

# *Astérisque*

MARIE-JOSÉE FERTON

**Sur l'anneau des entiers de certaines extensions  
cycliques d'un corps local**

*Astérisque*, tome 24-25 (1975), p. 21-28

[<http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1975\\_\\_24-25\\_\\_21\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__21_0)

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ANNEAU DES ENTIERS DE CERTAINES EXTENSIONS CYCLIQUES  
 D'UN CORPS LOCAL

par

Marie-Josée FERTON

-:-:-:-

$A$  étant un anneau de Dedekind et  $k$  son corps des quotients, soit  $K$  une extension galoisienne de  $k$  de groupe de Galois  $G$ . La clôture intégrale,  $B$ , de  $A$  dans  $K$  est un  $A[G]$ -module.

L'étude de la structure de  $B$  conduit à introduire le sous-anneau  $\mathfrak{O}$  de  $k[G]$ , défini comme suit :

$$\mathfrak{O} = \{ \lambda \in k[G], \lambda.B \subset B \}.$$

$\mathfrak{O}$  est, en fait, un ordre de  $A$  dans  $k[G]$  et on l'appelle l'ordre associé à  $B$  dans  $k[G]$ .

On étudiera dans la suite  $B$  en tant que  $\mathfrak{O}$ -module. Le problème que l'on se pose est le suivant : pour quelle extensions  $K/k$ ,  $B$  est-il un  $\mathfrak{O}$ -module libre ou projectif ?

On sait que si  $k = \mathbb{Q}$ , corps des rationnels et si  $G$  abélien ou  $G$  groupe

diédral d'ordre  $2p$ , alors  $B$  est libre sur  $\mathfrak{D}$ . (Résultats respectifs de Leopoldt [5] et A. M. Bergé [1]).

Si le corps  $k$  est local, et si  $G$  est abélien,  $B$  est un  $\mathfrak{D}$ -module libre si et seulement si c'est un  $\mathfrak{D}$ -module projectif. Dans ce cas, on sait (E. Noëther [6]) que si l'extension  $K/k$  est modérément ramifiée  $B$  est libre sur  $\mathfrak{D} = A[G]$ .

Toujours dans le cas d'un corps local  $k$ , et si l'extension  $K/k$  est cyclique de degré premier  $p$ , on a des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur le nombre de ramification de l'extension, pour que  $B$  soit libre sur  $\mathfrak{D}$  [2], [3].

La méthode utilisée pour les extensions cycliques de degré premier  $p$  d'un corps local s'applique difficilement au cas d'extensions cycliques de degré  $p^n$  pour  $n > 1$ . Elle donne néanmoins des résultats partiels résumés dans le théorème 2.

D'autre part, on peut trouver des conditions nécessaires pour que  $B$  soit libre sur  $\mathfrak{D}$ , dans une extension  $K/k$  quelconque, en se ramenant à des extensions intermédiaires.

I. - EXTENSIONS GALOISIENNES INTERMÉDIAIRES. - Soit  $G_L$  un sous-groupe invariant de  $G$  et  $L$  le corps laissé fixe par  $G_L$ . Soit  $H$  le groupe de Galois de l'extension  $L/k$ ,  $H$  est isomorphe au quotient  $G/G_L$ . On note  $\bar{g}$  l'image canonique dans  $H$  d'un élément  $g$  de  $G$ . Soit  $\varphi$  l'homomorphisme d'algèbre de  $k[G]$  dans  $k[H]$  défini par  $\varphi(g) = \bar{g}$  pour  $g \in G$ .

On note  $\varphi(\lambda) = \bar{\lambda}$  pour  $\lambda \in k[G]$ . Si  $\Theta$  est un ordre de  $A$  dans  $k[G]$  on peut vérifier aisément que  $\varphi(\Theta)$  est un ordre de  $A$  dans  $k[H]$ . On note  $T_{K/L}$

la trace de  $K/L$ ,  $T_{K/L} = \sum_{s \in G_L} s$ ;  $T_{K/L}(B)$  est un  $k[H]$ -module, on note  $\mathfrak{D}_H$  son ordre associé dans  $k[H]$ , soit  $\mathfrak{D}_H = \{\mu \in k[H], \mu \cdot T_{K/L}(B) \subset T_{K/L}(B)\}$ .

**PROPOSITION 1.** - L'image par  $\varphi$  de l'ordre associé à  $B$  dans  $k[G]$  est contenue dans l'ordre associé à  $T_{K/L}(B)$  dans  $k[H]$ .

En effet, soit  $\tilde{\lambda} \in \varphi(\mathfrak{D})$ ; montrons que :  $\lambda \cdot T_{K/L}(b) \in T_{K/L}(B)$  pour tout  $b$  dans  $B$ ; on a  $\tilde{\lambda} \cdot T_{K/L}(b) = \lambda \cdot T_{K/L}(b) = T_{K/L}(\lambda \cdot b)$  car  $G_L$  est un sous-groupe invariant de  $G$ .

**Remarque :** il existe des cas où  $\varphi(\mathfrak{D})$  est différent de  $\mathfrak{D}_H$ . Par exemple, si  $k$  est un corps local d'indice de ramification  $e = 7$  et  $K/k$  une extension cyclique de degré 4, avec  $t_1 = 7$  et  $t_2 = 21$  pour nombres inférieurs de ramification, alors  $\varphi(\mathfrak{D}) \neq \mathfrak{D}_H$ .

**PROPOSITION 2.** - Si  $B$  est libre sur son ordre associé  $\mathfrak{D}$  dans  $k[G]$ ,  $T_{K/L}(B)$  est libre sur son ordre associé dans  $k[H]$ , qui coïncide alors avec  $\varphi(\mathfrak{D})$ .

En effet, soit  $B = \mathfrak{D} \cdot \alpha$  pour  $\alpha \in B$ . Montrons que  $T_{K/L}(B) = \varphi(\mathfrak{D}) \cdot T_{K/L}(\alpha)$ .

Soit  $b$  dans  $B$ , alors  $b = \lambda \cdot \alpha$  avec  $\lambda \in \mathfrak{D}$  et  $T_{K/L}(b) = T_{K/L}(\lambda \cdot \alpha) = \lambda \cdot T_{K/L}(\alpha)$ ;  $T_{K/L}(B)$  est libre sur l'ordre  $\varphi(\mathfrak{D})$  qui est donc son ordre associé :  $\varphi(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}_H$ .

La proposition 2 donne donc une condition nécessaire pour que  $B$  soit un  $\mathfrak{D}$ -module libre. Nous allons écrire cette condition nécessaire dans le cas d'une extension cyclique de degré  $p^2$  d'un corps local de caractéristique résiduelle  $p$ .

Si  $K$  est une extension cyclique de degré  $p^2$  de  $k$ , corps local et  $L$  l'extension intermédiaire de degré  $p$  sur  $k$ ,  $T_{K/L}(B)$  est un idéal de l'anneau des entiers de  $L$ . On est donc naturellement amené à étudier la structure des idéaux de  $L$  sur leurs ordres associés.

## II. - ÉTUDE DES IDEAUX D'UNE EXTENSION CYCLIQUE DE DEGRÉ

PREMIER  $p$ ,  $L$ , D'UN CORPS LOCAL  $k$ . -  $H$  désigne le groupe de Galois de  $L/k$ . On note  $I_h = \{x \in L; v_L(x) \geq h\}$  ou  $v_L$  est la valuation normalisée dans  $L$  et  $h$  un entier rationnel et on note  $\mathfrak{O}_h = \{\lambda \in k(H), \lambda \cdot I_h \subset I_h\}$  l'ordre associé à  $I_h$  dans  $k(H)$ .

La question que l'on se pose est la suivante : pour une extension donnée  $L/k$ , quels sont les idéaux  $I_h$  qui sont des  $\mathfrak{O}_h$ -modules libres.

L'étude de ce problème fait l'objet d'une note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences [4]. On peut facilement remarquer qu'il suffit de faire l'étude pour des entiers  $h$  compris entre 0 et  $p-1$ , en effet, pour  $h \equiv h'$  (modulo  $p$ ),  $I_h$  et  $I_{h'}$  sont des  $\mathfrak{O}_h = \mathfrak{O}_{h'}$  modules isomorphes. En se limitant donc à des entiers  $h$ ,  $0 \leq h \leq p-1$ , on peut énoncer le résultat sous la forme :

THÉORÈME 1. -  $\frac{t_1}{p} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ ,  $a_n > 1$ , désignant le développement en fraction continue de  $\frac{t_1}{p}$  où  $t_1$  est le nombre de ramification d'une extension cyclique de degré  $p$  d'un corps local  $k$  d'indice de ramification absolue  $e$ ,

on a :

- a) si  $t_1 \equiv 0$  (modulo  $p$ ),  $I_h$  est un  $\mathfrak{O}_h$ -module libre quel que soit  $h$  ;
- b) si  $t_1 \not\equiv 0$  (modulo  $p$ ),

1°) si  $0 \leq h \leq a$  et si  $t_1 < \frac{pe}{p-1} - 1$ ,  $I_h$  est un  $\mathfrak{D}_h$ -module libre si et  
seulement si

$$t_1 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\text{ou } t_1 \not\equiv 1 \pmod{p} \text{ avec pour } n \text{ pair } h = a \text{ ou } h = a - a_n ; \text{ pour } n \text{ impair } a - \left(\frac{1}{2}\right)a_n \leq h \leq a .$$

2°) si  $a < h \leq p-1$  et  $t_1 < \frac{pe}{p-1} - 2$ ,  $I_h$  n'est libre sur  $\mathfrak{D}_h$  que si  
 $t_1 \equiv 1 \pmod{p}$  et  $h > \frac{p+1}{2}$ .

Remarque : si  $h = 0$ , le théorème précédent permet de retrouver le résultat de [2] à savoir si  $t < \frac{pe}{p-1} - 1$ ,  $I_0$  est libre sur  $\mathfrak{D}_0$  si et seulement si  $a = 0$  ou  $a$  divise  $p-1$ .

COROLLAIRE. -  $L/k$  étant une extension cyclique de degré premier  $p$  d'un corps  
local, si  $t_1$  est le nombre de ramification de  $L/k$  alors tout idéal  $I_h$  où  $h$  est  
un entier rationnel congru à  $t_1$  modulo  $p$ , est libre sur son ordre associé dans  
l'algèbre  $k[H]$  du groupe  $H = \text{Gal}(L/k)$  sur le corps  $k$ .

III. - EXTENSIONS CYCLIQUES DE DEGRÉ  $p^2$ . - Appliquons le résultat précédent à une extension  $K/k$  cyclique de degré  $p^2$  d'un corps local  $k$  d'indice  $e$ .  $L$  désigne l'extension de degré  $p$  intermédiaire. On note  $t_1$  et  $t_2$  les deux nombres inférieurs de ramification de  $K/k$ . On a  $t_1 \leq \frac{pe}{p-1}$  et  $t_2 \leq \frac{p^2e}{p-1}$  et on note  $a$ , le plus petit entier positif congru à  $t_1$  et  $t_2$  modulo  $p$ , soit :

$$t_1 \equiv a \pmod{p}$$

$$t_2 \equiv a + cp \pmod{p^2}$$

avec  $0 \leq a \leq p-1$  et  $0 \leq c \leq p-1$ .

On calcule alors  $T_{K/L}^{(B)}$  et on obtient  $T_{K/L}^{(B)} = I \left[ \frac{(t_2+1)(p-1)}{p} \right]$  où  $[x]$  est la partie entière de  $x$ . Comme  $\left[ \frac{(t_2+1)(p-1)}{p} \right] \equiv a-c+p \pmod{p}$  il faut appliquer le théorème 1 à l'entier

$$h = \begin{cases} a-c & \text{si } 0 \leq c \leq a \\ a-c+p & \text{si } a < c \leq p-1 \end{cases}.$$

On obtient alors les conditions nécessaires suivantes :

PROPOSITION 5. - On suppose  $a \neq 0$ , pour que  $B$  soit un  $\mathbb{D}$ -module libre, il est alors nécessaire que :

1°) si  $0 \leq c \leq a$  et  $t_1 < \frac{pe}{p-1} - 1$

- soit  $a = 1$

- soit  $a \neq 1$  avec pour  $n$  pair  $c = 0$  ou  $c = a_n$

pour  $n$  impair  $0 \leq c \leq \frac{a_n}{2}$  ,

2°) si  $a < c \leq p-1$  et  $t_1 < \frac{pe}{p-1} - 2$  ,  $a = 1$  et  $c < \frac{p+1}{2}$  .

Ces conditions ne sont pas suffisantes ; par des méthodes semblables à celles employées pour l'étude des idéaux d'une extension cyclique de degré  $p$  on peut démontrer :

THÉORÈME 2. - Si  $t_1$  et  $t_2$  sont les deux nombres inférieurs de ramification d'une extension cyclique de degré  $p^2$  d'un corps local  $k$  d'indice  $e$  et si  $t_1 \neq t_2 \pmod{p^2}$  alors :

a)  $B$  non libre sur  $\mathbb{D}$  si :

$$a \neq 0 \text{ et } \frac{1}{2} \frac{pe}{p-1} < t_1 < \frac{pe}{p-1} - (p+1) - \frac{a+1}{p-1} .$$

## EXTENSIONS CYCLIQUES

b) B libre sur  $\mathfrak{D}$  si :

$$a = 0 \text{ ou } a \text{ divise } p-1 \text{ avec } \frac{pe}{p-1} - 1 \leq t_1 \leq \frac{pe}{p-1} .$$

L'étude du cas cyclique de degré  $p^2$  n'est que partiellement résolu par ce théorème, cependant dans le cas  $p = 2$  les mêmes méthodes donnent pour des extensions cycliques de degré 4 où  $t_1 \not\equiv t_2 \pmod{4}$  le résultat complet :

B n'est pas libre sur  $\mathfrak{D}$  sauf dans les cas particuliers suivants :

1)  $a = 0$

2)  $a \neq 0$  et  $2e-3 \leq t_1 \leq 2e$

3)  $a \neq 0$ ,  $t_1 < e$  avec  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = 9$  ou  $t_1 = 2$ ,  $t_2 > 6$ .

On peut donc penser que pour des extensions cycliques de degré  $p^2$  d'un corps local, avec  $t_1 \not\equiv t_2 \pmod{p^2}$ , la structure de B comme  $\mathfrak{D}$ -module ne dépend ni de k ni de l'extension K/k autrement que par e,  $t_1$  et  $t_2$  ; cf. [1 bis].

-:-:-

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. M. BERGÉ. - Sur l'arithmétique d'une extension diédrale. Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1970-71, n° 14.
- [1 bis] A. M. BERGÉ. - Quelques résultats relatifs à l'ordre associé à une extension. Pub. Math. Bordeaux, année 1972-1973, fasc. 5, p. 9 à 24.
- [2] F. BERTRANDIAS et M. J. FERTON. - Comptes rendus 274, série A, 1972, p. 1330.
- [3] M. J. FERTON. - Sur l'anneau des entiers d'extensions cycliques de degré p et d'extensions diédrales de degré 2p d'un corps local. Thèse de Doctorat de 3e cycle présentée à l'Université de Grenoble.

- [4] M. J. FERTON. - Comptes rendus 276, série A, 1973, p. 1483.
- [5] H. W. LEOPOLDT. - Über die Hauptordnung der ganzen Elementen eines abelschen Zahlkörper. Jour. reine angew Math. t. 201 (1959), pp. 119-149.
- [6] E. NOETHER. - Normal Basis bei Körpern ohne höhere verzweigung. Jour. reine angew. Math. t. 167 (1932), pp. 147-152.

-:-:-:-

Marie-Josée FERTON  
Université Scientifique et  
Médicale de Grenoble  
Institut de Mathématiques Pures  
Boîte Postale 116  
38402 SAINT MARTIN D'HÈRES