

Astérisque

ALAIN ESCASSUT

Propriétés spectrales en analyse non archimédienne

Astérisque, tome 24-25 (1975), p. 157-167

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__157_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__157_0)

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS SPECTRALES EN ANALYSE NON ARCHIMÉDIENNE

par

Alain ESCASSUT

-:-:-:-

I. - SPECTRE MULTIPLICATIF D'UNE ALGÈBRE DE BANACH. - Soit A une $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach et soit $\text{Max}(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de A identifié à l'ensemble $\mathfrak{X}(A)$ des caractères de A , muni de la topologie de la convergence simple. Alors $\mathfrak{X}(A)$ est un compact qui possède des propriétés de connexité intéressante. Par exemple, pour tout ouvert fermé U de $\mathfrak{X}(A)$, il existe un idempotent unique u associé à U tel que

$$\begin{aligned} \forall \psi \in \mathfrak{X}(A) : \quad \psi(u) = 1 &\Leftrightarrow \psi \in U \\ \psi(u) = 0 &\Leftrightarrow \psi \notin U. \end{aligned}$$

Si l'on considère maintenant un corps ultramétrique complet, algébriquement clos K et une K -algèbre de Banach $(A, \|\cdot\|)$ le spectre maximal $\text{Max}(A)$ de A ne possède aucune propriété topologique comparable. Par contre, si l'on note $\text{Max}_a(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de codimension 1 de A et $\mathfrak{X}_a(A)$ l'ensemble des caractères de A , on remarque que l'application $\psi \rightarrow |\psi|$
 $\psi \in \mathfrak{X}_a(A)$

est une bijection de $\mathfrak{X}_a(A)$ dans l'ensemble des semi-normes multiplicatives continues de A , que l'on notera $\text{Mult}(A, \|\cdot\|)$, et qui est compact pour la topologie de la convergence simple [5]. (Dans le cas complexe il s'agit d'une bijection).

D'autre part, $\forall \varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$, l'ensemble $\text{Ker } \varphi$ des $f \in A$ tels que $\varphi(f) = 0$ est un idéal premier de A .

Rappelons à ce sujet le théorème 1 de [4].

THÉORÈME 1. - Pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ d'une K -algèbre de Banach $(A, \|\cdot\|)$, il existe $\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$ tel que $\text{Ker } \varphi = \mathfrak{M}$.

Alors on a le théorème 1 du chapitre III de [5].

THÉORÈME 1. - Pour tout ouvert fermé U de $\text{Mult}(A, \|\cdot\|)$ il existe un idempotent unique u associé à U tel que pour tout $\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$,

$$\varphi(u) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in U$$

$$\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow \varphi \notin U.$$

II. - SPECTRE MULTIPLICATIF D'UNE ALGÈBRE DE KRASNER $H(D)$. - Soit D un fermé borné, soit $K(D)$ l'algèbre des fractions $R(X) \in K(X)$, sans pôle dans D , normé par la norme $\|\cdot\|$ de la convergence uniforme sur D , et soit $H(D)$ l'algèbre de Banach complétée de $K(D)$ pour cette norme.

Le spectre multiplicatif des algèbres $K(D)$ et $H(D)$ a été étudié dans [3].

On doit d'abord caractériser les semi-normes multiplicatives (continues ou non) de $K(D)$ par un filtre appelé filtre circulaire défini de la façon suivante.

Soit Φ une suite de disques d_n strictement décroissante, de diamètres r_n , soit $\Delta = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} d_n$, et soit $r = \inf_n r_n$. Soit $\hat{\Phi}$ l'ensemble des couronnes $\Gamma(a, r', r'')$ où $a \in \Delta$ et où $r' < r < r''$. On appelle filtre circulaire un filtre de K admettant pour système générateur une famille de la forme $\Phi \cup \hat{\Phi}$.

On retient de la proposition XII de [3] le théorème :

THÉORÈME 2. - L'ensemble $\text{Mult } K(D)$ des semi-normes multiplicatives (continues ou non) de $K(D)$ est en bijection naturelle avec l'ensemble $\Theta(D)$ des filtres circulaires de K autres que les filtres de voisinages des points de $K-D$, par l'application $\mathfrak{F} \rightarrow \varphi_{\mathfrak{F}}$ où $\varphi_{\mathfrak{F}}(h) = \lim_{\mathfrak{F}} |h(x)|$ $(\forall h \in K(D))$.

Alors on a le théorème de [3].

THÉORÈME 3. - Pour tout $\mathfrak{F} \in \Theta(D)$, $\varphi_{\mathfrak{F}} \in \text{Mult}(K(D), \|\cdot\|_D)$ si et seulement si $\mathfrak{F}$ est sécant à D .

Les éléments de $\text{Mult}(K(D), \|\cdot\|_D)$ se prolongent naturellement en élément de $H(D)$ et l'on retrouve donc la même bijection entre $\text{Mult}(H(D), \|\cdot\|_D)$ et l'ensemble des filtres circulaires de K sécants à D .

III. - UNE CONJECTURE DE GUENNEBAUD. - L'application $\varphi \longmapsto \text{Ker } \varphi$
 $\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$
 n'est pas une injection : trivialement, deux normes multiplicatives distinctes de A admettent le même noyau $\{0\}$. B. Guennebaud avait conjecturé que la restriction

$\varphi \longmapsto \text{Ker } \varphi$ est une injection (où $\text{mult}_m(A, \|\cdot\|)$ désigne l'ensemble des $\varphi \in \text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$ tels que $\text{Ker } \varphi$ soit un idéal maximal). En fait, en considérant le quotient de A par $\text{Ker } \varphi$, on voit que cette conjecture est équivalente à la

conjecture suivante plus simple à formuler.

(C) Un corps Γ muni d'une norme de K -algèbre de Banach admet une seule valeur absolue continue pour cette norme.

Dans le cas où l'algèbre A est une algèbre $H(D)$, l'étude des valeurs absolues continues des quotients de $H(D)$ par ses idéaux maximaux $\mathfrak{M}$ nécessite d'abord de caractériser ceux-ci par les filtres circulaires $\mathfrak{F}$ des valeurs absolues $\varphi_{\mathfrak{F}}$ tels que $\mathfrak{M} = \text{Ker } \varphi_{\mathfrak{F}}$.

Notations et définitions. - Soit $\mathfrak{F}$ un filtre circulaire sécant à un infraconnexe D et soit $\Delta(\mathfrak{F}, D) = (\bigcap_{d \in \mathfrak{F}} \underline{d}) \cap D$ (où $\underline{d}$ désigne le plus petit disque circonferencié contenant d). Nous dirons qu'un filtre circulaire est sous-distingué, si :

$\Delta(\mathfrak{F}, D)$ admet une partition par une famille de chapeaux de T -filtres croissants et si tout T -filtre décroissant de $\Delta(\mathfrak{F}, D)$ est sécant à l'un au moins des éléments de cette partition. (Ces notions sont définies dans [7]).

Nous dirons qu'un filtre circulaire sous-distingué $\mathfrak{F}$ est distingué si $\Delta(\mathfrak{F}, D)$ est égal à D ou à la plage d'un T -filtre décroissant de D .

Soit $\mathfrak{F}$ un filtre circulaire de K sécant à un infraconnexe fermé borné D . On notera $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ l'idéal des $f \in H(D)$ tels que $\lim_{\mathfrak{F}} f = 0$ et on notera $\mathcal{O}(D)$ l'ensemble des filtres circulaires distingués sécants à D .

THÉORÈME 5. - L'application $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ est une bijection de $\mathcal{O}(D)$ sur $\mathcal{O}(D)$ Max $H(D)$ l'ensemble des idéaux maximaux de codimension ∞ de $H(D)$. De plus, si $\mathfrak{F}$ est un filtre circulaire sécant à D tel que $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ soit un idéal maximal de codimension ∞ de $H(D)$, alors $\mathfrak{F}$ est sous-distingué.

Le problème posé se ramène donc, pour une algèbre de Krasner, à étudier s'il peut exister un filtre circulaire sous-distingué, mais non distingué $\mathfrak{F}$, tel que $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ soit maximal, ou encore, s'il existe un filtre circulaire distingué $\mathfrak{G}$ et un filtre circulaire sous-distingué $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$ tel que $\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{I}(\mathfrak{G})$.

DÉFINITION. - Nous dirons qu'un filtre circulaire distingué est régulier si pour tout filtre circulaire sous-distingué $\mathfrak{F}$ tel que $\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{I}(\mathfrak{G})$ on a $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ où G désigne le groupe de valuation de K et k son corps des restes.

THÉORÈME 6. - Si G ou k est non dénombrable, tout filtre circulaire distingué sécant à un infraconnexe D est régulier. Si G et k sont dénombrables, il existe des infraconnexes D admettant des filtres circulaires distingués sécants à D et irréguliers.

IV. - SEMI-NORMES SPECTRALES. - Soit A une $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach unitaire dont la norme est notée $\|\cdot\|$, soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des homomorphismes de A sur $\mathbb{C}$ et, pour tout $x \in A$, soit $s_A(x)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $x - \lambda$ ne soit pas inversible dans A . Alors on connaît la relation

$$\sup_{\varphi \in \mathfrak{X}} |\varphi(x)| = \sup_{\lambda \in s_A(x)} |\lambda| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

vraie pour tout $x \in A$, et cette relation conduit à définir une semi-norme $\|\cdot\|_{sp}$ appelée semi-norme spectrale par

$$\|x\|_{sp} = \sup_{\varphi \in \mathfrak{X}} |\varphi(x)|.$$

Considérons maintenant une K -algèbre de Banach A dont la norme $\|\cdot\|$ n'est d'ailleurs pas supposée ultramétrique. On peut naturellement définir une

semi-norme $\|\cdot\|_{si}$ par

$$\|x\|_{si} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} ,$$

et il est clair que $\|\cdot\|_{si} \leq \|\cdot\|$. De plus, il résulte du théorème 1 de [4] que si l'on note $\text{Mult}(A, \|\cdot\|)$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives de A continues pour la norme $\|\cdot\|$, on a

$$\|x\|_{si} = \sup_{f \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)} f(x) .$$

D'autre part, si A n'est pas un corps, l'ensemble $s_A(x)$ des $\lambda \in K$, tels que $x - \lambda$ ne soit pas inversible, est non vide pour tout $x \in A$, et l'on peut définir une semi-norme $\|\cdot\|_s$ par

$$\|x\|_s = \sup_{\lambda \in s_A(x)} |\lambda|$$

qui vérifie de façon immédiate $\|x\|_s \leq \|x\|_{si}$ du fait que A est complète.

Enfin, si A admet au moins un idéal maximal de codimension 1, l'ensemble $\mathfrak{I}$ des homomorphismes de A sur K est non vide ainsi que les ensembles

$$sa_A(x) = \{ \varphi(x) ; \varphi \in \mathfrak{I} \} \quad (x \in A)$$

et l'on peut définir une semi-norme $\|\cdot\|_{sa}$ par

$$\|x\|_{sa} = \sup |\varphi(x)| = \sup |\lambda| ,$$

et l'on a trivialement $\|\cdot\|_{sa} \leq \|\cdot\|_s$.

Mais contrairement au cas d'une $\widetilde{C}$ -algèbre de Banach, la double inégalité

$$\|x\|_{sa} \leq \|x\|_s \leq \|x\|_{si}$$

peut parfois être stricte ([2], théorème VI. 12).

Exemple : $\|h\| = \sup_{r \leq 1} |h(r)|$, $h \in K(D)$, où $D = \{x ; |x| \leq 1\}$.

Propriétés (o) , (p) , (q)

Ceci nous conduit à étudier les trois propriétés suivantes :

Dans une K -algèbre de Banach qui n'est pas un corps, on notera (q) la propriété

$$(q) \quad \| \cdot \|_s = \| \cdot \|_{s_i} .$$

Dans une K -algèbre de Banach, dont l'un au moins des idéaux maximaux est de codimension 1 , on notera (o) et (p) les propriétés

$$(o) \quad \| \cdot \|_{sa} = \| \cdot \|_s ,$$

$$(p) \quad \| \cdot \|_{sa} = \| \cdot \|_{s_i} .$$

Par définition, on voit que A possède (p) si, et seulement si, elle possède (o) et (q) . Nous allons comparer de façon plus précise ces propriétés.

THÉORÈME 7. - Les propriétés (o) et (p) sont équivalentes dans la classe des K -algèbres de Banach dont un idéal maximal au moins est de codimension 1 .

THÉORÈME 8. - Soit D l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi| < 1$, et soit $A = H(D)\{T\}$ l'algèbre des séries formelles restreintes en T à coefficients dans $H(D)$, dont l'application identique sur D est notée x . Soit $X = 1 - xT$, soit $r \in]0, 1[$, et soit S l'ensemble des polynômes en X de la forme $\prod_{i=1}^n (X - a_i)^{q_i}$, où $|a_i| < r$ pour tout i . Alors l'application $\| \cdot \|_s^B$, définie sur l'algèbre $B = S^{-1}A$ par

$$t \rightarrow \|t\|_s^B = \sup_{\lambda \in s_B(t)} |\lambda| \quad (t \in B) ,$$

est une norme, et l'algèbre de Banach $\hat{B}$ complétée de B pour cette norme possède la propriété (q), mais non la propriété (p) .

Preuve. - On montre que $\|\frac{1}{x}\|_{\hat{B}}^{\hat{B}} = \frac{1}{r}$ et $\|\frac{1}{X}\|_{sa}^{\hat{B}} = 1$, tandis que, par construction, $\hat{B}$ possède la propriété (q).

Remarque 1. - Rappelons à ce sujet le théorème VI. 10 de [2] qui se généralise de façon évidente dans le cas d'une K-algèbre de Banach unitaire A, même si la norme de A n'est pas ultramétrique.

Soit A une K-algèbre de Banach unitaire, qui possède la propriété (p).

Soit x un élément de A dont les composantes infra-connexes du spectre D sont en nombre fini n et notées $D_1, \dots, D_n$. Soit $\Delta = sa_A(x)$, et soit $\Delta_i = D_i \cap \Delta$ ($1 \leq i \leq n$). Alors Δ_i est une frontière analytique de D_i ($i \leq i \leq n$).

Remarque 2. - On peut se demander si $Mult_m(A, \|\cdot\|)$ est toujours dense dans $Mult(A, \|\cdot\|)$ lorsque A possède la propriété (p). Mais un contre-exemple très pathologique semble indiquer que non.

V. - IDEMPOTENTS ASSOCIÉS. - Soit A une $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach, et soit $x \in A$.

On dit qu'un idempotent u de A est associé à x et à une partie E de $s_A(x)$ si, pour tout $\varphi \in \mathfrak{X}$ tel que $\varphi(x) \in E$, on a $\varphi(u) = 1$, et pour tout $\varphi \in \mathfrak{X}$ tel que $\varphi(x) \notin E$, on a $\varphi(u) = 0$. On a donné, dans [1] et [2], une définition semblable de la notion d'idempotents associés, et on a obtenu certains résultats dans le cas où A possède la propriété (p). Toutefois, il apparaît que si l'on veut obtenir des résultats plus généraux (en particulier si A ne satisfait plus (p) mais seulement (q)), il est préférable de considérer une notion légèrement différente d'idempotents associés qui coïncide toutefois avec la précédente si A satisfait la propriété (p), d'après les théorèmes VI. 10 et VI. 15 de [2].

DÉFINITION. - Soient A une K -algèbre de Banach, $\hat{x}$ l'ensemble des homomorphismes de A sur des extensions de K , et soit $x \in A$. Nous dirons qu'un idempotent u de A est associé à x et à une partie E de $s_A(x)$ si, pour tout $\varphi \in \hat{x}$ tel que $\varphi(x) \in E$, on a $\varphi(u) = 1$ et si, pour tout $\varphi \in \hat{x}$ tel que $\varphi(x) \notin E$, $\varphi(x) \in K$, on a $\varphi(u) = 0$.

Remarque. - Si l'algèbre A possède la propriété (p), la nouvelle définition d'un idempotent associé à x et à $E \subset s_A(x)$ coïncide avec celle de [1] et [2], et tous les résultats de [1] et [2] s'appliquent à cette nouvelle définition. En particulier, si A satisfait (p) et s'il existe un idempotent associé à x et à E , il est unique ([2], théorème VI.15).

Pour généraliser le théorème VI.16 de [2], nous devons utiliser les résultats de [3] sur les semi-normes multiplicatives continues de l'algèbre $K(D)$ des fractions rationnelles sans pôle dans un fermé borné D de K .

DÉFINITION. - Nous dirons qu'une couronne vide Γ de D ([2]) est x-fendue si elle possède la propriété

$$\inf_{a \in \Gamma} |a| \|t_a\|_{si} < 1 \quad \text{où} \quad t_a = \frac{x-a}{(x-a)^2}.$$

THÉORÈME 9. - Soit A une K -algèbre de Banach unitaire qui n'est pas un corps. Soit $x \in A$, soit $D = s_A(x)$, et soit Γ_0 une couronne x-fendue de D . Alors il existe un idempotent associé à x et $\mathfrak{I}(\Gamma_0)$ (resp. à x et $\mathfrak{J}(\Gamma_0)$). De plus, si les composantes infra-connexes de D sont en nombre fini $(D_1, \dots, D_n)$, et si toute couronne vide de D est x-fendue, alors il existe une famille d'idempotents u_i ($1 \leq i \leq n$) tels que u_i soit associé à x et D_i , et tels que

$$(1) \quad u_i u_j = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j$$

et

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n u_i = 1 \quad .$$

(Le couronnes vides Γ de D sont définies notamment dans [2], IV, ainsi que $\mathcal{J}(\Gamma)$ et $\mathcal{S}(\Gamma)$).

COROLLAIRE 1. - Soit A une K -algèbre de Banach unitaire qui n'est pas un corps et qui possède la propriété (q) ; alors, pour toute couronne vide Γ de $D = s_A(x)$, il existe un idempotent associé à x et $\mathcal{J}(\Gamma)$ (resp. x et $\mathcal{S}(\Gamma)$) ; de même, si les composantes infra-connexes de D sont en nombre fini n , il existe une famille d'idempotents u_i ($1 \leq i \leq n$) associés à x et à D_i , et satisfaisant (1) et (2). Enfin, si A admet au moins un idéal maximal de codimension 1 et possède la propriété (p), les idempotents u_i existent, et sont uniques.

COROLLAIRE 2. - Soit A une K -algèbre de Banach unitaire qui n'est pas un corps, qui possède la propriété (q), et dont les idempotents sont en nombre fini N . Alors pour tout $x \in A$, le nombre des composantes infra-connexes de $s_A(x)$ est majoré par N .

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ESCASSUT A. - Spectre algébrique et idempotents associés dans une algèbre de Banach ultramétrique. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, série A, p. 1285-1288.

- [2] ESCASSUT A. - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate. Astérisque, 1973, n° 10, p. 1-107.
- [3] GARANDEL G. - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner. Ind. Math., 1975.
- [4] GUENNEBAUD B. - Algèbres localement convexes sur les corps valués. Bull. Sc. Math., 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.
- [5] GUENNEBAUD B. - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques. Thèse Sc. Math. Univ. Poitiers, 1973.
- [6] MOTZKIN E. et ROBBA P. - Ensemble d'analyticité en analyse p-adique. Séminaire Delange-Pisot-Poitou : théorie des nombres, 10e année, 1968/69, n  8a, 5p.
- [7] ESCASSUT A. - Les algèbres de Krasner. C. R. A. S. Paris, série A, t. 272, premier mars 1971, p. 598-601.
- [8] ESCASSUT A. - T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique. Ann. de l'Inst. Fourier, t. 25, fasc. 2, 1975.

-:-:-

Alain ESCASSUT
 E.R.A. au C.N.R.S. n 362
 U. E. R. de Mathématiques
 et d'Informatique
 Université de Bordeaux I
 351, cours de la Libération
 33405 TALENCE