y \xrightarrow{\sim} Y$. Appliquons π_* à la relation ci-dessus, on obtient

$$\pi_* \delta^* cl_{X \times W}^{Y \times Y}(x \otimes w) \cap cl_Y(y) = cl_{X \cap W}(x \cdot_f w)$$

car π_* commute à la classe homologique et que $\pi_*(x' \cdot_f w') = x \cdot_f w$. Or on a

$$\pi_* \delta^* cl_{X \times W}^{Y \times Y}(x \otimes w) = cl_X^Y(x) \cup cl_W^Y(w)$$

donc on obtient

$$\begin{aligned} cl_{X \cap W}(x \cdot_f w) &= [cl_X^Y(x) \cup cl_W^Y(w)] \cap cl_Y(y) \\ &= f^* cl_W^Y(w) \cap [cl_X^Y(x) \cap cl_Y(y)] \\ &= f^* cl_W^Y(w) \cap cl_X(x) \end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la formule (*) .

8 - En appliquant de nouveau le lemme de localisation on peut supposer W lisse et globalement intersection complète de diviseurs lisses, i.e. qu'il existe une filtration

$$W = W_q \subset W_{q-1} \subset \dots \subset W_0 = Y$$

où W_{i+1} est un diviseur lisse dans W_i .

On note alors

$$\begin{array}{ccc} X \cap W_i & \xrightarrow{g_i} & X \\ f_i \downarrow & & \downarrow f \\ W_i & \xrightarrow{h_i} & Y \end{array}$$

les inclusions.

Supposons que, pour tout i , on ait la formule

$$(*)_i \quad \text{cl}(X \cap W_i) \cap W_{i+1}^{(w_{i+1} \cdot f_i(w_i \cdot f^x))} = f_i^* \text{cl}_{W_{i+1}}^{W_i}(w_{i+1}) \cap \text{cl}_{X \cap W_i}(w_i \cdot f^x)$$

c'est-à-dire la formule (*) pour l'inclusion $f_i : X \cap W_i \longrightarrow W_i$ et le sous-schéma intègre W_{i+1} de W_i , alors

$$\text{cl}_{X \cap W_{i+1}}(w_{i+1} \cdot f^x) = f_i^* \text{cl}_{W_{i+1}}^{W_i}(w_{i+1}) \cap \text{cl}_{X \cap W_i}(w_i \cdot f^x)$$

et donc

$$\text{cl}_{X \cap W}(w \cdot f^x) = f_{q-1}^* \text{cl}_{W_q}^{W_{q-1}}(w_q) \cap \left[f_{q-2}^* \text{cl}_{W_{q-1}}^{W_{q-2}}(w_{q-1}) \cap \left[\dots \right. \right.$$

$$\left. \dots \cap \left[f_0^* \text{cl}_{W_1}^Y(w_1) \cap \text{cl}_X(x) \right] \dots \right]$$

ce qui n'est autre après avoir regroupé les termes que la formule a démontrés.

9 - Donc il suffit de démontrer $(*)_i$ pour tout i , c'est-à-dire démontrer la formule (*) dans la situation suivante : $f : X \hookrightarrow Y$ est une immersion et $W = D$ est un diviseur lisse de Y . Soit alors $E = \mathcal{O}_Y(D)$, alors si c est la classe d'isomorphie de E , on a $w = d = c_{c,1}$ et $d \cdot f^x = c_{f^*c,1}^x$.

Par suite $\text{cl}_D^Y(d) = c_{1,D}(E) \in \hat{H}_D^1(Y)$

VIII-26

est la classe de Chern à support de E , donc

$$f^*cl_D^Y(d) = C_{1,D \cap X}(f^*E) \in \tilde{H}_{D \cap X}^1(X)$$

est la classe de Chern de f^*E à support. On est ramené à montrer la formule

$$cl_{X \cap D}(C_{f^*C,1} \cdot x) = C_{1,D \cap X}(f^*E) \cap cl_X(x)$$

ce qui est une variante à support du théorème précédent. Ceci achève la démonstration de notre théorème.