

# *Astérisque*

GÉRARD RAUZY

**Nombres normaux et processus déterministes**

*Astérisque*, tome 24-25 (1975), p. 263-265

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1975\\_\\_24-25\\_\\_263\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__263_0)>

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOMBRES NORMAUX ET PROCESSUS DÉTERMINISTES

par

Gérard RAUZY

---:---

Le résultat principal de cet exposé, dont on trouvera les démonstrations dans [3] est la caractérisation des translations de  $\mathbb{R}$ , laissant invariant l'ensemble des nombres normaux dans une base donnée.

Plus précisément, soit  $r$  un entier supérieur ou égal à 2,  $R$  l'ensemble  $\{0, 1, \dots, r-1\}$ ,  $B(r)$  l'ensemble des nombres réels  $\alpha$  normaux en base  $r$ , c'est-à-dire, tels que la suite  $(\alpha r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit équirépartie modulo 1 et soit,  $B^\perp(r)$  l'ensemble des nombres réels  $\beta$  tels que :

$$\forall \alpha \in B(r) \quad , \quad \alpha + \beta \in B(r) \quad .$$

Le but est donc de donner une caractérisation de l'ensemble  $B^\perp(r)$ . Pour cela, nous définissons le bruit inférieur et le bruit supérieur d'un nombre réel  $\gamma$  de développement en base  $r$  :  $\gamma = [\gamma] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n / r^{n+1}$  .

Pour  $s \geq 1$ ,  $N \geq 1$ , on pose :

$$\beta_s(\gamma, N) = \inf_{\varphi \in E_s} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \inf (1, |c_n - \varphi(c_{n+1}, \dots, c_{n+s})|)$$

( $E_s$  désignant l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}^s$  dans  $\mathbb{R}$ )

puis,

$$\underline{\beta}_s(\gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta_s(\gamma, N) \quad , \quad \overline{\beta}_s(\gamma) = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \beta_s(\gamma)$$

le bruit inférieur de  $\gamma$  est alors la quantité :

$$\underline{\beta}(\gamma) = \lim_{s \rightarrow \infty} \underline{\beta}_s(\gamma)$$

et, de même, le bruit supérieur est la quantité

$$\overline{\beta}(\gamma) = \lim_{s \rightarrow \infty} \overline{\beta}_s(\gamma) .$$

Les bruits inférieurs et supérieurs ne dépendent évidemment que de la classe de  $\gamma$  modulo 1 ; en outre, on a toujours l'inégalité :

$$0 \leq \underline{\beta}(\gamma) \leq \overline{\beta}(\gamma) \leq \frac{r-1}{r} .$$

Ces quantités expriment en quelque sorte, le degré moyen "d'imprévisibilité" du chiffre de rang  $n$ , étant connus les chiffres de rang  $n+1$ ,  $n+2$ , ... etc... et on a de manière précise le résultat :

(i)  $\gamma$  appartient à  $B(r)$  si et seulement si, il est de bruit maximum  
c'est-à-dire, si  $\underline{\beta}(\gamma) = \frac{r-1}{r}$

(ii)  $\gamma$  appartient à  $B^{\perp}(r)$ , si et seulement si, il est de bruit minimum,  
c'est-à-dire, si  $\overline{\beta}(\gamma) = 0$ .

Une autre caractérisation de  $B^{\perp}(r)$  est d'être l'ensemble des nombres  $r$ -déterministes au sens de B. Weiss [4] et T. Kamae [2] et, les méthodes employées pour aboutir au résultat énoncé sont proches de celles employées par ces

auteurs dans la résolution de problèmes analogues de stabilité de l'ensemble des nombres normaux : elles utilisent essentiellement la notion de disjonction de processus stochastique.

Nous donnons, d'autre part, un exemple de nombre  $r$ -déterministe (les nombres dont la suite des chiffres en base  $r$  est à caractère presque périodique), ce qui permet de retrouver un résultat dû à H. Daboussi et M. Mendès-France [1].

-:-:-

#### RÉFÉRENCES

- [1] H. DABOUSSI et M. MENDES-FRANCE. - Spectrum, almost periodicity and equidistribution modulo 1 (à paraître).
- [2] T. KAMAE. - Subsequences of normal sequences. *Israël J. of Math.* vol. 16, n° 2, 1973.
- [3] G. RAUZY. - Nombres normaux et processus déterministes. A paraître in *Acta Arithmetica*, vol. 29, n° 3.
- [4] B. WEISS. - Normal sequences as collectives. *Proc. Symp. on Topological Dynamics and Ergodic Theory*. Univ. of Kentucky, 1971.

-:-:-

Gérard RAUZY  
Université d'Enseignement  
et de Recherche de  
Marseille-Luminy  
Mathématique-Informatique  
70, route L. Lachamp  
13228 MARSEILLE Cédex 2