

Astérisque

PAULO RIBENBOIM

**Quelques développements récents du 17^e
problème de Hilbert**

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 237-241

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__237_0>

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES DEVELOPPEMENTS RECENTS
DU 17^e PROBLÈME DE HILBERT

par

Paulo RIBENBOIM

Le 17^e problème de Hilbert était le suivant :

Si $f \in \mathbb{Q}(X_1, \dots, X_n)$ est une fonction positive définie sur $\mathbb{Q}$ est-ce que f est somme de carrés d'éléments de $\mathbb{Q}(X_1, \dots, X_n)$?

Au moyen de la théorie des corps ordonnés, Artin a montré que ce problème a une réponse affirmative, même sous la forme plus générale suivante :

Si K est un corps ordonné qui est dense dans sa clôture réelle K^* , si $f \in K(X_1, \dots, X_n)$ est positive définie sur K alors il existe des éléments p_i , $0 < p_i \in K$, $g \in K(X_1, \dots, X_n)$ tels que $f = \sum p_i g_i^2$.

Dans le cas où $K = \mathbb{R}$ on peut démontrer ce résultat à l'aide de la logique, plus précisément, de la théorie des modèles.

Le théorème des zéros de Hilbert a été généralisé par Dubois et Risler pour les variétés réelles : Soit K un corps ordonné maximal, I un idéal de $K[x_1, \dots, x_n]$,

$$V(I) = \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \forall f \in I\}.$$

$$\text{Id}(V(I)) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0 \forall x \in V(I)\}$$

Alors $\text{Id}(V(I))$ est égal au radical réel $\sqrt[\mathbb{R}]{I}$ de l'idéal I , c'est-à-dire, l'idéal formé des polynômes $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ tels qu'il existe un entier $m \geq 1$ et des éléments $u_1, \dots, u_r \in K(x_1, \dots, x_n)$ tels que :

$$f^m (1 + \sum u_i^2) \in I$$

La démonstration du théorème de Dubois-Risler fait usage du théorème d'Artin.

Un idéal I de K est réel lorsque $I = \sqrt[\mathbb{R}]{I}$. C'est équivalent à dire que l'anneau quotient $K[x_1, \dots, x_n]/I$ est produit d'un nombre fini d'anneaux intègres dont les corps des fractions sont des extensions ordonnables de K . En particulier les anneaux de coordonnées des variétés réelles irréductibles V sont du type $K[V] = K[x_1, \dots, x_n]/P$, où P est un idéal premier réel ; le corps des fractions $K(V)$ est une extension ordonnable de K .

Le 17^e problème de Hilbert pour les variétés réelles est le suivant : si $f \in K(V)$ est positive définie sur V , est-ce que f est somme de carrés de $K(V)$?

Danielle Gondard et moi avons répondu à cette question par l'affirmative en utilisant la théorie des modèles (voir [1]).

17^e PROBLÈME DE HILBERT

En outre, il résulte d'un lemme de Pfister que si V a pour dimension d , alors toute somme de carrés dans $K(V)$ est une somme de 2^d carrés.

D'autre part, nous conjecturons qu'il y a une somme de $d+1$ carrés qui n'est pas une somme de d carrés. Cette conjecture est prouvée dans les cas suivants :

1) lorsque $d = 1$,

2) lorsque V est une variété rationnelle, c'est-à-dire $K(V)$ est une extension transcendante pure de K (résultat de Cassels),

3) lorsqu'il existe une base de transcendance $\theta_1, \dots, \theta_r$ de $K(V) | K$ telle que le degré de $K(V)$ sur $K(\theta_1, \dots, \theta_r)$ soit impaire.

Un autre développement du 17^e problème de Hilbert concerne les matrices symétriques.

Soit K un corps ordonné, R une clôture réelle de K , $A = (A_{ij})$ une matrice symétrique $n \times n$ à coefficients dans K . Si la forme quadratique sur R associée à A est positive, on dit que A est positive : $\forall u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n$ on a $\sum_{i,j} A_{ij} u_i u_j > 0$. Cette définition est indépendante du choix de la clôture réelle R de K . Une matrice symétrique A sur un corps quelconque K est dite naturellement positive lorsque A est positive, quel que soit l'ordre donné sur K . (Si K n'est pas ordonné, toute matrice symétrique A est naturellement positive").

Dans un autre article, Danielle Gondard et moi-même ([2]) avons généralisé un théorème de Rita Ciampi :

Si K est un corps de caractéristique différente de 2, une matrice

symétrique à coefficients dans K est naturellement positive si et seulement si elle est somme de carrés de matrices symétriques à coefficients dans K .

Maintenant soit $F = (F_{ij})$ une matrice symétrique dont chaque F_{ij} appartient à $K(X^1, \dots, X^n)$. On dit que F est définie au point $x = (x^1, \dots, x^n) \in K^n$ lorsque chaque F_{ij} s'écrit $F_{ij} = G_{ij}/H_{ij}$ avec $G_{ij}, H_{ij} \in K[X_1, \dots, X_m]$, et $H_{ij}(x) \neq 0$. On dit que F est définie positive sur K^n lorsque la matrice $F(x) = (F_{ij}(x))$ est positive en tout point x où elle est définie.

Au moyen de la théorie des modèles, nous prouvons :

Une matrice symétrique à coefficients dans $K(X^1, \dots, X^n)$ (K corps ordonné maximal) est définie positive si et seulement si elle est somme de carrés de matrices symétriques à coefficients dans $K(X^1, \dots, X^n)$.

On peut alors considérer les questions quantitatives correspondantes. Soit $Pf(n, m)$ la constante de Pfister pour les matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $K(X_1, \dots, X_m)$, c'est le plus petit entier q tel que toute somme de carrés de matrices comme ci-dessus soit la somme de q carrés.

Nous démontrons que :

$$m+1 < Pf(n, m) \leq 2^m$$

La minoration résulte immédiatement d'un lemme de Cassels ; pour la majoration, nous utilisons les résultats correspondants pour les variétés réelles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. GONDARD et P. RIBENBOIM. - Fonctions définies positives sur les variétés réelles. Bull. Sci. Math. , 2e série, 98, 1974, 39-47.
- [2] D. GONDARD et P. RIBENBOIM. - Le 17e problème de Hilbert pour les matrices. Bull. Sci. Math. , 2e série, 98, 1974, 49-56.

(Dans ces articles, on peut trouver des références plus complètes).

Paulo RIBENBOIM
Queen's University-
Department of Mathematics
Kingston
ONTARIO
Canada