BERNARD HELFFER
CLAUDE ZUILY

Non hypoellipticité d'une classe d'opérateurs différentiels

Astérisque, tome 19 (1974), p. 107-122
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__19__107_0>

Astérisque
n°19 (1974) p.107-122

NON HYPOELLIPTICITE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS

Bernard HELFFER

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique

Claude ZUILY

Université Paris XI
Centre d'Orsay

Société Mathématique de France

§ 0. INTRODUCTION

Récemment, M. S. Baouendi et C. Goulaouic ont introduit une classe d'opérateurs différentiels définis dans $]-T,T[\times\Omega$ ($T>0$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$) qu'ils ont étudiée du point de vue du problème de Cauchy (voir [1] et [2]). Ils ont démontré en particulier que si l'on part d'une distribution u régulière (au sens de [2]) telle que Pu soit dans $C^\infty(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega))$, (où P désigne un opérateur de la classe), alors u est dans $C^\infty(]-T,T[,\mathcal{D}'(\Omega))$; (voir [2]).

Nous nous intéressons ici à la régularité C^∞ en (x,t), et montrons que les opérateurs de cette classe, pour lesquels la surface $t=0$ est caractéristique, ne sont jamais hypoelliptiques.

Ce résultat généralise un fait déjà connu pour les équations différentielles ordinaires (voir [5]).

Nous tenons à remercier les professeurs M. S. Baouendi et R. Beals qui nous ont signalé que le lemme 2.1, énoncé dans une première version de ce travail, n'était pas démontré dans [5] dans le cas général où nous l'utilisions

§ 1. PRELIMINAIRES.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et T un nombre réel positif. On pose $\mathcal{O}=]-T,T[\times\Omega$ et on considère l'opérateur différentiel

$$(1.1)\quad P(t,x;D_t,D_x)=t^kD_t^m+a_{m-1}(x)t^{k-1}D_t^{m-1}+\dots+a_{m-k}(x)D_t^{m-k}+ \\ +\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{|\beta|\leq m-p}t^{\alpha(p,\beta)}D_t^p\,a_{p,\beta}(t,x)D_x^\beta\quad,$$

où k et m sont des entiers tels que $m\geq k>0$, $\alpha(p,\beta)=\mathrm{Max}(0,k+p-m+1)$ $D_t=\frac{\partial}{\partial t}$, $D_x=\frac{\partial}{\partial x}$ et où les coefficients $a_i(x)$, $a_{p,\beta}(t,x)$ sont respectivement dans $C^\infty(\Omega)$ et $C^\infty(\mathcal{O})$.

Cette classe d'opérateurs a été introduite et étudiée du point de vue du problème de Cauchy dans [1].

Précisons quelques notations. On posera

$$(1.2)\quad P_o(t,x;D_t,D_x)=t^kD_t^m+a_{m-1}(x)t^{k-1}D_t^{m-1}+\dots+a_{m-k}(x)D_t^{m-k}\quad.$$

L'équation déterminante associée à l'opérateur $\mathcal{P}$ sera par définition :

$$(1.3) \qquad f(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+1) + a_{m-1}(x)\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+2) + \ldots$$
$$+ a_{m-k}(x)\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+k+1).$$

Les racines de ce polynôme seront notées :

$$(1.4) \qquad \lambda_1,\ldots,\lambda_k\,;\ \lambda_{k+1} = 0,\ \lambda_{k+2} = 1,\ldots,\lambda_m = m-k-1 .$$

Le but de ce travail est de démontrer le :

Théorème 1.1 : L'opérateur $\mathcal{P}$ défini en (1.1) n'est pas hypoelliptique♦ dans $\mathcal{O}$.

Remarques 1.2 :

a) Le théorème 1.1 est déjà connu dans les deux cas suivants :

1. $\mathcal{O} =]-T,T[$, $\mathcal{P} = t^k D_t^m + \sum_{i=o}^{k} b_{m-i}(t)\, t^{k-i} D_t^{m-i}$ cf. [5].

2. $m = 2$, $k = 1$, $a_1(0) = 0$ cf. [6] .

b) M. S. Baouendi et C. Goulaouic ont montré dans [2] qu'il existe un espace de distributions E relié à l'opérateur $\mathcal{P}$ et proche des distributions usuelles tel que si $u \in E$ et $\mathcal{P}u \in C^\infty(I,\mathcal{D}'(\Omega))$ alors $u \in C^\infty(I,\mathcal{D}'(\Omega))$ où $I =]-T,T[$.

§ 2. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.1.

Pour démontrer la non-hypoellipticité de l'opérateur $\mathcal{P}$ nous utiliserons le lemme suivant

---

♦ On rappelle qu'un opérateur Q est dit hypoelliptique dans un ouvert $\mathcal{O}$ si, pour tout ouvert ω de $\mathcal{O}$, $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$, $Qu \in C^\infty(\omega)$ impliquent $u \in C^\infty(\omega)$.

LEMME 2.1: Soit P un opérateur différentiel à coefficients C^∞ dans un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe une suite de distributions (u_n) dans $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_1 \subset\subset \mathcal{O}$:

(1) $\exists\, i \in \mathbb{N} : u_n \notin C^i(\mathcal{O}_1) \quad \forall\, n$

(2) $\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \exists\, n_o(j) : \forall\, n \geqslant n_o(j) \quad Pu_n \in C^j(\mathcal{O})$

(3) $\forall\, j \in \mathbb{N} \quad \exists\, n_1(j) : \forall\, n \geqslant n_1(j) \quad u_{n+1} - u_n \in C^j(\mathcal{O})$.

Alors P n'est pas hypoelliptique dans $\mathcal{O}$.

Démonstration : On peut supposer les suites $\{n_o(j)\}$ et $\{n_1(j)\}$ croissantes. Pour $j > i$ et pour les indices n tels que $n_1(j) \leqslant n < n_1(j+1)$ on a $u_{n+1} - u_n \in C^j(\overline{\mathcal{O}}_1)$. Il existe donc $f_n \in C^\infty(\mathcal{O})$ telle que

$$(*) \qquad \sup_{\substack{|\alpha| \leqslant j \\ x \in \mathcal{O}_1}} |D^\alpha(u_{n+1}-u_n-f_n)| \leqslant \frac{1}{2^n} .$$

Lorsque $n < n_1(i+1)$ on posera $f_n = 0$.

D'après (*), la série $\sum_{n=n_1(i+1)}^{\infty} (u_{n+1}-u_n-f_n)$ converge dans $C^{i+1}(\mathcal{O}_1)$.

D'autre part $u_o + \sum_{n=o}^{n_1(i+1)-1} (u_{n+1}-u_n) = u_{n_1(i+1)-1} \notin C^i(\mathcal{O}_1)$.

On en déduit que la distribution

$$u = u_o + \sum_{n=o}^{\infty} (u_{n+1}-u_n-f_n) \qquad .$$

n'appartient pas à $C^i(\mathcal{O}_1)$.

Nous allons montrer que $Pu \in C^N(\mathcal{O}_1)$ pour tout N . Soit m l'ordre de P et $\ell \in \mathbb{N}$ tel que : $\ell \geqslant n_o(N)$, $\ell \geqslant n_1(N+m)$. On a

$$Pu = P\{u_o + \sum_{n=o}^{\ell-1} (u_{n+1}-u_n-f_n)\} + P\{\sum_{n=\ell}^{\infty} (u_{n+1}-u_n-f_n)\} = PV_1 + PV_2 \ .$$

On a $V_1 = u_\ell + f$ où $f \in C^\infty(\sigma_1)$ donc $PV_1 \in C^N(\sigma_1)$ car $\ell \geqslant n_o(N)$.

D'autre part d'après (*) et la condition (3), $\sum_{n=\ell}^{\infty} (u_{n+1}-u_n-f_n)$ converge dans $C^{N+m}(\sigma_1)$ et donc $PV_2 \in C^N(\sigma_1)$ d'où $Pu \in C^\infty(\sigma_1)$.

Nous allons maintenant réduire la démonstration du théorème 1.1 à celle des deux cas suivants :

Cas 1 : Il existe un point x_o de Ω, un voisinage V_{x_o} de ce point et une racine $\lambda(x)$ de l'équation déterminante (1.3) tels que :

(2.1) $x \mapsto \lambda(x)$ est C^∞ dans V_{x_o} .

(2.2) $x \mapsto \lambda(x)$ ne prend pas de valeurs entières relatives dans V_{x_o} .

(2.3) Il existe $N_o \in \mathbb{Z}$ tel que $N_o < \mathrm{Re}\,\lambda(x) \leqq N_o + 1$ dans V_{x_o} .

(2.4) $\mathrm{grad}\,\lambda(x) \neq 0 \ \forall\, x \in V_{x_o}$ ou $\mathrm{grad}\,\lambda(x) \equiv 0 \ \forall\, x \in V_{x_o}$.

(2.5) Pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f(\lambda(x) + n) \neq 0 \ \forall\, x \in V_{x_o}$.

Cas 2 : Il existe $x_o \in \Omega$, V_{x_o} voisinage de x_o tels que :

(2.6) l'équation déterminante $f(\lambda)$ ne dépend pas de x dans V_{x_o} .

(2.7) les racines de l'équation déterminante, $f(\lambda) = 0$, sont des entiers relatifs.

En effet, il se peut tout d'abord que l'équation déterminante ne dépende pas de x dans un ouvert V de Ω. Dans ce cas les racines λ_i $(i = 1,\dots,m)$ sont des nombres complexes. Si tous les λ_i sont des entiers relatifs, nous sommes dans le cas 2. Dans le cas contraire, soit λ_{i_o} la plus grande des racines non entières ; nous sommes dans le cas 1 avec $\lambda = \lambda_{i_o}$.

Si l'équation déterminante dépend effectivement de x dans Ω alors :

a) il existe un point x_1 de Ω, un voisinage V_{x_1} de ce point, un indice i_1 $(1 \leq i_1 \leq k)$ tels que dans V_{x_1} on ait, pour $i = 1,2,\dots,k$:

$$(2.8)\quad \begin{cases} \text{ou bien} & \operatorname{Re}\lambda_i(x) < \operatorname{Re}\lambda_{i_1}(x) \\ \text{ou bien} & \operatorname{Re}\lambda_i(x) \equiv \operatorname{Re}\lambda_{i_1}(x) \end{cases} .$$

b) Si λ_{i_1} n'est pas constant, il existe $x_2 \in V_{x_1}$ et V_{x_2} voisinage de x_2 dans V_{x_1} tels que $x \mapsto \lambda_{i_1}(x)$ soit C^∞ dans V_{x_2} (cf. [3]), $x \mapsto \lambda_{i_1}(x)$ n'ait pas de valeur entière et tels que (2.3) soit vraie. D'autre part $f(\lambda_{i_1}(x) + n) \neq 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in V_{x_2}$ d'après (2.8). Enfin il existe $x_o \in V_{x_2}$, V_{x_o} voisinage de x_o dans V_{x_2}, tels que $\operatorname{grad}\lambda_{i_1}(x) \neq 0$ pour $x \in V_{x_o}$. En effet, dans le cas contraire, pour tout y de V_{x_2} et tout voisinage V_y de ce point, $x \mapsto \operatorname{grad}\lambda_{i_1}(x)$ aurait un zéro dans V_y, donc $\operatorname{grad}\lambda_{i_1}(x) \equiv 0$ dans V_{x_2}, ce qui impliquerait λ_{i_1} constant.

Ainsi dans V_{x_o} (2.1),....,(2.5) sont vérifiés.

c) Si λ_{i_1} est constant, mais $\lambda_{i_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, il est facile de voir que nous sommes encore dans le cas 1.

d) Si $\lambda_{i_1} \in \mathbb{Z}$, il existe x_1, V_{x_1}, i_2 tels que

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ou bien} & \operatorname{Re}\lambda_i < \operatorname{Re}\lambda_{i_2} \\ \text{ou bien} & \operatorname{Re}\lambda_i \equiv \operatorname{Re}\lambda_{i_2} \end{array}\right. \qquad \forall\, x \in V_{x_1} \quad \forall\, i \neq i_1$$

Si λ_{i_2} est non constant ou si λ_{i_2} est dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, on raisonne comme en a) et b) ; on est dans le cas 1.
Si λ_{i_2} est dans $\mathbb{Z}$, on regarde λ_{i_3} etc...
e) Si $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_{k-1}}$ sont dans $\mathbb{Z}$, alors λ_{i_k} ne peut pas être constant, sinon $f(\lambda)$ ne dépendrait pas de x. On est donc dans le cas 1.

A. Démonstration du théorème 1.1 dans le cas 1.

Nous commençons par construire certaines distributions qui nous seront utiles dans ce paragraphe.
Soit $x\mapsto\lambda(x)$ une fonction définie dans un ouvert V de Ω satisfaisant aux conditions (2.1), (2.2) et (2.3). On pose, $Y(t)$ étant la fonction d'Heaviside :

$$(2.9)\quad \begin{cases} H(\lambda(x)) = Y(t)t^{\lambda(x)} & \text{lorsque } \operatorname{Re}\lambda(x) > -1 \text{ pour } x \text{ dans } V. \\ H(\lambda(x)) = \dfrac{1}{1+\lambda(x)}\dfrac{d}{dt}H(\lambda(x)+1) & \text{lorsque } -h < \operatorname{Re}\lambda(x) \leqq -h+1 \\ & h = 2,3,\ldots ;\ x\in V \end{cases}$$

Il est facile de vérifier les propriétés suivantes :

$$(2.10)\quad \begin{cases} t\,H(\lambda(x)) = H(\lambda(x)+1) \\ \dfrac{d}{dt}H(\lambda(x)) = \lambda(x)\,H(\lambda(x)-1) \quad . \end{cases}$$

Supposons en outre que $\operatorname{grad}\lambda(x)\neq 0$ dans V, donc, par exemple, que $\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_1}\neq 0$ dans V. Pour $p\in\mathbb{N}$ on définit :

$$(2.11)\quad \begin{cases} H(\lambda(x),0) = H(\lambda(x)) \\ H(\lambda(x),p) = \dfrac{1}{\partial\lambda/\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_1}H(\lambda(x),p-1) \quad . \end{cases}$$

On vérifie de même les relations

$$(2.12)\quad \begin{cases} t\,H(\lambda(x),p) = H(\lambda(x)+1,p) \\[2mm] \dfrac{d}{dt}\,H(\lambda(x),p) = \lambda(x)H(\lambda(x)-1,p) + pH(\lambda(x)-1,p-1) \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x_i}\,H(\lambda(x),p) = \dfrac{\partial\lambda}{\partial x_i}\,H(\lambda(x),p+1) \quad . \end{cases}$$

Remarquons que pour $\operatorname{Re}\lambda(x) > -1$, on a $H(\lambda(x),p) = Y(t)(\operatorname{Log} t)^p\, t^{\lambda(x)}$. Considérons maintenant un triplet $(x_o , V_{x_o} , \lambda(x))$ satisfaisant aux conditions énoncées dans le cas 1. On a la :

Proposition 2.2 :

a) Si $\operatorname{grad}\lambda(x)$ est différent de zéro dans V_{x_o} ; pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe des fonctions $x \mapsto c_{\ell,p}(x)$ $(\ell = 1,\ldots,n,\ p = 0,\ldots,m.n)$ de classe C^∞ dans V_{x_o} , des fonctions $\alpha_i^n(x,t)$ $(i = 0,\ldots,m(n+1))$ de classe C^∞ dans $V_{x_o} \times]-\varepsilon,+\varepsilon[$ telles que, si l'on pose :

$$(2.13)\quad \begin{cases} u_o(t,x) = H(\lambda(x)) \\[2mm] u_n(t,x) = H(\lambda(x)) + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{p=o}^{m.n} c_{\ell,p}(x)\, H(\lambda(x)+\ell,p) \end{cases}$$

on a :

$$(2.14)\qquad \rho\, u_n(t,x) = \sum_{i=o}^{m(n+1)} \alpha_i^n(t,x)\, H(\lambda(x) + n+1 - m+k, i)$$

b) Si $\operatorname{grad}\lambda(x)$ est identiquement nul dans V_{x_o} , pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe des fonctions $c_\ell(x)$ $(\ell = 1,\ldots,n)$ de classe C^∞ dans V_{x_o} , une fonction $\alpha^n(x,t)$, C^∞ dans $V_{x_o} \times]-\varepsilon,+\varepsilon[$, telles que, si l'on pose :

$$(2.13)'\quad \begin{cases} u_o(x,t) = H(\lambda) \\[2mm] u_n(x,t) = H(\lambda) + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} c_\ell(x)\, H(\lambda+\ell) \end{cases}$$

on a

$$(2.14)'\qquad \rho\, u_n = \alpha^n(x,t)\, H(\lambda + n+1 - m+k) \quad .$$

On ne démontrera dans la suite que le cas a), le cas b) ayant une démonstration analogue.

Il est clair que la suite (u_n) donnée par la proposition 2.2 satisfait aux conditions du Lemme 2.1. Commençons par démontrer le :

<u>Lemme 2.3</u> :

(i) Pour tout entier $n > 0$, on a :

$$(2.15) \qquad \mathcal{P}_o H(\lambda(x)+n,p) = \sum_{\ell=o}^{p} c_\ell^p \left[\frac{\partial^\ell}{\partial\lambda^\ell} f(\lambda+n)\right] H(\lambda+n-m+k,\, p-\ell) \quad .$$

(ii) Pour tout entier $n \geqq 0$ et tout entier $p \geqq 0$, il existe des fonctions $b_{\ell,p,n}$, $\ell = 0,1,\dots,p$, de classe C^∞ dans V_{x_o}, telles que, dans $]-\varepsilon,\varepsilon[\times V_{x_o}$, on ait :

$$(2.16) \qquad \mathcal{P}_o\Big(\sum_{\ell=o}^{p} b_{\ell,n,p}(x)\, H(\lambda(x)+n,\ell)\Big) = H(\lambda+n-m+k,p) \quad .$$

<u>Démonstration du lemme 2.3</u> :

(i) La formule (2.15) résulte facilement de la relation suivante

$$D_t^i\, H(\lambda(x)+n,p) = \sum_{\ell=o}^{p} c_\ell^p \frac{\partial^\ell}{\partial\lambda^\ell}\{(\lambda+n)\dots(\lambda+n-i+1)\}\, H(\lambda+n-i,p-\ell)$$

que l'on démontre par récurrence sur i en utilisant (2.12).

(ii) On raisonne par récurrence sur p. Pour $p=0$,(2.16) résulte de (2.15) avec $p=0$ et de (2.5). Supposons (ii) vraie à l'ordre p. D'après (2.15) on a :

$$\mathcal{P}_o H(\lambda(x)+n,p+1) = \sum_{\ell=1}^{p+1} a_{\ell,p,n}(x) H(\lambda+n-m+k,p+1-\ell) + f(\lambda+n) H(\lambda+n-m+k,p+1) \quad .$$

Soit en posant $\ell - 1 = \ell'$

$$(2.18) \qquad \mathcal{P}_o\Big\{\frac{1}{f(\lambda+n)} H(\lambda(x)+n,p+1)\Big\} =$$

$$= H(\lambda+n-m+k,p+1) + \sum_{\ell'=o}^{p} a_{\ell',p,n}(x)\, H(\lambda+n-m+k,p-\ell') \quad .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, pour $\ell = 0,1,\dots,p$, il existe des fonctions C^∞ $d_{\ell,n,p,i}(x)$ telles que :

$$\mathcal{P}_o\Big(\sum_{i=o}^{p-\ell} d_{\ell,n,p,i}(x)\, H(\lambda(x)+n,i)\Big) = H(\lambda+n-m+k,p-\ell) \quad .$$

Il existe donc des fonctions C^∞ $e_{\ell,p,n}(x)$ telles que :

$$(2.19)\quad \mathcal{P}_o\{\sum_{\ell=o}^{p} e_{\ell,n,p}(x)H(\lambda(x)+n,\ell)\} = \sum_{\ell=o}^{p} a_{\ell,p,n}(x)\,H(\lambda(x)+n-m+k,p-\ell)\quad .$$

De (2.18) et (2.19) on tire

$$\mathcal{P}_o\{\frac{1}{f(\lambda+n)}\,H(\lambda(x)+n,p+1) - \sum_{\ell=o}^{p} e_{\ell,n,p}(x)\,H(\lambda(x)+n,\ell)\} =$$

$$= H(\lambda(x)+n-m+k,p+1)\quad .$$

C.Q.F.D.

Démonstration de la proposition 2.2 :

On va raisonner par récurrence sur n. Pour $n=0$, on a :

$$\mathcal{P}\,H(\lambda(x)) = \mathcal{P}_o\,H(\lambda(x)) + (\mathcal{P}-\mathcal{P}_o)\,H(\lambda(x))$$

$\mathcal{P}_o H(\lambda(x)) = f(\lambda(x))H(\lambda(x)-m+k) = 0$ car λ est racine de $f(\lambda(x)) = 0$.

$$(\mathcal{P}-\mathcal{P}_o)H(\lambda(x)) = \sum_{p=o}^{m-1}\ \sum_{|\beta|\leq m-p} t^{\alpha(p,\beta)}D_t^p\,a_{p,\beta}(t,x)D_x^\beta\,H(\lambda(x))\quad .$$

En utilisant les formules (2.12) on obtient

$$(\mathcal{P}-\mathcal{P}_o)H(\lambda(x)) =$$

$$= \sum_{p=o}^{m-1}\ \sum_{|\beta|\leq m-p}\ \sum_{j=0}^{|\beta|}\ \sum_{\ell=o}^{j} b_{p,\beta,j,\ell}(t,x)H(\lambda-p+\alpha(p,\beta),j-\ell)$$

où $\alpha(p,\beta) = \mathrm{Max}(0,k+p-m+1)$. D'autre part

$$\lambda - p + \alpha(p,\beta) \geqq \lambda + k - m + 1$$

on a donc

$$(\mathcal{P}-\mathcal{P}_o)H(\lambda(x)) = \sum_{i=o}^{m} c_i(t,x)\,H(\lambda(x)+k-m+1,i)$$

ce qui est précisément (2.14) avec $n=0$.

Supposons que l'on ait construit $u_o,u_1,\dots,u_n$, on obtient u_{n+1} de la manière suivante : on résoud

$$\mathcal{P}_o(u_{n+1}-u_n) = -\sum_{i=o}^{m(n+1)} \alpha_i^n(0,x)\,H(\lambda+n+1-m+k,i)\quad .$$

D'après le lemme 2.3, ceci est possible et on a :

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{i=o}^{m(n+1)} \sum_{\ell=o}^{i} c_{\ell,n,i}(x)\, H(\lambda(x)+n+1,\ell)$$

ce qui montre que u_{n+1} est bien de la forme (2.13). Ensuite on a :

$$\mathcal{P} u_{n+1} = \mathcal{P}_o(u_{n+1} - u_n) + (\mathcal{P} - \mathcal{P}_o)(u_{n+1} - u_n) + \mathcal{P}\ u_n \quad .$$

Il est facile de voir que

$$(\mathcal{P} - \mathcal{P}_o)(u_{n+1} - u_n) = \sum_{i=o}^{m(n+2)} \alpha_i^{n+1}(t,x)\, H(\lambda(x)+n+2+k-m,i)$$

et que $\mathcal{P} u_{n+1}$ est bien de la forme 2.14.

<u>Remarque</u> : Si on suppose que les coefficients de l'opérateur $\mathcal{P}$ sont analytiques en x, on peut préciser la proposition 2.2 en construisant une solution de l'équation $\mathcal{P} u = 0$, comme il a été démontré dans un cas particulier dans [6].

B. <u>Démonstration du théorème 1.1 dans le cas 2.</u>

Nous allons, tout d'abord, comme dans le cas précédent, construire une famille de distributions. Soit λ un entier relatif et p appartenant à $\mathbb{N}$, on pose

$$(2.20)\quad \begin{cases} R(\lambda,p) = t^{\lambda}(\mathrm{Log}|t|)^{p} & \text{lorsque } \lambda > -1 \\ R(-1,p) = \dfrac{1}{p+1} \cdot \dfrac{d}{dt}\,(\mathrm{Log}|t|)^{p+1} & \\ R(\lambda,p) = \dfrac{1}{\lambda+1}\left\{ \dfrac{d}{dt}\, R(\lambda+1,p) - p\, R(\lambda,p-1)\right\} & . \end{cases}$$

Nous renvoyons à [5] p. 121 pour la justification de cette définition. Notons simplement que l'on a les relations

$$(2.21)\quad \begin{cases} t\, R(\lambda,p) = R(\lambda+1,p) \\ \dfrac{d}{dt}\, R(\lambda,p) = \lambda\, R(\lambda-1,p) + p\, R(\lambda-1,p-1) \quad . \end{cases}$$

La démonstration qui suit s'inspire de celle de [5] et se décompose en plusieurs étapes. Soit λ_{i_o} la (ou l'une des) plus grande racine de $f(\lambda) = 0$.

(i) $\lambda_{i_o} \geqq m-k$:

Lemme 2.4 : Pour tout n de $\mathbb{N}$ il existe des fonctions $\alpha_n(t,x)$ et $\beta_n(t,x)$ de classe C^∞ dans $]-\varepsilon,+\varepsilon[\times V_{x_o}$ avec $\alpha_n(x,0)=1$ telles que, si l'on pose

$$u_n = \alpha_n(t,x)Y(t)t^{\lambda_{i_o}} \tag{2.22}$$

on a :

$$\rho\, u_n = \beta_n(t,x)Y(t)t^{\lambda_{i_o}+n+k-m+1} \tag{2.23}$$

Démonstration : On construit la suite (u_n) par récurrence sur n. Pour $n=0$ on prend

$$u_o(t,x) = Y(t)t^{\lambda_{i_o}}$$

en remarquant que pour $\lambda_{i_o} \geqq m-k$ on a :

$$\rho[Y(t)t^{\lambda_{i_o}}] = Y(t)\rho(t^{\lambda_{i_o}}) = Y(t)\rho_o(t^{\lambda_{i_o}}) + Y(t)\{\rho-\rho_o\}(t^{\lambda_{i_o}}) =$$
$$= Y(t)f(\lambda_{i_o})t^{\lambda_{i_o}-m+k} + Y(t)t^{\lambda_{i_o}-m+k+1}\beta_o(t,x) \quad .$$

Comme $f(\lambda_{i_o})=0$, cela prouve que $\rho\, u_o$ est bien de la forme (2.23).
Supposons $u_o,u_1,\dots,u_n$ construites. Pour obtenir u_{n+1}, on commence par résoudre pour $t>0$

$$\rho_o(v_n) = -t^{\lambda_{i_o}-m+k+n+1}\beta_n(0,x)$$

ce qui est possible en prenant

$$v_n = -\frac{t^{\lambda_{i_o}+n+1}\beta_n(0,x)}{f(\lambda_{i_o}+n+1)} \quad .$$

On pose ensuite :

$$u_{n+1} = u_n + Y(t)v_n = Y(t)t^{\lambda_{i_o}}\left\{\alpha_n - \frac{t^{n+1}\beta_n}{f(\lambda_{i_o}+n+1)}\right\} \quad .$$

Il est alors facile de voir que $\rho\, u_{n+1}$ est de la forme (2.23). La suite (u_n) ainsi construite satisfait aux conditions du Lemme 2.1.

(ii) $m-k > \lambda_{i_o} \geq 0$:

Remarquons tout d'abord que dans ce cas nous avons :

$$(2.24)\quad \begin{cases} f(\lambda_{i_o}) = 0 \quad ; \quad f'(\lambda_{i_o}) = 0 \\ f'(\lambda_{i_o} + \ell) \neq 0 \qquad \ell = 1,\dots,m-k-1-\lambda_{i_o} \\ f(m-k+\ell) \neq 0 \qquad \ell = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

Proposition 2.5 : Pour tout entier $n \geq 0$ il existe des fonctions a_n, b_n, α_n, β_n de classe C^∞ dans $]-\varepsilon,\varepsilon[\times V_{x_o}$ telles que si l'on pose :

$$(2.25)\qquad u_n = a_n(t,x) \,.\, R(\lambda_{i_o},1) + t^{m-k} b_n(t,x) \quad ,$$

alors

$$(2.26)\qquad \mathcal{P} u_n = \alpha_n(t,x) R(n,1) + t^n \beta_n(t,x) \quad .$$

Lemme 2.6 :

$$(2.27)\qquad \mathcal{P}_o R(\lambda_{i_o},1) = 0$$

$$(2.28)\qquad \mathcal{P}_o R(\lambda_{i_o}+\ell,1) = f'(\lambda_{i_o}+\ell) t^{\lambda_{i_o}+\ell-m+k} \quad ; \; 0 < \ell \leq m-k-1-\lambda_{i_o}$$

$$(2.29)\qquad \mathcal{P}_o R(m-k+\ell,1) = f(m-k+\ell)\, R(\ell,1) + f'(m-k+\ell) t^\ell \quad ; \quad \ell \in \mathbb{N}$$

$$(2.30)\qquad \mathcal{P}_o t^{m-k+\ell} = f(m-k+\ell) t^\ell \quad .$$

Démonstration : (2.30) est un cas particulier de (2.24). La relation (2.29) implique (2.27) et (2.28) en utilisant (2.24). Quant à (2.29) elle se démontre en utilisant (2.21).

Démonstration de la proposition 2.5 :

On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on écrit :

$$\mathcal{P} R(\lambda_{i_o},1) = t^{\lambda_{i_o}-m+k+1} \quad \alpha(t,x) + \beta(t,x) R(0,1)$$

où α et β sont des fonctions C^∞ dans $]-\varepsilon,\varepsilon[\times V_{x_o}$.

Utilisant (2.24) et (2.28) on construit facilement u_o sous la forme :

$$u_o(t,x) = \sum_{\ell=o}^{m-k-1-\lambda_{i_o}} c_\ell(x) R(\lambda_{i_o}+\ell,1)$$

ce qui, compte-tenu de (2.21), montre que u_o est de la forme (2.25). On utilise ensuite le lemme 2.6.

On suppose maintenant $u_o, u_1, \ldots, u_n$ construits ; pour obtenir u_{n+1} on procède la manière suivante ; on résoud

$$P_o(u_{n+1} - u_n) = -\{t^n \beta_n(0,x) + R(n,1)\,\alpha_n(0,x)\}$$

ce qui est possible grâce à (2.30), (2.29). Il s'en suit que (2.25) est vérifié pour u_{n+1}, ainsi que (2.26).

La démonstration se termine en utilisant le Lemme 2.1.

<u>(iii) $\lambda_{i_o} \leq 0$</u>. :

Dans ce cas nous avons :

$$(2.31)\quad \begin{cases} f(\lambda_{i_o}) = 0 \quad ; \quad f(\lambda_{i_o}+\ell) \neq 0 \quad ; \quad 0 < \ell < -1-\lambda_{i_o} \;, \; \ell \in \mathbb{N} \\ f(\ell) = 0, \quad f'(\ell) \neq 0 \;, \; 0 \leq \ell \leq m-k-1 \\ f(m-k+\ell) \neq 0 \;, \quad \ell \in \mathbb{N} \;. \end{cases}$$

La démonstration dans ce cas est voisine de celle de (ii). On utilise les relations du Lemme 2.6 pour démontrer le :

<u>Lemme 2.7</u> :

1. $\forall \ell \in \mathbb{N} : 0 < \ell \leq m-k-1-\lambda_{i_o}$, $\exists\, c_{\ell,1}, c_{\ell,2} \in \mathbb{C}$:

$$(2.32)\qquad P_o\{c_{\ell,1} t^{\lambda_{i_o}+\ell} + c_{\ell,2} R(\lambda_{i_o}+\ell,1)\} = t^{\lambda_{i_o}+\ell-m+k}$$

2. $\forall \ell \in \mathbb{N} : \ell > m-k-1-\lambda_{i_o}$, $\exists\, c_\ell \in \mathbb{C}$:

$$(2.33)\qquad P_o\{c_\ell\, t^{\lambda_{i_o}+\ell}\} = t^{\lambda_{i_o}+\ell-m+k}$$

3. $\forall \ell \in \mathbb{N} : \ell > m-k-1-\lambda_{i_o}$, $\exists\, b_{\ell,1}, b_{\ell,2} \in \mathbb{C}$:

$$(2.34)\qquad P_o\{b_{\ell,1} t^{\lambda_{i_o}+\ell} + b_{\ell,2}\, R(\lambda_{i_o}+\ell,1)\} = R(\lambda_{i_o}+\ell-m+k,1) \;.$$

On construit ensuite des distributions u_n de la forme :

(2.35) $$u_n(t,x) = t^{\lambda_{i_o}} \alpha_n(t,x) + \mathrm{Log}|t| \, . \, \beta_n(t,x)$$

telles que :

(2.36) $$\mathcal{P} u_n = t^n a_n(t,x) + t^n(\mathrm{Log}|t|) \; b_n(t,x) \quad .$$

On prend u_o sous la forme

$$u_o(t,x) = \sum_{\ell=1}^{-\lambda_{i_o}-1} c_\ell(x) t^{\lambda_{i_o}+\ell} + \sum_{\ell=-\lambda_{i_o}}^{m-k-1-\lambda_{i_o}} c_\ell(x) \, R(\lambda_{i_o}+\ell, 1)$$

ce qui est possible grâce à (2.32) avec $\mathcal{P}u_o$ de la forme (2.36). On termine ensuite la démonstration comme au cas (ii).
Ceci termine la démonstration du Théorème 1.1.

Remarque : Notre méthode s'applique à des opérateurs plus généraux que ceux définis en (1.1), plus précisément aux opérateurs :

$$\mathcal{P}(x,t,D_x,D_t) = t^k D_t^m + a_{m-1}(x) \, t^{k-1} D_t^{m-1} + \dots + a_{m-k}(x) D_t^{m-k} + \\ + \sum_{p=o}^{m'} \sum_{|\beta| \le m'-p} t^{\alpha(p,\beta)} D_t^p \, a_{p,\beta}(t,x) \, D_x^\beta$$

où k, m, et m' sont des entiers tels que $m' \ge m \ge k > 0$ et $\alpha(p,\beta) = \max(0, k+p-m+1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Cauchy problem with characteristic initial hypersurface (à paraître aux Comm. Pure and Appl. Math.).

[2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Cauchy problem with multiple characteristics in space of regular distributions (à paraître).

[3] J. M. Bony : Axiomatiques de théorie du potentiel, Ann. Institut Fourier, vol. 17 (1967), p. 353-382.

[4] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Springer-Verlag 1964.

[5] Y. Kannaï : Hypoelliptic ordinary differential operators, Israël J. of Math., vol. 13, No 1-2 (1972).

[6] C. Zuily : Hypoellipticité des opérateurs du second ordre à coefficients réels (à paraître).

[7] B. Helffer et C. Zuily : Non-hypoellipticité d'une classe d'opérateurs différentiels, C. R. Acad. Sc. Paris (Nov. 1973).
