Astérisque

PIERRE BOLLEY
JACQUES CAMUS

Hypo-ellipticité partielle et hypo-analyticité d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés

Astérisque, tome 19 (1974), p. 49-77
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__19__49_0>

Astérisque
n°19 (1974) p.49-78

HYPO-ELLIPTICITE PARTIELLE ET HYPO-ANALYTICITE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES ET DEGENERES

Pierre BOLLEY — Université de Brest

Jacques CAMUS — Université de Rennes

Société Mathématique de France

INTRODUCTION.

Dans [2], on donne un résultat de régularité C^∞ dans la direction normale pour des opérateurs du type de Fuchs et on pose le problème de l'hypo-analyticité(*) et de l'hypo-ellipticité à partir d'un espace de distributions régulières. (la non hypo-ellipticité de ces opérateurs étant établie dans [9].)

On se propose ici de résoudre ces problèmes pour la classe d'opérateurs elliptiques et dégénéres introduits dans [5]. Il s'agit ici d'une sous-classe de la classe des opérateurs du type de Fuchs introduite par MM. BAOUENDI-GOULAOUIC dans [1].

Les résultats d'hypo-ellipticité partielle (cf. Théorème 1.1) ont été annoncés dans [8].

(*) cf. Remarque 6 : on montre en particulier que pour l'opérateur $P=(D_t t)^2+(tD_x)^2$, on a : si $u \in C^\infty(\mathbb{R}\,;\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}))$ et si Pu est analytique dans $\mathbb{R}^2$, alors u est analytique dans $\mathbb{R}^2$.

TABLE DES MATIERES

I. NOTATIONS ET RESULTATS

Soit L l'opérateur aux dérivées partielles défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \{(t,x) \ ; \ t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n\}$ par :

$$Lu(t,x) \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} P^{2m-h}(t^{k-h} \ u(t,x)) \ ,$$

où

(i) k et m sont deux entiers $\geqslant 0$;

(ii) P^{2m-h} est un opérateur aux dérivées partielles, d'ordre 2m-h au plus, à coefficients complexes indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, de la forme :

$$P^{2m-h} \equiv \sum_{|\alpha|+j\leq 2m-h} P^{2m-h}_{j,\alpha} \ D_t^j \ D_x^\alpha$$

où :

$$D_x^\alpha = i^{-|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{pour } x = (x_1,\dots,x_n), \ \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

$$\text{et } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \ ; \ D_t = i^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \ ;$$

(iii) P^{2m} est un opérateur elliptique d'ordre 2m exactement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant l'origine et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les éléments génériques de I et Ω seront notés respectivement t et x. On désigne par $C^\infty(I \ ; \ \mathcal{D}'(\Omega))$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur I à valeurs dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω ; $C^\infty(I \ ; \ \mathcal{D}'(\Omega))$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}'(I\times\Omega)$ des distributions sur $I \times \Omega$ (cf. [13]). Enfin, $C^\infty(I\times\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $I\times\Omega$ et à valeurs complexes.

On démontre d'abord dans cet article le théorème suivant :

Théorème 1.1 : *Avec les hypothèses précédentes, pour tous ouverts* $I' \subset I$ *et* $\Omega' \subset \Omega$ *et pour tout* $u \in C^\infty(I \ ; \ \mathcal{D}'(\Omega))$ *tel que* $Lu \in C^\infty(I'\times\Omega')$, *alors* $u \in C^\infty(I'\times\Omega')$.

La méthode utilisée est la méthode usuelle des quotients différentiels à partir d'une estimation à priori comme dans le cas des opérateurs elliptiques (cf. [10] par exemple).

On peut préciser davantage le théorème 1.1 en utilisant les résultats de régularité en t (pour une classe d'opérateurs plus générale) obtenus par M.M. BAOUENDI et GOULAOUIC dans [2] (corollaire 1, proposition 3) : supposons $k \leq 2m$ et désignons par $\rho_j(x)$, $j = 1,\dots,k$, les racines de l'équation $\phi(x;\rho) = 0$, où

$$\phi(x;\rho) \equiv \sum_{h=o}^{k} P^{2m-h}_{2m-h,o}(o,x)\ i^{k-h}\ \rho(\rho-1)\dots(\rho-k+h+1).$$

On a alors :

<u>Corollaire 1.1</u> : *Avec les hypothèses précédentes, soit* $\ell \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\mathrm{Re}\ \rho_j(x) > -\ell-2m+k-1$ *pour tout* $x \in \Omega$ *et* $j \in \{1,\dots k\}$.
Pour tous ouverts $I' \subset I$ *et* $\Omega' \subset \Omega$ *et pour tout* $u \in C^{\ell}_{-\infty}(I\ ;\ \mathcal{D}'(\Omega))$ *tel que* $L\ u \in C^{\infty}(I'\times\Omega')$, *alors* $u \in C^{\infty}(I'\times\Omega')$.

(Pour la définition de l'espace $C^{\ell}_{-\infty}(I\ ;\ \mathcal{D}'(\Omega))$, on renvoie à [2]. Par ailleurs, le lien entre les racines $\rho_j(x)$ introduites ici et les racines $\lambda_j(x)$ introduites dans [2] est $\lambda_j(x) = -1-\rho_j(x)$ pour $j=1,\dots,k$).

Ce résultat pourrait, d'ailleurs être obtenu par la même méthode que celle utilisée pour la démonstration du théorème 1.1 : la régularité en la variable t s'obtenant à partir des résultats donnés dans [4].

Ensuite, on démontre le

<u>Théorème 1.2</u> : *Soit* s *un nombre réel* ≥ 1. *Avec les hypothèses précédentes, on suppose les coefficients de l'opérateur* L *de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* $I\times\Omega$. *Pour tous ouverts* $I' \subset I$ *et* $\Omega' \subset \Omega$ *et pour tout* $u \in C^{\infty}(I\times\Omega)$ *tel que* Lu *soit de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* $I'\times\Omega'$, *alors* u *est de classe de Gevrey d'ordre* s *sur* $I'\times\Omega'$.

La méthode utilisée est une adaptation de celle donnée dans [11] à partir d'une estimation à priori, comme dans [7].

Dans le cas particulier où $s = 1$, on obtient le résultat d'hypo-analyticité suivant :

Corollaire 1.2 : *Avec les hypothèses précédentes, on suppose les coefficients de l'opérateur* L *analytiques sur* $I\times\Omega$. *Pour tous ouverts* $I' \subset I$ *et* $\Omega' \subset \Omega$ *et pour tout* $u \in C^{\infty}(I\times\Omega)$ *tel que* Lu *soit analytique sur* $I'\times\Omega'$, *alors* u *est analytique sur* $I'\times\Omega'$.

II. PRELIMINAIRES

II.1. Quelques espaces de distributions.

Pour $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \; ; \; \mathcal{F}_x u(\xi) . (1+|\xi|^2)^{s/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}^{(*)}$$

muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \, |\mathcal{F}_x u(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R} \; ; \; H^r(\mathbb{R}^n))$ est l'espace

$$H^s(\mathbb{R} \; ; \; H^r(\mathbb{R}^n)) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \; ; \; H^r(\mathbb{R}^n)) \; ; \; (1+|\tau|^2)^{s/2} \, \mathcal{F}_t u(\tau) \in L^2(\mathbb{R} \; ; \; H^r(\mathbb{R}^n))\} \; (*$$

muni de la norme

$$u \longmapsto \|u\|_{H^s(\mathbb{R} \; ; \; H^r(\mathbb{R}^n))} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|(1+|\tau|^2)^{s/2} \, \mathcal{F}_t \, u(\tau)\|^2_{H^r(\mathbb{R}^n)} \, d\tau\right)^{1/2}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, $H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ est l'espace :

$$H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \; ; \; (1+|\xi|^2 + |\tau|^2)^{s/2} \, (1+|\xi|^2)^{r/2} \, \mathcal{F}_{t,x} u(t,\xi) \in L^2(\mathbb{R}$$

muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2+|\tau|^2)^s \, (1+|\xi|^2)^r \, |\mathcal{F}_{t,x} u(\tau,\xi)|^2 \, d\tau \, d$$

Pour $s' < s$ et $r' < r$, $H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ s'injecte algébriquement et top giquement dans $H^{s',r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. L'opérateur D_t (resp. D_{x_i} pour $i=1,\dots,n$) est l aire et continu de $H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-1,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ (resp. $H^{s-1,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $H^{s,r-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$). L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Pour tous

---

(*) Etant donnés $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et E un espace de Banach, on note (cf. [13]) :

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p ; E)$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans E, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^p \; ; \; \mathbb{C})$;

$\mathcal{F}_z u(\zeta)$ est la transformée de Fourier de $u(z)$ pour $z \in \mathbb{R}^p$ et $\zeta \in \mathbb{R}^p$;

$L^2(\mathbb{R}^p \; ; \; E)$ est l'espace des (classes de) fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^p$ à va dans E et telles que $\int_{\mathbb{R}^p} \|u(z)\|_E^2 \, dz < +\infty$, dz étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ $L^2(\mathbb{R}^p) = L^2(\mathbb{R}^p \; ; \; \mathbb{C})$.

$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C(s,r,\phi) > o$ telle que pour tout $u \in H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ on ait :

$$(2.1) \quad \|\phi u\|_{H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \leq \operatorname{Sup} |\phi| . \|u\|_{H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + C(s,r,\phi).\|u\|_{H^{s,r-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} .$$

(Si $r=o$, on peut remplacer dans le second membre $\|u\|_{H^{s,r-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}$ par $\|u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}$).

En particulier, si $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $u \in H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, alors $\phi\, u \in H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. (cf. [12] pour ces propriétés). Enfin, pour $s \geq o$, $H^s(\mathbb{R}\ ;\ H^r(\mathbb{R}^n))$ s'injecte algébriquement et topologiquement dans $H^{s,r-s}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Pour $s \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $W_k^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ est l'espace

$$W_k^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)\ ;\ t^{k-h}\, u \in H^{s-h,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n),\ o \leq h \leq k\}$$

muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{W_k^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{h=o}^{k} \|t^{k-h} u\|^2_{H^{s-h,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \right)^{1/2} .$$

Pour $s' < s$ et $r' < r$, $W_k^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ s'injecte algébriquement et topologiquement dans $W_k^{s',r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Etant donné $u \in W_k^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, alors $D_{x_i} u \in W_k^{s,r}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ pour $i=1,\dots,n$ si et seulement si $u \in W_k^{s,r+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_k^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Pour $r=o$, on notera plus simplement l'espace $W_k^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ par $W_k^s(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

II.2. Structure locale des éléments de $C^\infty(\mathbb{R}\ ;\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$.

On désigne par $C^\infty(\mathbb{R}\ ;\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions sur $\mathbb{R}^n$ (cf. [13] ; noyaux semi-réguliers en t). On donne un résultat de régularité locale de ces fonctions.

Lemme 2.1. *Etant donnés* $u \in C^\infty(\mathbb{R}\ ;\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$ *et* $s \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, *il existe* $r \in \mathbb{R}$ *tel que* $\phi\, u \in W_k^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Démonstration : D'après [14] (cf. aussi [13]), pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $s \geq 0$, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\phi\, u \in H^s(\mathbb{R}\ ;\ H^r(\mathbb{R}^n))$. On en déduit facilement le résultat.

II.3. Résultats concernant certains opérateurs différentiels ordinaires.

On rappelle ici un résultat essentiel pour la suite concernant certains opérateurs différentiels ordinaires.

Soit $L(t\,;\,D_t)$ l'opérateur différentiel ordinaire défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$Lu(t) \equiv L(t\,;\,D_t)\,u(t) \equiv \sum_{h=0}^{\mathrm{Min}(k,m)} P^{m-h}(D_t)\;\{t^{k-h}\,u(t)\}\,,$$

où $D_t = \frac{1}{i}\,\frac{d}{dt}$, et où :

(i) k et m sont deux entiers $\geq o$;

(ii) $P^{m-h}(D_t)$ est un opérateur différentiel ordinaire d'ordre inférieur ou égal à $m-h$, à coefficients constants complexes :

$$P^{m-h}(D_t) = \sum_{j=o}^{m-h} P_j^{m-h'}\;D_\tau^j\;,\quad P_j^{m-h} \in \mathbb{C}\;;$$

(iii) $P^m(\tau)$ est un polynôme de degré m ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

On désigne par $\phi(\rho) = o$ l'équation indicielle associée à l'opérateur L avec

$$\phi(\rho) \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,m)} P_{m-h}^{m-h}\;i^{k-h}\;\rho(\rho-1)\;\ldots\;(\rho-k+h+1).$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.1. : *Soit* p *un entier* $\geq o$ *et soit* r_p *le nombre de racines de l'équation* $\phi(\rho)=o$ *vérifiant* $\mathrm{Re}\,\rho > -p-m+k-\frac{1}{2}$. *On suppose qu'aucune racine de* $\phi(\rho)=o$ *n'est située sur la droite* $\mathrm{Re}\,\rho = -\,p\,-\,m\,+\,k\,-\,\frac{1}{2}$.

Alors, l'opérateur L *considéré comme opérateur linéaire continu de* $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ (*) *dans* $H^p(\mathbb{R})$ *est à indice et son indice est égal à* $k-2r_p$.

De plus, si $r_p = k$*, l'opérateur* L *est un isomorphisme de* $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ *sur un sous-espace fermé de codimension* k *de* $H^p(\mathbb{R})$.

Pour une démonstration de ce théorème, on renvoie à [4] et [6].

(*) On désigne par $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ l'espace des $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tels que $t^{k-h}\, u \in H^{m+p-h}(\mathbb{R})$ pour h=o,...,k muni de la norme :

$$u \longrightarrow \|u\|_{W_k^{m+p}(\mathbb{R})} = \Big(\sum_{h=0}^{k} \|t^{k-h}u\|^2_{H^{m+p-h}(\mathbb{R})} \Big)^{1/2} .$$

III. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.1.

III.1. Une estimation a priori.

On conserve les notations des chapitres I et II.

Proposition 3.1 : *Pour tout* $x_o \in \mathbb{R}^n$, *il existe un* $p_o \in \mathbb{N}$ *tel que pour tous* $p \in \mathbb{N}$, $p \geq p_o$ *et* $q \in \mathbb{R}$, *il existe deux constantes* $C_{p,q} > o$ *et* $\varepsilon_p > o$ *telles que si* $u \in W_k^{2m+p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ *avec* Supp $u \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \ ; \ \|(t,x) - (o,x_o)\| < \varepsilon_p\}$ *on ait :*

$$\|u\|_{W_k^{2m+p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q} \{\|Lu\|_{H^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W_k^{2m+p,q-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\}.$$

La démonstration de cette proposition se fait à partir du théorème 2.1 en utilisant les techniques de [5]. Cependant, pour la commodité du lecteur, on rappelle brièvement les étapes de la démonstration.

1ère étape : On suppose que les opérateurs P^{2m-h} sont à coefficients constants et homogènes de degré 2m-h (ou identiquement nuls). Par transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ par rapport aux variables tangentielles x, l'opérateur L se transforme en un opérateur différentiel ordinaire en t, noté $L(t\ ;\ \xi, D_t)$ dépendant du paramètre $\xi\in\mathbb{R}^n$ et défini par :

$$L(t\ ;\ \xi,\ D_t)\ v(t) \equiv \sum_{h=o}^{\operatorname{Min}(k,2m)} P^{2m-h}\ (\xi,D_t)\ \{t^{k-h}\ v(t)\}.$$

Utilisant le théorème 2.1, il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_1$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, l'opérateur $L\ (t\ ;\ \xi,\ D_t)$ soit un isomorphisme de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R})$ sur un sous-espace fermé de codimension finie k de $H^p(\mathbb{R})$.

Posant alors $p_o = \operatorname{Max}\ (p_1\ ,\ 1-2m+k)$, pour tout $p \geq p_o$, il existe une constante $C_p > o$ telle que pour tout $\omega \in S_{n-1}$, sphère unité de $\mathbb{R}^n$, pour tout $v \in W_k^{2m+p}(\mathbb{R})$ on ait :

$$(3.1)\qquad \sum_{h=o}^{k}\ \sum_{\ell=o}^{2m+p-h} \|D_s^\ell\ (s^{k-h}\ v(s))\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_p\ \|L(s\ ;\ \omega,\ D_s)\ v\|_{H^p(\mathbb{R})}.$$

Pour $u \in C_o^\infty\ (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ et $\xi \in \mathbb{R}^n\setminus\{o\}$, on pose $v(s) = \mathcal{F}_x\ u(t,\xi)$ avec $s=t|\xi|$. On applique l'inégalité (3.1) à un tel v, on multiplie l'inégalité obtenue par $|\xi|^{2m+p-k-\frac{1}{2}}\ (1+|\xi|^2)^{q/2}$, on élève au carré et on intègre par rapport à ξ dans $\mathbb{R}^n$.

On en déduit alors l'estimation :

(3.2) $$\|u\|_{W_k^{2m+p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \leq C_p \{\|Lu\|_{H^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W_k^{2m+p-1,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\}.$$

<u>2ème étape</u> : On établit la proposition 3.1 dans le cas $x_o = o$. Par translation, on peut toujours se ramener à ce cas. On introduit les opérateurs L^o et L^o_o définis sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ par :

$$L^o\, u(t,x) \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} \sum_{|\alpha|+j=2m-h} p^{2m-h}_{j,\alpha}(t,x)\, D^j_t\, D^\alpha_x \{t^{k-h}\, u(t,x)\}$$

$$L^o_o\, u(t,x) \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} \sum_{|\alpha|+j=2m-h} p^{2m-h}_{j,\alpha}(o,o)\, D^j_t\, D^\alpha_x \{t^{k-h}\, u(t,x)\}.$$

Soient alors $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > o$. Utilisant l'inégalité (1.1), il est facile de voir qu'il existe des constantes $\alpha(\varepsilon) > o$ avec $\lim\limits_{\varepsilon\to o} \alpha(\varepsilon) = o$, $C_1(p,q,\varepsilon) > o$ telles que pour tout $u \in W_k^{2m+p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ avec $\mathrm{supp}\, u \subset \{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n ;\ \|(t,x)\| < \varepsilon\}$ on ait :

(3.3) $$\|(L^o - L^o_o)u\|_{H^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \leq \alpha(\varepsilon)\, \|u\|_{W_k^{2m+p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} + C_1(p,q,\varepsilon)\|u\|_{W_k^{2m+p,q,q-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}$$

Par ailleurs, il existe une constante $C_2(p,q,\varepsilon) > 0$ telle que pour tout $u \in W_k^{2m+p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ avec $\mathrm{Supp}\, u \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n ;\ \|(t,x)\| < \varepsilon\}$ on ait :

(3.4) $$\|(L - L^o)u\|_{H^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \leq C_2\,(p,q,\varepsilon)\, \|u\|_{W_k^{2m+p-1,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}.$$

Appliquant l'inégalité (3.2) à l'opérateur L^o_o pour $p \geq p_o$, on déduit la proposition 3.1 des inégalités (3.2), (3.3) et (3.4).

III.2. <u>Régularité partielle</u>.

On conserve les notations de la proposition 3.1. On a alors :

<u>Proposition 3.2</u> : *Si* $u \in W_k^{2m+p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ *avec* $\mathrm{Supp}\, u \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n ;\ \|(t,x) - (o,x_o)\| < \varepsilon_p\}$ *et si* $Lu \in H^{p,q+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ *alors* $u \in W_k^{2m+p,q+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.

Démonstration : On utilise la méthode des quotients différentiels. Pour $h \in \mathbb{R} \setminus \{o\}$ et $i=1,\dots,n$, on pose :

$$\tau_{ih}\, v(t,x) = v(t,x_1,\dots,x_i + h,\dots, x_n)$$

$$\rho_{ih}\, v(t,x) = \frac{1}{h}\,(\tau_{ih}\, v(t,x) - v(t,x)).$$

On a :

$$L(\rho_{ih}u)(t,x) = \rho_{ih}(Lu)(t,x) + \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} \sum_{|\alpha|+j\leq 2m-h} \rho_{ih}(p^{2m-h}_{j,\alpha})(t,x)D^{\alpha}_{x}D^{j}_{t}(\tau_{ih}(t^{k-h}u(t,x))).$$

Etant donnés $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > o$, il existe une constante $C(p,q,\varepsilon) > 0$ telle que pour tout $u \in W^{2m+p,q}_{k}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ avec $\mathrm{Supp}\, u \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n ;\ \|(t,x) - (o,x_o)\| < \varepsilon\}$ on ait :

$$\|L(\rho_{ih}u)\|_{H^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \leq \|\rho_{ih}(Lu)\|_{H^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} + C(p,q,\varepsilon)\, \|u\|_{W^{2m+p,q}_{k}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}.$$

On applique la proposition 3.1 à $\rho_{ih}u$ avec $u \in W^{2m+p,q}_{k}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{Supp}\, u \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n ;\ \|(t,x) - (o,x_o)\| < \varepsilon_p\}$ et h suffisamment petit :

$$\|\rho_{ih}u\|_{W^{2m+p,q}_{k}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q}\{\|\rho_{ih}(Lu)\|_{H^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} + \|\rho_{ih}u\|_{W^{2m+p,q-1}_{k}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} + $$
$$+ C(p,q,\varepsilon_p)\ \|u\|_{W^{2m+p,q}_{k}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\} .$$

Par suite, il existe une constante $C'_{p,q} > o$ telle que, pour h suffisamment petit, on ait :

$$\|\rho_{ih}u\|_{W^{2m+p,q}_{k}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \leq C'_{p,q}\ \{\|Lu\|_{H^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W^{2m+p,q}_{k}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\} .$$

On en déduit que $D_{x_i} u \in W^{2m+p,q}_{k}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, et ceci pour $i=1,\dots,n$. Finalement, $u \in W^{2m+p,q+1}_{k}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, ce qui achève la démonstration.

III.3. Démonstration du théorème 1.1.

Soit $u \in C^{\infty}(I ; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^{\infty}(I' \times \Omega')$ et soit $(t_o , x_o) \in I' \times \Omega'$. On doit montrer que u est indéfiniment dérivable au point (t_o , x_o).

Pour $t_o \neq o$, le résultat est classique puisque l'opérateur L est elliptique en tout point (t,x) pour lequel $t \neq o$.

Si $t_o = o$, soit V un voisinage ouvert du point (o,x_o) avec $V \Subset I' \times \Omega'$ et soit $\phi \in \mathcal{D}(I' \times \Omega')$ avec $\phi = 1$ sur V. D'après le lemme 2.2, pour tout $p \geq o$, il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\phi\, u \in W_k^{2m+p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, $\varphi\, u \in W_k^{2m+p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Choisissons alors $p \geq p_o$ où p_o est l'entier associé au point x_o comme dans la proposition 3.1, et $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ avec Supp $\varphi \subset \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n ; \|(t,x) - (o,x_o)\| < \varepsilon_p\}$. Or :

$$L(\varphi u) = \varphi . Lu + \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} \left[P^{2m-h}, \varphi\right] \{t^{k-h}\, \chi u\}$$

où $\chi \in \mathcal{D}(V)$ avec $\chi\varphi = \varphi$, et où $\left[P^{2m-h}, \varphi\right]$ désigne le commutateur des opérateurs P^{2m-h} et φ. Comme $\left[P^{2m-h}, \varphi\right]\{t^{k-h}\, \chi\, u\} \in H^{p+1,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \subset H^{p,q+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, il en résulte que $L(\varphi u) \in H^{p,q+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Utilisant la proposition 3.2, on en déduit que $\varphi\, u \in W_k^{2m+p,q+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Itérant le raisonnement, on en déduit que $\varphi\, u \in W_k^{2m+p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ pour tout q.

Ainsi, pour tout $p \geq p_o$, il existe $\varepsilon_p > o$ tel que si

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ Supp $\varphi \subset \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n ; \|(t,x) - (o,x_o)\| < \varepsilon_p\}$,

alors $\varphi\, u \in W_k^{2m+p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ pour tout q. On en déduit facilement que u est indéfiniment dérivable au point (o,x_o).

IV. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.2.

IV.1. Une estimation a priori.

On conserve les notations des chapitres I et II.

Proposition 4.1 : *Pour tout* $x_o \in \mathbb{R}^n$, *il existe un* $p_o \in \mathbb{N}$ *tel que pour tous* $p \in \mathbb{N}$, $p \geq p_o$, *il existe deux constantes* $C_p > o$ *et* $\varepsilon_p > o$ *telles que si* $u \in W_k^{2m+p}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *avec* $\text{Supp } u \subset \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ ; \ \|(t,x) - (o,x_o)\| < \varepsilon_p\}$ *on ait :*

$$\|u\|_{W_k^{2m+p}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \leq C_p \{\|Lu\|_{H^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W_k^{2m+p-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}\} .$$

La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.1 en utilisant cette fois la remarque faite sur l'inégalité (2.1) du chapitre II.

IV.2. Démonstration du théorème 1.2.

Soit s un nombre réel ≥ 1 et soit $u \in C^\infty(I \ ; \ \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que Lu soit de classe de Gevrey d'ordre s sur $I' \times \Omega'$. On doit montrer que u est de classe de Gevrey d'ordre s sur $I' \times \Omega'$.

On rappelle que si K est un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, s un nombre réel ≥ 1, on appelle classe de Gevrey d'ordre s sur K, l'espace $G_s(K)$ des fonctions u de classe C^∞ sur K à valeurs complexes telles qu'il existe une constante $L > o$ avec :

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} L^{-|\alpha|} (|\alpha|!)^{-s} \|D^\alpha u\|_{L^2(K)} < +\infty.$$

Si ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $G_s(\omega)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ sur ω qui sont de classe de Gevrey d'ordre s sur tout compact contenu dans ω. Pour s=1, on obtient les fonctions analytiques. On peut aussi définir ces espaces en utilisant les normes L^∞ au lieu des normes L^2.

Soit $(t_o,x_o) \in I' \times \Omega'$ avec $t_o \neq o$. L'opérateur L étant elliptique en tout point (t,x) pour lequel $t \neq o$, il est classique que ceci implique que u est de classe de Gevrey d'ordre s dans un voisinage du point (t_o,x_o) (cf. par exemple [10]).

Soit maintenant $(t_o, x_o) \in I' \times \Omega'$ avec $t_o = o$ et montrons que u est de classe de Gevrey d'ordre s dans un voisinage du point (o, x_o). La démonstration qui va suivre est tout à fait analogue à celle donnée dans [7]. Nous nous limiterons donc à reproduire les étapes essentielles.

Auparavant, nous rappelons les inégalités de Hardy suivantes (cf. [3]), pour tous entiers i et j et u appartenant à $C_o^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, on a :

$$(4.1) \qquad \|D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \leq \left[(i+\tfrac{1}{2})\ldots(i+j-\tfrac{1}{2})\right]^{-1} \|D_t^{i+j}(t^j u)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} .$$

On en déduit, en particulier, que si $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq k-2m$, la norme $u \longrightarrow \|t^k u\|_{H^{2m+p}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}$ est une norme équivalente sur l'espace $W_k^{2m+p}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Ainsi, pour $p > k-2m$, l'estimation a priori de la proposition 3.1 peut s'écrire :

$$(4.2) \qquad \|t^k u\|_{H^{2m+p}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \leq C_p \{\|Lu\|_{H^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + \|t^k u\|_{H^{2m+p-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}\} .$$

<u>1ère étape</u> : <u>Transformation de l'inégalité a priori</u>.

Soient a et b deux nombres réels tels que $o < b < a$. Soit ω' un voisinage ouvert de x_o dans $\mathbb{R}^n$ et $\omega = \omega' \times]-a, a[$ le cylindre ouvert correspondant. On suppose a et ω' convenablement choisis pour que ω soit contenu dans $(I' \times \Omega') \cap \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ ; \ \|(t,x) - (o,x_o)\| < \varepsilon_p\}$. Pour $o < \varepsilon < a$, on pose :

$\omega'_\varepsilon = \{x \in \omega' \ ; \ d(x \ ; \partial\omega') > \varepsilon\}$ où $d(x \ ; \partial\omega')$ est la distance de x à la frontière $\partial\omega'$ de ω' ;

$\omega_\varepsilon = \omega'_\varepsilon \times]-a+\varepsilon, a-\varepsilon[$;

$N_\varepsilon(u) = \|u\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}$.

Les coefficients de l'opérateur L étant de classe de Gevrey d'ordre s sur $\overline{\omega}$, il existe donc une constante $K_1 > o$ telle que pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$ et $j \in \mathbb{N}$, on ait :

$$(4.3) \qquad \sup_{\alpha, j, h} \|D_x^\gamma D_t^j P_{j,\alpha}^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega)} \leq K_1^{|\gamma|+j+1} ((|\gamma|+j)!)^s .$$

Les estimations a priori (4.2) étant valables dès que le support de u est dans ω, en utilisant la méthode "des ouverts emboités" de Morrey-Nirenberg, on va obtenir une majoration valable pour des u à support quelconque.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que $\varepsilon + \varepsilon_1$ soit inférieur à a-b, il existe une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\omega_{\varepsilon_1})$ telle que :

$$\begin{cases} \psi(t,x) = 1 \text{ pour } (t,x) \text{ appartenant à } \omega_{\varepsilon+\varepsilon_1} ; \\ \| D_t^j D_x^\gamma \psi \|_{L^\infty(\omega)} \leq C_1 \, \varepsilon^{-j-|\gamma|} \text{ pour tout } j \in \mathbb{N} \text{ et } \gamma \in \mathbb{N}^n, \end{cases}$$

la constante C_1 étant indépendante de ε et ε_1.

<u>Lemme 4.1</u> : *Il existe une constante* $C_2 > 0$ *dépendant des coefficients de* L *et de l'entier* $p \geq p_0$ *telle que, pour tout* $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $\varepsilon_1 > 0$ *avec* $\varepsilon + \varepsilon_1 <$ a-b *et pour tout* $\nu \in \mathbb{N}^n$ *et* $j \in \mathbb{N}$ *avec* $|\nu| + j \leq 2m+p$,

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_t^j D_x^\nu (t^k u)) \leq C_2 \left\{ \sum_{|\beta|+\ell \leq p} \varepsilon^{-p+|\beta|+\ell} N_{\varepsilon_1}(D_t^\ell D_x^\beta (Lu)) + \sum_{|\beta|+\ell \leq 2m+p-1} \varepsilon^{-2m-p+|\beta|+\ell} N_{\varepsilon_1}(D_t^\ell D_x^\beta (t^k u)) \right\}.$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit d'appliquer l'estimation (4.2) à ψu, pour $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

<u>Lemme 4.2</u> : *Il existe une constante* $C_3 > 0$ *dépendant des coefficients de* L *et de l'entier* $p \geq p_0$ *telle que pour tout* $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $\varepsilon_1 > 0$ *avec* $\varepsilon + \varepsilon_1 <$ a-b *et pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\nu \in \mathbb{N}^n$ *et* $j \in \mathbb{N}$ *avec* $|\nu|+j \leq 2m+p$, *on ait :*

$$\begin{aligned} N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_t^j D_x^{\nu+\alpha}(t^k u)) \leq C_3 \Bigg\{ & \sum_{|\beta|+\ell \leq p} \varepsilon^{-p+|\beta|+\ell} N_{\varepsilon_1}(D_t^\ell D_x^{\beta+\alpha} Lu)) + \\ & + \sum_{|\beta|+\ell \leq 2m+p-1} \varepsilon^{-2m-p+|\beta|+\ell} N_{\varepsilon_1}(D_t^\ell D_x^{\beta+\alpha}(t^k u)) + \\ & + \sum_{|\beta|+\ell \leq p} \sum_{|\delta|+r \leq 2m} \varepsilon^{-p+|\beta|+\ell} \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ |\alpha'| \neq 0}} \sum_{\substack{\beta' \leq \beta \\ \ell' \leq \ell}} \binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'}\binom{\ell}{\ell'} K_1^{|\alpha'|+|\beta'|+\ell'+1} ((|\alpha'|+|\beta'|+\ell')!)^s \\ & \qquad N_{\varepsilon_1}(D_t^{r+\ell} D_x^{\delta+\beta-\beta'+\alpha-\alpha'}(t^k u)) \Bigg\} . \end{aligned}$$

<u>Démonstration</u> : On applique le lemme 4.1 à la fonction $D_x^\alpha u$. Ce qui donne :

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_t^j D_x^{\nu+\alpha}(t^k u)) \leq C_2 \left\{ \sum_{|\beta|+\ell \leq p} \varepsilon^{-p+|\beta|+\ell} N_{\varepsilon_1}(D_t^\ell D_x^{\beta+\alpha}(Lu)) + \right.$$

$$+ \sum_{|\beta|+\ell\leq p} \varepsilon^{-p+|\beta|+\ell} N_{\varepsilon_1}(D_t^{\ell} D_x^{\beta} [D_x^{\alpha}, L]u)$$
$$\left. + \sum_{|\beta|+\ell\leq 2m+p-1} \varepsilon^{-2m-p+|\beta|+\ell} N_{\varepsilon_1}(D_t^{\ell} D_x^{\beta+\alpha}(t^k u))\right\} .$$

On estime le second terme du deuxième membre de cette inégalité. On a :

$$N_{\varepsilon_1}(D_t^{\ell} D_x^{\beta}[D_x^{\alpha}, L]u) \leq \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} \sum_{|\gamma|+s\leq 2m-h} \sum_{\substack{\beta'\leq\beta \\ \ell'\leq\ell}} \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha \\ |\alpha'|\neq o}} \binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'}\binom{\ell}{\ell'} \| D_t^{\ell'} D_x^{\beta'+\alpha'} P_{s,\gamma}^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega)}$$
$$N_{\varepsilon_1}(D_t^{s+\ell-\ell'} D_x^{\gamma+\beta-\beta'+\alpha-\alpha'}(t^{k-h}u)).$$

D'après l'hypothèse (4.3) et les inégalités de Hardy (4.1), on obtient :

$$\| D_t^{\ell'} D_x^{\beta'+\alpha'} P_{s,\gamma}^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega)} N_{\varepsilon_1}(D_t^{s+\ell-\ell'} D_x^{\gamma+\beta-\beta'+\alpha-\alpha'}(t^{k-h}u)) \leq$$

$$C.K_1^{|\alpha'|+|\beta'|+\ell'+1}((|\alpha'|+|\beta'|+\ell')!)^s N_{\varepsilon_1}(D_t^{h+s+\ell-\ell'} D_x^{\gamma+\beta-\beta'+\alpha-\alpha'}(t^k u)).$$

Remarquant que $h+|\gamma|+s \leq 2m$, on obtient le lemme 4.2.

2ème étape : Majoration des dérivées presque tangentielles.

On traduit maintenant l'hypothèse : Lu est de classe de Gevrey d'ordre s sur $\bar{\omega}$, i.e. : il existe une constante $K_2 > o$ telle que, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$ et $j \in \mathbb{N}$, on ait :

$$(4.4) \qquad \| D_x^{\gamma} D_t^{j} Lu\|_{L^2(\omega)} \leq K_2^{|\gamma|+j+1}((|\gamma|+j)!)^s .$$

Dans la suite, on choisira $K_1 = K_2 = K$.

L'entier p étant fixé $\geq p_o$, on dira qu'une dérivation $D_t^{\ell} D_x^{\alpha}$, avec $\ell \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est presque tangentielle si $\ell \leq 2m+p$. Les lemmes 4.1 et 4.2 permettent d'obtenir une majoration des dérivées presque tangentielles de $t^k u$.

Lemme 4.3 : *Pour tout entier* $p \geq p_o$ *, il existe une constante* $M = M(p) > o$ *telle que, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $\ell \in \mathbb{N}$ *avec* $\ell \leq 2m+p$ *et pour tout* $\varepsilon > o$ *avec* $o < \varepsilon < \frac{a-b}{|\alpha|+\ell}$*, on ait :*

$$(4.5) \qquad N_{(|\alpha|+\ell)\varepsilon}(D_t^{\ell} D_x^{\alpha}(t^k u)) \leq M^{|\alpha|+\ell+1} \varepsilon^{-(|\alpha|+\ell)s} .$$

Démonstration : Pour plus de commodité, on suppose dans la suite, $a-b < 1$ (ce qui ne restreint pas la généralité). On raisonne par récurrence sur l'entier $j=|\alpha|+\ell$ (avec $\ell \leq 2m+p$).

Supposons que (4.5) soit vraie jusqu'à l'ordre $j \geq o$ avec une constante $M \geq 1$. Soit $\alpha' \in \mathbb{N}^n$ et $\ell' \in \mathbb{N}$ avec $\ell' \leq 2m+p$ et tel que $|\alpha'| + \ell' = j+1$. On peut donc écrire $\alpha' = \alpha + \nu$ avec $|\nu| = 2m+p-\ell'$, donc $|\alpha| = j+1-2m-p$. Le lemme 4.2 appliqué à ε, avec $o < \varepsilon < \frac{a-b}{j+1}$, et $\varepsilon_1 = j\varepsilon$ donne :

$$N_{(j+1)\varepsilon}(D_t^{\ell'} D_x^{\alpha+\nu}(t^k u)) \leq C_3 \sum_{i=1}^{3} A_i$$

où A_i est le $i^{\text{ème}}$ terme intervenant dans la majoration fournie par le lemme 4.2. On majore indépendamment chacun des termes A_i. Dans la suite, C désignera une constante positive pouvant changer d'une inégalité à l'autre, mais toujours indépendante de j.

On a :
$$A_1 = \sum_{|\beta|+\ell\leq p} \varepsilon^{-p+|\beta|+\ell} N_{\varepsilon_1}(D_t^{\ell} D_x^{\beta+\alpha}(Lu)).$$

Utilisant (4.4) et l'hypothèse $\varepsilon(j+1) < 1$, on en déduit que :

$$A_1 M^{-j-2} \quad (j+1)s \leq C.(KM^{-1})^{j+2}.$$

On a :
$$A_2 = \sum_{|\beta|+\ell\leq 2m+p-1} \varepsilon^{-2m-p+|\beta|+\ell} N_{\varepsilon_1}(D_t^{\ell} D_x^{\beta+\alpha}(t^k u)).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on déduit que :

$$A_2 M^{-j-2} \varepsilon^{(j+1)s} \leq C.M^{-1}.$$

On a :
$$A_3 = \sum_{|\beta|+\ell\leq p} \sum_{|\delta|+r\leq 2m} \varepsilon^{-p+|\beta|+\ell} \sum_{\substack{\alpha''\leq\alpha \\ |\alpha''|\neq o}} \sum_{\substack{\beta'\leq\beta \\ \ell''\leq\ell}} \binom{\alpha}{\alpha''}\binom{\beta}{\beta'}\binom{\ell}{\ell''} K^{|\alpha''|+|\beta'|+\ell''+1}((|\alpha''|+|\beta'|+\ell'')!)^{s}$$
$$N_{\varepsilon_1}(D_t^{r+\ell} D_x^{\delta+\beta-\beta'+\alpha-\alpha''}(t^k u)).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on déduit que :

$$A_3 M^{-j-2} \varepsilon^{(j+1)s} \leq \sum_{|\delta|+\ell\leq p} \sum_{|\delta|+r\leq 2m} \sum_{\substack{\alpha''\leq\alpha \\ |\alpha''|\neq o}} \sum_{\substack{\beta'\leq\beta \\ \ell''\leq\ell}} K(2^s K M^{-1})^{|\alpha''|+|\beta'|+\ell''},$$

puisque $\binom{|\alpha|}{|\alpha''|}\binom{|\beta|}{|\beta'|}\binom{\ell}{\ell''}((|\alpha''|+|\beta'|+\ell'')!) \leq 2^{|\alpha''|+|\beta'|+\ell''}$.

Si l'on suppose que $2^s(n+1)\ KM^{-1} < 1$, on obtient :

$$A_3\ M^{-j-2}\ \varepsilon^{(j+1)s} \leq C.\ \frac{2^s(n+1)\ KM^{-1}}{1-2^s(n+1)KM^{-1}} .$$

En regroupant les inégalités précédentes, on obtient que si $2^s(n+1)KM^{-1} < 1$ alors

$$N_{(j+1)\varepsilon}(D_t^{\ell'} D_x^{\alpha+\nu}(t^k u)) \leq C_3 M^{j+2}\ \varepsilon^{-(j+1)s}\ C \left\{ (KM^{-1})^{j+2} + M^{-1} + \frac{2^s(n+1)\ KM^{-1}}{1-2^s(n+1)\ KM^{-1}} \right\}.$$

Cette inégalité montre que l'on peut choisir M grand vis-à-vis de K et indépendamment de j pour que :

$$N_{(j+1)\varepsilon}\ (D_t^{\ell'}\ D_x^{\alpha+\nu}\ (t^k u)) \leq M^{j+2}\ \varepsilon^{-(j+1)s}.$$

C'est précisément l'inégalité (4.5) à l'ordre j+1.

Lemme 4.4 : *Pour tout entier* $p \geq p_o$, *il existe une constante* $N = N(p) > o$ *telle que pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $\ell \in \mathbb{N}$ *avec* $\ell \leq 2m+p$ *et pour tout* b *avec* $o < b < a$, *on ait :*

$$(4.6) \qquad N_{a-b}\ (D_t^{\ell}\ D_x^{\alpha}\ (t^k u)) \leq N^{|\alpha|+\ell+1}\ ((|\alpha|+\ell)!)^s .$$

Démonstration : Dans (4.5), on choisit $\varepsilon = \dfrac{a-b}{|\alpha|+\ell}$ ce qui donne

$$N_{a-b}\ (D_t^{\ell}\ D_x^{\alpha}\ (t^k u)) \leq M^{|\alpha|+\ell+1}\ (a-b)^{-(|\alpha|+\ell)s}\ (|\alpha|+\ell)^{(|\alpha|+\ell)s} .$$

On en déduit (4.6) grâce à la formule de Stirling.

3ème étape : Majoration de toutes les dérivées.

On se propose de démontrer des inégalités du type (4.6) pour toutes les dérivées de $t^k u$.

L'opérateur P^{2m} étant elliptique, on peut supposer que $p_{2m,o}^{2m}(t,x)$ est égal à 1 ; ce qui permet d'écrire l'identité :

$$(4.7) \qquad D_t^{2m}\ (t^k u) = Lu - \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)}\ \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq 2m-h \\ j\neq 2m}} p_{j,\alpha}^{2m-h}\ D_t^j\ D_x^{\alpha}\ (t^{k-h}u).$$

Lemme 4.5 : *Il existe deux constantes* M_1 *et* M_2 *positives telles que pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $\ell \in \mathbb{N}$ *et pour tout* b *avec* $o < b < a$, *on ait :*

$$(4.8)\qquad N_{a-b}\,(D_t^{\ell}\,D_x^{\alpha}\,(t^k u)) \leq M_1^{|\alpha|+1}\,M_2^{\ell}\,((|\alpha|+\ell)!)^{s}.$$

Démonstration : D'après le lemme 4.4, l'inégalité (4.7) est vraie pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\ell \leq 2m+p$ (avec par exemple $M_1 = M_2 = N$, cette constante dépendant de p).

On choisit un entier p_1, avec $p_1 \geq p_o$ de telle sorte que :

$$(4.9)\qquad \left|1 - \sum_{h=1}^{\mathrm{Min}(k,2m)} ((2m-h+p_1+\tfrac{1}{2})\ldots(2m+p_1-\tfrac{1}{2}))^{-1}\,\|p_{2m-h,o}^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega)}\right| \geq \frac{1}{2}.$$

On applique l'opérateur $D_x^{\alpha}\,D_t^{p+1}$ aux deux membres de la relation (4.7) :

$$D_x^{\alpha}D_t^{2m+p+1}(t^k u) = D_x^{\alpha}\,D_t^{p+1}(Lu) - \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)}\ \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq 2m-h\\ j\neq 2m}}\ \sum_{\substack{\beta\leq\alpha\\ \ell\leq p+1}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{p+1}{\ell} D_x^{\beta}\,D_t^{\ell}\,p_{j,\alpha'}^{2m-h}$$
$$D_x^{\alpha-\beta}\,D_t^{p+1-\ell}\,D_t^{j}\,D_x^{\alpha'}\,(t^{k-h}u).$$

En isolant les termes de dérivation maximum en t, on obtient :

$$N_{a-b}(D_x^{\alpha}\,D_t^{2m+p+1}(t^k u)) \leq N_{a-b}\,(D_x^{\alpha}\,D_t^{p+1}(Lu)) + \sum_{h=1}^{\mathrm{Min}(k,2m)} \|p_{2m-h,o}^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})}$$
$$N_{a-b}(D_x^{\alpha}\,D_t^{\ell+1+2m-h}\,(t^{k-h}u)) +$$
$$+ \sum_{h=1}^{\mathrm{Min}(k,2m)}\ \sum_{\substack{\beta\leq\alpha\\ \ell\leq p+1}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{p+1}{\ell} \|D_x^{\beta}\,D_t^{\ell}\,p_{2m-h,o}^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})}.N_{a-b}(D_x^{\alpha-\beta}\,D_t^{p+1-\ell+2m-h}\,(t^{k-h}u)) +$$
$$+ \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)}\ \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq 2m-h\\ j\neq 2m-h}}\ \sum_{\substack{\beta\leq\alpha\\ \ell\leq p+1}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{p+1}{\ell}\|D_x^{\beta}D_t^{\ell}p_{j,\alpha'}^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})}.N_{a-b}(D_x^{\alpha-\beta}\,D_t^{p+1-\ell}\,D_t^{j}D_x^{\alpha'}\,(t^{k-h}u))$$

On applique les inégalités de Hardy (4.1) à chacun des termes du second membre ; ce qui donne pour $p \geq p_1$, compte-tenu de (4.9) :

$$(4.10)\qquad \frac{1}{2}\,N_{a-b}\,(D_x^{\alpha}\,D_t^{2m+p+1}\,(t^k u)) \leq N_{a-b}\,(D_x^{\alpha}\,D_t^{p+1}\,(Lu)) +$$
$$+ \sum_{h=1}^{\mathrm{Min}(k,2m)}\ \sum_{\substack{\beta\leq\alpha\\ \ell\leq p+1\\ |\beta|+\ell\neq o}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{p+1}{\ell} \|D_x^{\beta}\,D_t^{\ell}\,p_{2m-h,o}^{2m-h}\|_{L^\infty(\omega_{a-b})}$$
$$((p-\ell+2m-h+\tfrac{3}{2})\ldots(p-\ell+2m+\tfrac{1}{2}))^{-1}\,N_{a-b}(D_x^{\alpha-\beta}\,D_t^{p+1-\ell+2m}(t^k u)) +$$

$$+ \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq 2m-h \\ j\neq 2m-h}} \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \ell\leq p+1}} \binom{\alpha}{\beta} \binom{p+1}{\ell} \| D_x^\beta D_t^\ell P_{j,\alpha'}^{2m-h} \|_{L^\infty(\omega_{a-b})}$$

$$((r-\ell+j+\frac{3}{2})\ldots(r-\ell+j+h+\frac{1}{2}))^{-1} N_{a-b}(D_x^{\alpha-\beta+\alpha'} D_t^{p+1-\ell+j+h}(t^k u)).$$

A partir de cette inégalité, on démontre l'inégalité (4.8) par une récurrence faite en deux étapes : dans une première étape, on suppose que (4.8) est vraie quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\ell \in \mathbb{N}$ avec $\ell \leq 2m+p$ (avec $p \geq p_1$) ; on démontre qu'on peut choisir les constantes M_1 et M_2 indépendamment de p pour que l'inégalité (4.8) reste valable pour $\alpha = o$ et $\ell = 2m+p+1$. Dans une deuxième étape, on suppose de plus que (4.8) est vraie pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq j$ et $\ell \in \mathbb{N}$ avec $\ell \leq 2m+p+1$; on démontre qu'on peut choisir les constantes M_1 et M_2 indépendamment de j pour que l'inégalité (4.8) reste valable pour $|\alpha| = j+1$ et $\ell \leq 2m+p+1$.

On établit d'abord la première étape de la récurrence. On écrit l'inégalité (4.10) pour $\alpha = o$ en tenant compte des hypothèses (4.3) et (4.4) :

$$\frac{1}{2} N_{a-b}(D_t^{2m+p+1}(t^k u)) \leq K^{p+2}((p+1)!)^s +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\mathrm{Min}(k,2m)} \sum_{1\leq\ell\leq p+1} \binom{p+1}{\ell} K^{\ell+1} (\ell!)^s ((p-\ell+2m-h+\frac{3}{2})\ldots(p-\ell+2m+\frac{1}{2}))^{-1} N_{a-b}(D_t^{p+1-\ell+2m}(t^k u))$$

$$+ \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq 2m-h \\ j\neq 2m-h}} \sum_{\ell\leq p+1} \binom{p+1}{\ell} K^{\ell+1} (\ell!)^s ((p-\ell+j+\frac{3}{2})\ldots(p-\ell+j+h+\frac{1}{2}))^{-1} N_{a-b}(D_x^{\alpha'} D_t^{p+1-\ell+j+h}(t^k u)).$$

On note A_1, A_2, A_3 les trois termes figurant au second membre de cette inégalité, et on les majore séparément. Tout d'abord :

$$A_1 M_1^{-1} M_2^{-2m-r-1} ((2m+p+1)!)^{-s} \leq (KM_1)^{-1} (KM_2^{-1})^{p+1} M_2^{-2m}.$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour A_2, ce qui donne :

$$A_2 M_1^{-1} M_2^{-2m-p-1} ((2m+p+1)!)^{-s} \leq \sum_{h=1}^{\mathrm{Min}(k,2m)} \sum_{1\leq\ell\leq p+1} \binom{p+1}{\ell} \binom{2m+p+1}{\ell} K^{\ell+1} M_2^{-\ell}.$$

Si l'on suppose $KM_2^{-1} < 1$, alors :

$$A_2\, M_1^{-1}\, M_2^{-2m-p-1}\, ((2m+p+1)!)^{-s} \leq C\, \frac{KM_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}},$$

C étant indépendante de p.

On peut également appliquer l'hypothèse de récurrence pour A_3, ce qui donne :

$$A_3\, M_1^{-1}\, M_2^{-2m-p-1}((2m+p+1)!)^{-s} \leq \sum_{h=o}^{\operatorname{Min}(k,2m)} \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq 2m-h \\ j\neq 2m-h}} \sum_{\ell\leq p+1} K(KM_2^{-1})^{\ell}\, M_1^{|\alpha'|}\, M_2^{-2m+h+j}.$$

Si l'on suppose que $M_1 > 1$, $M_2 > 1$ et $KM_2^{-1} < 1$, alors :

$$A_3\, M_1^{-1}\, M_2^{-2m-p-1}\, ((2m+p+1)!)^{-s} \leq C\, M_1^{2m}\, M_2^{-1}\, (1-KM_2^{-1})^{-1},$$

C étant indépendante de p.

De ces trois majorations, on déduit :

$$N_{a-b}(D_t^{2m+p+1}(t^k u)) \leq M_1\, M_2^{2m+p+1}((2m+p+1)!)^s\, C\left\{(KM_1^{-1})(KM_2^{-1})^{p+1}\, M_2^{-2m} + \frac{KM_2^{-1} + M_1^{2m}\, M_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}}\right\}.$$

Cette inégalité montre que l'on peut choisir M_1 et M_2 indépendamment de p pour que l'on ait :

$$N_{a-b}\, (D_t^{2m+p+1}\, (t^k u)) \leq M_1\, M_2^{2m+p+1}\, ((2m+p+1)!)^s.$$

c'est la conclusion de la première étape de la récurrence.

On fait maintenant la deuxième étape de la récurrence. On écrit l'inégalité (4.10) pour $|\alpha| = j+1$ en tenant compte des hypothèses (4.3) et (4.4) :

$$\frac{1}{2} N_{a-b}\, (D_x^{\alpha}\, D_t^{2m+p+1}\, (t^k u)) \leq K^{j+p+3}\, ((j+p+2)!)^s +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\operatorname{Min}(k,2m)} \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \ell\leq p+1 \\ |\beta|+\ell\neq o}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{p+1}{\ell} K^{|\beta|+\ell+1}((|\beta|+\ell)!)^s\, ((p-\ell+2m-h+\tfrac{3}{2})\ldots(p-\ell+2m+\tfrac{1}{2}))^{-1}\, N_{a-b}\, (D_x^{\alpha-\beta}\, D_t^{p+1-\ell+2m}\, (t^k u))$$

$$+ \sum_{h=o}^{\operatorname{Min}(k,2m)} \sum_{\substack{|\alpha'|+r\leq 2m-h \\ r\neq 2m-h}} \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \ell\leq p+1}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{p+1}{\ell} K^{|\beta|+\ell+1}\, ((|\beta|+\ell)!)^s$$

$$((p-\ell+r+\tfrac{3}{2})\ldots(p-\ell+r+h+\tfrac{1}{2}))^{-1}\, N_{a-b}(D_x^{\alpha-\beta+\alpha'}\, D_t^{p+1-\ell+r+h}(t^k u)$$

On note A_1 , A_2 et A_3 les trois termes figurant au second membre de cette inégalité et on les majore séparément. Tout d'abord :

$$A_1\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-p-1}\, ((j+2m+p+2)!)^{s} \le (KM_1^{-1})^{j+2}\, (KM_2^{-1})^{p+1}\, M_2^{-2m}.$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour A_2 , ce qui donne :

$$A_2\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-p-1}\, ((j+2+p+2)!)^{-s} \le C \sum_{\substack{\beta\le\alpha \\ \ell\le p+1 \\ |\beta|+\ell\neq 0}} (KM_1^{-1})^{|\beta|}\, (KM_2^{-1})^{\ell} .$$

Si l'on suppose que $n\, KM_1^{-1} < 1$ et $KM_2^{-1} < 1$, alors :

$$A_2\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-p-1}((j+2m+p+2)!)^{-s} \le C\left\{ \frac{1}{1-n\, KM_1^{-1}} \cdot \frac{KM_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}} + \frac{1}{1-KM_2^{-1}} \cdot \frac{n\, KM_1^{-1}}{1-n\, KM_1^{-1}} \right\}.$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour A_3 , ce qui donne :

$$A_3\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-p-1}\, ((j+2m+p+2)!)^{-s} \le \sum_{h=0}^{\mathrm{Min}(k,2m)} \sum_{\substack{|\alpha'|+r\le 2m-h \\ r\neq 2m-h}} \sum_{\substack{\beta\le\alpha \\ \ell\le p+1}}$$
$$K(KM_1^{-1})^{|\beta|}\, (KM_2^{-1})^{\ell}\, M_1^{|\alpha'|} M_2^{-2m-\ell+r+h} .$$

Si l'on suppose que $M_1 > 1$, $M_2 > 1$, $nKM_1^{-1} < 1$ et $KM_2^{-1} < 1$, alors :

$$A_3\, M_1^{-j-2}\, M_2^{-2m-p-1}\, ((j+2m+p+2)!)^{-s} \le C.M_1^{2m}\, M_2^{-1}\, (1-n\, KM_1^{-1})^{-1}\, (1-KM_2^{-1})^{-1}.$$

De ces trois majorations, on déduit :

$$N_{a-b}(D_x^{\alpha}\, D_t^{2m+p+1}(t^k u)) \le M_1^{j+2}\, M_2^{2m+p+1}\, ((j+2m+p+2)!)^{s}\, C. \Big\{ (KM_1^{-1})^{j+2}\, (KM_2^{-1})^{p+1}\, M_2^{-2m} +$$
$$+ \frac{1}{1-n\, KM_1^{-1}} \cdot \frac{KM_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}} + \frac{n\, KM_1^{-1}}{1-n\, KM_1^{-1}} \cdot \frac{1}{1-KM_2^{-1}} + \frac{M_1^{2m}}{1-n\, KM_1^{-1}} \cdot \frac{M_2^{-1}}{1-KM_2^{-1}} \Big\} .$$

Cette inégalité montre que l'on peut choisir M_1 grand vis-à-vis de K, puis M_2 grand vis-à-vis de M_1 , le choix étant indépendant de $|\alpha|$ et de p pour que l'on ait :

$$N_{a-b}(D_x^{\alpha}\, D_t^{2m+p+1}\, (t^k u)) \le M_1^{j+2}\, M_2^{2m+p+1}\, ((j+2m+p+2)!)^{s} .$$

C'est la conclusion de la deuxième étape de la récurrence et par là, la fin de la démonstration du lemme 4.5.

4ème étape : Conclusion.

On peut maintenant montrer que u est de classe de Gevrey d'ordre s dans un voisinage du point (o,x_o). Soit ω le cylindre ouvert introduit à la 1ère étape et soit K un compact contenu dans ω ; soit b tel que $o < b < a$ et tel que K soit contenu dans l'ouvert ω_{a-b}. D'après le lemme 4.5, il existe une constante $M > o$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on ait :

$$N_{a-b}\,(D_t^{\ell}\, D_x^{\alpha}\,(t^k u)) \leq M^{|\alpha|+\ell+1}\,((|\alpha|+\ell)!)^s,$$

d'où l'on déduit que $t^k u$ est de classe de Gevrey d'ordre s dans l'ouvert ω. En utilisant les inégalités de Hardy (4.1), on obtient que u est de classe de Gevrey d'ordre s sur ω.

V. REMARQUES.

Remarque 1 : Les résultats du théorème 1.1. peuvent être étendus à une classe d'opérateurs plus générale de la forme :

$$L_p\, u(t,x) \equiv \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} P_p^{2m-h}\,(t^{k-h}\, u(t,x)),$$

où

(i) k et m sont deux entiers $\geq o$, et $p = (p_1,\ldots,p_n)$ un multi-indice non nul appartenant à $\mathbb{N}^n$;

(ii) P_p^{2m-h} est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients complexes indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, de la forme :

$$P_p^{2m-h} \equiv \sum_{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{p_i} + j \leq 2m-h} p_{j,\alpha}^{2m-h}\, D_t^j\, D_x^\alpha \;,$$

(iii) l'opérateur P_p^{2m} satisfait à la condition suivante : $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ \tau \in \mathbb{R}$ avec $(\xi,t) \neq o$, $P_p^{2m}(\xi,\tau) \neq o$.

Ainsi, par exemple, soient p un entier ≥ 1 et $P \equiv (D_t t)^2 + (tD_x^p)^2$: si $u \in C^\infty(\mathbb{R}\,;\, \mathcal{D}'(\mathbb{R}))$ et si $Pu \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Remarque 2 : La démonstration du théorème 1.2 peut être simplifiée dans le cas analytique en utilisant les résultats de [1] (théorèmes de Cauchy-Kowaleska et d'Holmgren pour les équations du type de Fuchs). Il suffit en effet, une fois obtenue la majoration des dérivées presque tangentielles (2ème étape), d'appliquer d'abord le théorème de Cauchy-Kowaleska, et ensuite de conclure en utilisant le théorème d'unicité d'Holmgren.

Remarque 3 : Un changement de variables de classe C^∞ préservant l'hypersurface $t=o$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ne modifie pas localement les espaces de distributions régulières sur l'hypersurface $t=o$ introduits précédemment, et ne modifie pas non plus la forme générale des opérateurs L (introduits en I) ; par conséquent, étant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$, on peut donner des définitions analogues d'espaces de distributions régulières sur une hypersurface S de classe C^∞ contenue dans Ω. On peut alors énoncer des résultats d'hypo-ellipticité partielle pour des opérateurs qui dans un changement de coordonnées locales (qui à S associe l'hyperplan $t=o$) sont du type L. Dans la même situation, on peut énoncer des résultats d'hypo-analyticité (S devant être une hypersurface analytique).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC : "Cauchy problems with characteristic initial hypersurface". A paraître, Comm. Pure Appl. Math. 1973.

[2] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC : "Cauchy problems with multiple characteristics in spaces of regular distributions". A paraître dans Uspechi Mathem. Nauk (1974).

[3] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC : "Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés". Ann. E.N.S. Paris - 1971.

[4] P. BOLLEY - J. CAMUS :"Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable". Journal de Math. Pures et Appliquées, tome 51, 1972.

[5] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables". Bull. Soc. Math. France, Mémoire 34, p. 55-140, (1973).

[6] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Etude d'une classe de systèmes elliptiques et dégénérés" A paraître : Publications des Séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes, Fasc. 2 : Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Année 1973.

[7] P. BOLLEY - J. CAMUS - B. HANOUZET : "Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe de problèmes aux limites elliptiques et dégénérés".

[8] P. BOLLEY, J. CAMUS, B. HELFFER : "Hypoellipticité partielle d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés". C.R. Acad. Sc. Paris (11 mars 1974), série A-775.

[9] B. HELFFER - C. ZUILY : "Non hypo-ellipticité des opérateurs du type de Fuchs".

[10] J.L. LIONS - E. MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes". Tomes 1 et 3. Dunod - Paris - 1968-1970.

[11] C.B. MORREY - L. NIRENBERG : "On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations". C.P.A.M. 7, 271-290 (1957).

[12] J. PEETRE : "An other approach to elliptic boundary problems". Comm. Pure Appl. Math., Vol. XIV, 711-731, (1961).

[13] L. SCHWARTZ : "Distributions à valeurs vectorielles". Ann. Inst. Fourier 7, pages 1 à 141 - (1957).

[14] F. TREVES : "Linear partial differential equations with constant coefficients". Gordon and Breach (1966) - New-York.