René Thom

Introduction à la dynamique qualitative

Astérisque, tome 31 (1976), p. 3-13
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__31__3_0>

Introduction à la Dynamique Qualitative

par R. Thom

On se souvient de la célèbre définition du déterminisme dûe à Laplace: si on pouvait, à un instant donné, connaître vitesse et position de toutes les particules composant l'univers, ainsi que les forces qui s'exercent entre elles, on pourrait, en intégrant le système différentiel ainsi obtenu, prévoir l'évolution de tout l'Univers. Outre que la mécanique quantique met fortement en doute une conception aussi atomistique de la matière, une vision aussi globale est plus du ressort de la métaphysique,(voire de la théologie), que des applications pratiques de la Mécanique. Dans toute situation concrète, on a affaire, non à tout l'univers (heureusement!), mais à des objets, à des systèmes relativement limités dans l'espace. De plus, on admet implicitement que deux systèmes spatialement très éloignés exercent entre eux une influence très faible ou nulle; ainsi, au moins en première approximation, on peut considérer chaque système comme isolé, puisant en quelque sorte en lui-même sa propre loi d'évolution. Soit donc (S) un tel système, qu'on caractérisera par sa localisation spatio -temporelle (i.e., le domaine d'espace-temps qu'il occupe).

Une première question s'impose: que pouvons-nous savoir du système (S) ? Il se peut que l'examen macroscopique de (S) ne révèle rien de sa structure interne: c'est le cas si (S) est une "boîte noire". Le système ne nous livrera des informations sur son état que si nous l'interrogeons, par exemple, en le couplant avec un appareil de mesure, ou encore en l'excitant par un apport externe d'énergie qu'il nous restituera qualitativement modifié. Il se peut que le système ne puisse nous fournir que des réponses discrètes; mais, dans la plupart des cas, la réponse à l'interrogation est un (ou plusieurs) nombre(s) réel(s). Par exemple: on mesure la température d'un corps en le couplant avec un thermomètre. On admet dès lors:

1°) La répétition immédiate d'une mesure redonne la même valeur comme résultat. (L'opération de mesurement est un "projecteur").

2°) Il existe un nombre fini de mesures $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, tel que le résultat de toute autre mesure soit une certaine fonction $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ des mesures (a_i) . Le point de coordonnées a_i dans R^k définit alors l'état du système.

3°) L'ensemble des états $a \in R^k$ effectivement réalisés par le système est décrit localement par un système d'équations différentiables de la forme $G_j(a_i)=0$, où les différentielles dG_j sont linéairement indépendantes. Il en résulte que la totalité des états de (S) forme une variété <u>lisse</u> M , de dimension finie m , communément appelée <u>espace de phase</u> du système.

4°) L'évolution temporelle h_t de l'état a dans M s'obtient par intégration d'un champ de vecteurs X (ou flot) dans M , qu'on suppose en général indépendant du temps.

Il importe de voir que ces axiomes sont extrêmement restrictifs; la Mécanique Quantique nous a habitués à l'idée qu'interroger un système perturbe ce système. Très vraisemblablement un grand nombre de systèmes macroscopiques ne se comportent pas différemment; c'est le cas en théorie des automates, où l'état d'un automate dépend en général de toute son histoire passée. On pourrait très bien envisager des systèmes où l'interrogation non seulement perturberait l'évolution temporelle normale définie par le champ (X) , mais même pourrait avoir un effet sur le plongement de M , ou sur la topologie de M . C'est seulement pour des grandeurs physiques de nature statistique, comme la température, qu'on peut espérer que le mesurement peut se faire par une perturbation arbitrairement petite. Par un paradoxe peu connu on oppose systèmes classiques et systèmes statistiques, en oubliant que le formalisme fin des systèmes mécaniques classiques nécessite précisément une définition statistique des coordonnées de l'espace de phase....

En conclusion, on retiendra qu'on peut définir la Dynamique comme l'étude des actions (différentiables) du temps dans un système; en fait, la Dynamique n'est rien d'autre qu'une théorie générale du vieillissement. Qui pourrait nier qu'il ne s'agisse là d'un problème essentiel?

INTRODUCTION

Le cas des systèmes à un nombre fini d'états.

Avant le cas général, il est utile de considérer le cas où le système ne nous livre sur son état que des informations discrètes, l'espace des états se réduit à un ensemble fini d'éléments c_1 , $c_2,\dots,c_s$. On symbolisera alors les évolutions possibles du système par le graphe orienté Γ ainsi défini: à chaque état c_i du système est associé un sommet γ_i de Γ , et si le système peut passer directement de l'état c_i à l'état c_j , les sommets $\gamma_i \gamma_j$ sont liés par l'arête orientée $\overrightarrow{\gamma_i \gamma_j}$.

Cherchons à construire une fonction réelle F sur le graphe qui soit, comme une entropie, croissante avec le temps: $F(\gamma_i) \leq F(\gamma_j)$ si on a une arête $\overrightarrow{\gamma_i \gamma_j}$; définissons entre sommets γ_i une relation d'équivalence, notée $\sim$ comme suit: un sommet a est équivalent à un sommet b s'il existe dans Γ un chemin orienté allant de a vers b , et,réciproquement, un chemin issu de b aboutissant en a .

Une fonction F du type cherché devra donc prendre la même valeur sur tous les sommets d'une même classe mod $\sim$; désignons par s_j une telle classe, et construisons un graphe orienté Γ' par la règle: l'arête $\overrightarrow{s_i s_j}$ existe s'il existe deux sommets de $\gamma_i \in s_i$, $\gamma_j \in s_j$ tels qu'il existe une arête $\overrightarrow{\gamma_i \gamma_j}$ dans Γ .

Alors le graphe Γ' est nécessairement un graphe sans aucun cycle, et on pourra construire une fonction F du type cherché pour Γ' . Sa contre-image dans l'homomorphisme $h : \Gamma \to \Gamma'$ défini par la relation $\sim$ donne une fonction F cherchée.

Cette construction a été utilisée dans l'étude de l'évolution des systèmes chimiques (P. Delattre) ; elle permet de dissocier l'aspect réversible (localisé dans les classes s_i) et l'aspect irréversible de la dynamique, présenté par la dynamique quotient Γ' . On pourrait préciser l'évolution en affectant chaque arête issue d'un sommet d'une probabilité $p_{ij} > 0$: on obtiendrait ainsi la théorie des chaines finies de Markov. En imposant des probabilités p_{ij} qui seraient fonctions de l'histoire antérieure du point aboutissant au sommet, on obtiendrait une théorie qui se rapproche des systèmes différentiels. On retrouvera plus tard cette construction à propos de la "dynamique symbolique".

Problèmes de classification en dynamique qualitative.

Etant donnés deux systèmes dynamiques (M, X) et (M', X') , on dira qu'ils sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : M \to M'$ qui transforme toute trajectoire de X en une trajectoire de X' . Deux systèmes dynamiques topologiquement équivalents présentent la même décomposition en orbites; connaître cette décomposition suffit très souvent pour déterminer l'allure qualitative de l'évolution à partir d'une connaissance approximative de la donnée initiale.

Comme le problème - plus simple - de déterminer si deux variétés M et M' sont homéomorphes est - en principe - indécidable, le problème général de la classification des systèmes dynamiques doit être considéré comme inabordable. Il faut, de toute évidence, simplifier la question. Parmi les questions naturelles, apparait le problème de la décomposition d'un système dynamique. Si (M, X) et (M', X') sont deux systèmes dynamiques, le flot $X + X'$ dans la variété produit $M \times M'$ définit le système produit. (Le système constitué de deux systèmes à très grande distance l'un de l'autre est, en ce sens, décomposé). Etant donné un système dynamique (P, Y) , il est important de savoir si ce système est topologiquement équivalent à un système décomposable, et, si, en pareil cas, la décomposition en facteurs irréductibles est unique à l'équivalence près: problème sur lequel on a, semble-t-il, - fort peu de résultats. Affaiblissons encore la question: on dira qu'un système dynamique est un modèle d'une dynamique (P, Y) , s'il existe une application fibrée F de P sur M , telle que $F(Y) = X$. Comme la dimension de M est strictement inférieure à celle de P , la connaissance d'un modèle, pour une dynamique donnée, est toujours un acquit précieux. Si en particulier, le modèle $(M, 0)$ a une dynamique nulle, on dit que la fibration $P \to M$ constitue un système d'intégrales premières. On peut alors considérer la dynamique initiale (P, Y) comme une famille de dynamiques sur la fibre F de la fibration $P \to M$, paramétrée par la variété - base M . Ainsi se trouve introduite la notion de bifurcation d'un système dynamique, sur laquelle nous reviendrons.

Evidemment pour un système donné, l'existence d'intégrales premières, ou plus généralement, de dynamiques modèles constitue une propriété exceptionnelle. Néanmoins, dans l'espace de phase M, il existe des modèles locaux, plus ou moins susceptibles d'extension. Ainsi, en un point régulier, où X est non nul, il existe une carte locale où X est constant (flow-box). De même, en un point isolé où X s'annule, et où les valeurs propres λ_i de la partie linéaire de X ont une partie réelle non nulle, (point dit hyperbolique), le système est localement équivalent à sa partie linéaire: les trajectoires qui partent ou aboutissent au point singulier O forment les variétés instable (resp. stable) associées à O.

Un autre type de classification est lié aux considérations asymptotiques. Si le point $m \in M$ est tel qu'un voisinage U de m ne revient plus au cours du temps contenir le point m, on dit, selon Birkhoff que m est un point "wandering", participe anglais qu'on traduit d'ordinaire par "errant", mais dont le sens serait mieux rendu par le vocable "émigrant" (émigrer, c'est partir sans esprit de retour..) les points "non wandering" pourraient, dans le même esprit, se traduire en points "revenants" (à distinguer des points "récurrents"). Toutes les propriétés asymptotiques d'une dynamique sont portées par l'ensemble Ω des points revenants, puisque toute trajectoire finit dans un voisinage de cet ensemble. Un cas particulier important est offert par la notion d'attracteur : il s'agit d'un ensemble fermé invariant A, tel que:

a) toute trajectoire issue d'un point assez voisin de A aboutit dans A

b) toute trajectoire issue d'un point arbitrairement voisin de A est dans A

c) presque toute trajectoire est dense dans A.

Dans beaucoup de situations, presque toute trajectoire dans M aboutit à un attracteur, en sorte qu'une bonne connaissance des attracteurs permet de préciser les régimes "asymptotiques" que peut présenter la dynamique.

La stabilité structurelle.

Plutôt que de considérer tous les systèmes dynamiques portés par une variété M , il est naturel de s'intéresser aux propriétés "génériques" d'un tel système, c'est à dire les propriétés vérifiées pour un ouvert dense (ou à défaut un résiduel) des champs dans l'espace fonctionnel X(M) de tous les champs de vecteurs sur M . Les mathématiciens soviétiques Andronov et Pontrjagin introduisirent dans ce but la notion de système structurellement stable (ou systèmes "grossiers"); un système (M, X) est structurellement stable si tout système (M, X') assez voisin dans la C^1-topologie lui est topologiquement équivalent. Par définition, ces systèmes forment un ouvert dans (M) , et, pour dim $M \leq 2$; on a pu montrer (Peixoto) que cet ouvert était dense. Par contre, pour les dimensions supérieures, cet ouvert n'est pas dense en général. Mais il est toujours non vide. On sait en effet (J. Palis) caractériser les champs de gradients structurellement stables: il suffit que les points singuliers soient hyperboliques, et que leurs variétés stable et instables se coupent transversalement. On peut alors caractériser la structure d'un tel champ par un graphe orienté du type Γ , dont les sommets sont les points critiques c_i : le sommet c_{ji} est joint à c_j par une arête $\overrightarrow{c_i c_j}$ si la variété instable de c_i rencontre la variété stable de c_j . Un tel graphe n'a pas de cycle, puisqu'il existe une fonction croissante f sur les trajectoires.

Exemples de systèmes structurellement stables

Au cours de ses travaux célèbres des années 60, S. Smale a proposé diverses généralisations des champs de gradients; la plus simple est constituée des champs dits de Morse-Smale: ce sont des champs qui, outre un nombre fini de points singuliers hyperboliques, ne présentent qu'un nombre fini de trajectoires fermées, également hyperboliques. De plus, les variétés stables et instables associées se coupent transversalement. Ici encore, on a pu montrer que ces champs sont structurellement stables. Une notion importante, également dûe à Smale, est celle de système satisfaisant à l'Axiome A. Considérons sur le tore, défini comme quotient du plan R^2 par le sous-groupe des points à coefficients entiers $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$, l'automorphisme f défini par la matrice unimodulaire $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; les vecteurs propres réels de cette matrice définissent deux directions sur le tore; f dilate les vecteurs parallèles à D_1, (dans un rapport fixe k), et contracte ceux parallèles à D_2, dans le rapport inverse $1/k$. Le bifeuilletage du tore T^2 défini par les parallèles à D_1 et D_2 est invariant globalement par f ; on trouve ici ce qu'on appelle un difféomorphisme d'Anosov , dont les propriétés ont été très étudiées, à la fois du point de vue géométrique de la stabilité structurelle, et du point de vue statistique de l'ergodicité et du mélange. Par généralisation, on appelle structure d'Axiome A sur une variété M une décomposition du fibré tangent en deux sous-fibrés, $T_xM = T_u \oplus T_s$ tel que le difféomorphisme f considéré conserve cette décomposition, soit dilatant sur le facteur T_u , et contractant sur T_s ; on peut alors démontrer que les champs de plans T_u , T_s sont tangents à un bifeuilletage de la variété (pas nécessairement différentiable..). Les difféomorphismes satisfaisant à l'Axiome A ont la propriété caractéristique qu'il existe une telle décomposition du fibré tangent au voisinage de Ω . Deux points de Ω sont dits équivalents s'ils sont dans l'adhérence d'une même orbite. Si M est compacte, l'ensemble Ω se décompose alors en un nombre fini de composantes Ω_i , classes d'équivalence pour la relation précédente. On peut alors construire le graphe orienté Γ associé à cette famille, comme pour les ensembles critiques dans le cas des gradients. Pour ceux des difféomorphismes pour lesquels le graphe associé n'a pas de cycle il existe de bons critères de stabilité structurelle, notamment la transversalité des variétés stables et instables associées aux Ω_i (Théorèmes de Franks-Robbin-Robinson).

On retiendra de l'analyse précédente que devant la complexité de la description géométrique, on s'est efforcé de définir de "bons" systèmes, pour lesquels la récurrence se présente sous forme atténuée (nombre fini d'orbites périodiques pour les Morse-Smale), ou en tout cas contrôlable (Axiome A Systèmes sans cycle dans leur graphe.) La théorie s'efforce alors d'étendre ces bons systèmes en étudiant la frontière de leur domaine. L'article de Newhouse-Peixoto étudie de ce point de vue les flots de Morse-Smale; il montre que deux quelconques d'entre eux peuvent être joints par un arc comportant seulement un nombre fini de systèmes non Morse-Smale, mais qui n'en différent que par un accident local parfaitement défini. Ce même résultat ne vaut pas pour les systèmes à temps discret, les difféomorphismes de Morse-Smale. Il y a donc une différence assez profonde entre systèmes à temps discret, et systèmes à temps continu. Pour les premiers, en effet, un produit de deux systèmes structurellement stables est structurellement stable (du moins, on peut le conjecturer ...); au contraire pour les flots, dés qu'il existe des trajectoires fermées (ou de la récurrence) dans les deux systèmes, le produit n'est plus structurellement stable. Ceci est une conséquence du phénomène de résonance: un champ de pente constante sur le tore T^2 n'est pas structurellement stable, car il peut être approché par un champ de Morse-Smale à pente rationnelle. Il peut y avoir ainsi "implosion" d'un attracteur en lui-même, mais cette implosion est fragile, et aisément réversible. La seconde étude de Newhouse-Palis étudie un phénomène qualitativement assez semblable: l'instabilité structurelle dûe à la présence de cycles dans le graphe des Ω_i . Il s'agit là d'une étude très fine, qui met en évidence le rôle joué par les résonances (les "petits dénominateurs") dans certains difféomorphismes de raccordement le long du cycle. On savait, depuis Poincaré, que la présence de "cycles" dans les figures formées par les variétés stables et instables est une source de pathologie: ainsi le point "homoclinique" décrit par Poincaré, défini comme point fixe d'un difféomorphisme où les variétés stables et instables se rencontrent transversalement: un tel point est limite d'orbites périodiques de période arbitrairement grande. On a également beaucoup étudié depuis,(M. Shub, R. Williams) la pathologie créée par un manque de transversalité entre variétés stables et instables, en particulier dans un cycle (Newhouse).

Un problème central, à cet égard, est d'élucider la structure topologique des Ω_i dans le cas structurellement stable. On a pu montrer (R. Williams) que si un attracteur est en lui-même expansif, alors il est localement le produit d'une variété par un ensemble de Cantor. On obtiendra un exemple simple en considérant le difféomorphisme de R^3 (ou S^3) qui transforme un tore plein V en un tore plein de longueur double plongé dans V. Plus généralement, l'étude géométrique des endomorphismes d'une variété (avec ou sans bord) dans elle-même constitue un sujet encore largement inexploré; c'est en France, semble-t-il que cette étude a commencé, vers les années 1920, avec Fatou et Julia, qui ont étudié l'itération des applications polynomiales. (On doit à Julia, sous le nom de G-ensemble, une définition de l'ensemble des points revenants qui précède celle de Birkhoff). Tout récemment, on s'est aperçu que l'itération d'un trinôme du second degré, sur un intervalle $[0\ a]$ de l'axe réel, pouvait conduire à des phénomènes qualifiés de "chaotiques" par les calculateurs (théorème de Sharkowsky, Lie-Yorke: s'il existe un point de période trois, il existe un point de période arbitrairement grande). L'étude de John Franke est une contribution à ce domaine neuf; sans doute, l'hypothèse d'un endomorphisme contractant est-il de nature à simplifier l'étude; mais même en ce cas, on rencontre des phénomènes géométriques intéressants.

L'approche probabiliste.

Devant la complexité des objets géométriques ainsi rencontrés, il reste une position de repli: l'analyse statistique. Fort heureusement, dés qu'on a affaire à un attracteur de type Axiome A, il existe en général des mesures invariantes définies sur l'attracteur (et même sur son bassin); on peut donc appliquer à cette situation tout l'arsenal de la théorie ergodique: théorie spectrale, théorème ergodique individuel de Birkhoff, problèmes de mélanges. Bien mieux, on peut parfois trouver pour la dynamique un modèle abstrait qui lui correspond par une transformation mesurable qui laisse invariants les ensembles de mesure nulle. C'est là l'origine de ce qu'on a appelé la "dynamique symbolique". En voici le principe: soit f un difféomorphisme de la variété M ; désignons par U_i un recouvrement localement fini de M, et associons à ce recouvrement un graphe Γ

ainsi défini: à tout élément U_i du recouvrement, correspond un sommet c_i , et introduisons une arête $\overrightarrow{c_i c_j}$ dés que $f(U_i)$ rencontre U_j ; la dynamique discrète définie, peut être considérée comme une approximation de la dynamique initiale (M, f) . Désignons par (C) l'ensemble des chemins, infinis dans les deux sens, qu'on peut décrire sur Γ . On peut mettre sur (C) une métrique en décrétant que deux chemins sont distants de $(1/2)^k$ au plus s'ils coïncident sur une longueur de k arêtes de part et d'autre du sommet origine. Alors l'automorphisme de décalage (shift) qui consiste à décaler d'une arête le sommet origine est un homéomorphisme de l'espace métrique (C) . Si le difféomorphisme f satisfait à l'axiome (A) , on peut trouver non un recouvrement, mais une partition de presque toute M par des ensembles ouverts U , telle que la donnée d'un chemin de C caractérise une orbite de (M, f) : ceci résulte des propriétés d'expansion de f et f^{-1} : deux points arbitrairement voisins ont des orbites qui finissent par se séparer dans la variété (notion dûe à R. Bowen). On dispose ainsi d'un modèle purement algébrique d'une situation géométrique pluri-dimensionnelle. Cette technique a permis d'établir les propriétés d'ergodicité, et de mélange de certaines dynamiques naturelles, comme les difféomorphismes d'Anosov, et le flot géodésique sur les variétés à courbure négative. (Travaux de Kolmogorof, Sinai). On a vu ainsi s'introduire les concepts de la thermodynamique comme celui d'entropie, au sein même de la topologie différentielle; les algorithmes de Gibbs ont même pu s'appliquer à l'étude des difféomorphismes d'Anosov (R. Bowen). On a obtenu aussi des théorèmes de classification intéressants (Ornstein).

Conclusion:

On pourrait ainsi en conclure que le géomètre dynamicien, incapable de maîtriser la complexité des systèmes rencontrés, doit définitivement céder la main au probabiliste (évolution observée depuis longtemps en Physique Quantique, où la théorie spectrale a depuis longtemps supplanté l'observation directe des phénomènes ...). Ce serait, je crois, aller trop vite.

Revenons à une autre infirmité de la Dynamique Géométrique: pourquoi les systèmes structurellement stables ne sont-ils pas les seuls à jouer un rôle dans la description du monde physique? D'où vient l'importance de certains systèmes non structurellement stables, comme les systèmes hamiltoniens? La théorie des catastrophes, c'est-à-dire, en fait, la théorie de la bifurcation, offre un début d'explication: quand on a affaire, non à un système dynamique unique, mais à toute une famille de dynamiques soumise à un bruit de caractère systématique, il y a intérêt à étudier le système le plus dégénéré de la famille, dont le déploiment va (au moins qualitativement) engendrer la famille donnée. Les systèmes hamiltoniens apparaissent ainsi comme "centres organisateurs" des perturbations liées à l'interrogation des systèmes, ainsi qu'aux contraintes de communication entre observateurs. C'est dire que l'approche statistique ne permettra pas d'éviter l'emploi d'une théorie de la bifurcation. Sans doute, cette bifurcation, portant sur des grandeurs issues d'une opération de moyenne, va différer de la bifurcation dynamique simple observée au départ. C'est un problème ouvert (déjà bien attaqué dans la théorie physique des changements de phases) de savoir dans quelle mesure cette bifurcation "statistique" va différer de la bifurcation originelle. On peut espérer qu'au moins qualitativement, la différence ne sera pas si marquée, en sorte que là aussi l'approche géométrique restera de quelque utilité.