J. L. Verdier

Le théorème de Le Potier

Astérisque, tome 17 (1974), p. 68-78
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__17__68_0>

LE THEOREME DE LE POTIER

par J.L. VERDIER

1. Cohomologie des espaces projectifs.

Soient k un corps, E un espace vectoriel sur k de dimension $r+1$, $r \leq 1$. Notons P l'espace projectif construit sur E : le schéma P est le spectre homogène de l'algèbre symétrique de E^* dual de E ou encore P est la grassmanienne des droites de E. Notons Ω^q le faisceau des différentielles de degré q sur P. On a une suite exacte

1.1. $\quad 0 \longrightarrow O(1)\otimes\Omega^1 \longrightarrow J^1(O(1)) \longrightarrow O(1) \longrightarrow 0$

où $J^1(O(1))$ est le faisceau des jets de sections à l'ordre 1 de $O(1)$. La suite exacte 1.1 fournit un élément $c(P) \in \mathrm{Ext}^1(O(1), O(1)\otimes\Omega^1) = H^1(P,\Omega^1)$.

Soient $0 < q \leq n$ deux entiers. Notons

1.2. $\quad \Phi_{q,n}(E) : S^{n-q}(E) \otimes \Lambda^q(E) \longrightarrow S^{n-q+1}(E) \otimes \Lambda^{q-1}(E)$

l'unique application linéaire telle que

1.3. $\quad \Phi_{q,n}(E)(s\otimes e_1\wedge\ldots\wedge e_q) = \sum_{i=1}^{q}(-1)^{i+1}s.e_i\otimes e_1\wedge\ldots\check{e}_i\wedge\ldots\wedge e_q$,

pour tout $s \in S^{n-q}(E)$ et toute suite $e_1,\ldots,e_q$ d'éléments de E. On étend de la manière évidente la définition de $\Phi_{q,n}(E)$ à tous les couples d'entiers n, q en convenant que les puissances extérieures et symétriques négatives sont nulles.

THEOREME 1. -a) <u>On a</u> $H^p(P,\Omega^q) = 0$ <u>pour</u> $p \neq q$. <u>Pour</u> $0 \leq q \leq r$, $H^q(P,\Omega^q)$ <u>est un espace vectoriel de dimension</u> 1 <u>sur</u> k <u>engendré par</u> $c(P)^q$.

b) <u>Pour</u> $n \neq 0$ <u>et</u> $q \leq n+r$, <u>on a</u> $H^p(P,\Omega^q(n)) = 0$ <u>pour</u> $p \neq 0$ <u>et un isomorphisme canonique, commutant aux automorphismes de</u> E :

$$H^0(P,\Omega^q(n)) \simeq \ker\Phi_{q,n}(E^*) .$$

c) <u>Le cup-produit</u> $H^p(P,\Omega^q(n)) \times H^{r-q}(P,\Omega^{r-q}(-n)) \longrightarrow H^r(P,\Omega^r)$ <u>et</u>

<u>l'identification canonique</u> $H^r(P,\Omega^r) \simeq k$ <u>définie par la base</u> $c(P)^r$ <u>fournissent des isomorphismes canoniques</u>

$$H^p(P,\Omega^q(n)) \simeq H^{r-p}(P,\Omega^{r-q}(-n))^* \quad .$$

PROPOSITION 1.- <u>Pour</u> $q \neq 0$ et $n \neq 0$, <u>on a</u> $\ker \Phi_{q,n}(E) = \operatorname{Im} \Phi_{q+1,n}(E)$.

COROLLAIRE.- <u>Posons</u> $h^{o,q}(n) = \dim_k H^o(P,\Omega^q(n))$. <u>Pour</u> $0 \leq q \leq r$ <u>et</u> $q \leq n$, <u>on a</u> $h^{o,q}(n) = \sum_{s=o}^{q} (-1)^{q-s} \binom{r+1}{s}\binom{n-s+r}{r}$. <u>Pour</u> $q \notin [0,r]$ <u>ou bien pour</u> $q > n$ <u>on a</u> $h^{o,q}(n) = 0$.

La démonstration du théorème et de la proposition **est** indiquée au numéro suivant. Le corollaire en résulte par un calcul de caractéristique d'Euler-Poincaré.

2. <u>Faisceaux des jets de sections à l'ordre</u> 1.

Soient X un S-schéma, L un faisceau sur X , localement libre de rang $r+1$. Posons $\Xi = \operatorname{Spec}(\bigoplus_{o}^{\infty} S^n(L))$. Le schéma Ξ est lisse sur X . Notons $\Xi - \{0\}$ l'ouvert complémentaire de la section nulle de Ξ et $\pi : \Xi - \{0\} \longrightarrow X$ la projection.

On a sur $\Xi - \{0\}$ une suite exacte

2.1. $$0 \longrightarrow \pi^*\Omega^1_{X/S} \longrightarrow \Omega^1_{\Xi/S} \longrightarrow \Omega^1_{\Xi/X} \longrightarrow 0 \quad ,$$

et le faisceau $\Omega^1_{\Xi/X}$ s'identifie à π^*L .

Le groupe multiplicatif agit sur $\Xi - \{0\}$ et les termes de 2.1 en y respectant les homomorphismes. Il agit donc sur $R^i\pi_*\Omega^1_{\Xi/S}$ et $R^i\pi_*\mathcal{O}_\Xi$. Les éléments homogènes et de degré n $(n \geq 0)$ de $\pi_*\mathcal{O}_\Xi$ pour cette action sont égaux à $S^n(L)$. Il résulte de la formule de Kunneth et du calcul de la cohomologie des espaces affines privés de l'origine que $R^i\pi_*\mathcal{O}_\Xi = 0$ pour $i \neq 0$ et $i \neq r$ et que $R^r\pi_*\mathcal{O}_\Xi$ ne comporte lorsque $r \neq 0$ que des éléments de degré $\leq -r-1$.

D'après la formule de projection, on a $R^i\pi_*\pi^*\Omega^1_{X/S} \simeq R^i\pi_*\mathcal{O}_\Xi \otimes \Omega^1_{X/S}$ et par suite, pour $n \geq 0$, les éléments homogènes et de degré n de $\pi_*\pi^*\Omega^1_{X/S}$ sont $\Omega^1_{X/S} \otimes S^n(L)$. Le faisceau $R^r\pi_*\pi^*\Omega^1_{X/S}$ ne comporte que des éléments de degré $\leq -r-1$ lorsque $r \neq 0$.

En transportant à π^*L l'action du groupe multiplicatif sur $\Omega^1_{\Xi/X}$, on obtient l'action naturelle de ce groupe déduite de l'action par homothétie sur $\Xi - \{0\}$ et L. Les éléments homogènes et de degré n de $\pi_*\Omega^1_{\Xi/X}$ sont donc $L \otimes S^{n-1}(L)$ pour $n \geq 1$, et le faisceau $R^r\pi_*\Omega^1_{\Xi/X}$ ne comporte que des éléments de degré $\leq -r$ lorsque $r \neq 0$.

En prenant les éléments homogènes et de degré n $(n \geq 1)$ dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_*\pi^*\Omega^1_{X/S} \longrightarrow \pi_*\Omega^1_{\Xi/S} \longrightarrow \pi_*\Omega^1_{\Xi/X} \longrightarrow R^1\pi_*\pi^*\Omega^1_{X/S} \longrightarrow \cdots ,$$

on obtient les suites exactes

2.2. $$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \otimes S^n(L) \longrightarrow \Omega^{1,n}_{\Xi/S\backslash X} \longrightarrow L \otimes S^{n-1}(L) \longrightarrow 0 ,$$

où on a noté $\Omega^{1,n}_{\Xi/S\backslash X}$ le sous-faisceau homogène et de degré n de $\pi_*\Omega^1_{\Xi/S}$. En particulier pour $n = 1$, on a une suite exacte

2.3. $$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \otimes L \xrightarrow{i} \Omega^{1,1}_{\Xi/S\backslash X} \xrightarrow{j} L \longrightarrow 0 .$$

On constate que se donner un scindage de 2.3 revient à se donner un scindage de 2.1 qui varie linéairement en fonction du point considéré dans la fibre $\Xi \longrightarrow X$. Un tel scindage est une <u>connection linéaire</u> sur L. La trivialité de la suite exacte 2.3 et donc la nullité de l'élément $At(L) \in Ext^1(L,\Omega^1_{X/S} \otimes L) = H^1(X,\Omega^1_{X/S} \otimes End(L))$ correspondant, est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une connection linéaire sur L.

On a un opérateur différentiel d'ordre 1

2.4. $$\nabla : L \longrightarrow \Omega^{1,1}_{\Xi/S\backslash X} ,$$

défini comme suit : une section σ de L sur un ouvert U de X définit une section $[\sigma]$ de degré 1 de $\mathcal{O}_\Xi$ sur $\pi^{-1}(U)$ dont la différentielle $d[r]$ est de degré 1 sur $\pi^{-1}(U)$ et est par suite une section sur U de

$\Omega^{1,1}_{\Xi/S\backslash X}$ notée $\nabla(\sigma)$.

Rappelons que le faisceau $J^1_{X/S}(L)$ des jets de sections à l'ordre 1 de L est muni d'un opérateur différentiel d'ordre 1 , $\nabla' : L \longrightarrow J^1_{X/S}(L)$ et que cet opérateur est universel. On a donc un morphisme O_X-linéaire α de faisceaux sur X rendant le diagramme ci-après commutatif

$$\begin{tikzcd} & J^1_{X/S}(L) \arrow[d, "\alpha"] \\ L \arrow[ur, dashed, "\nabla'"] \arrow[dr, dashed, "\nabla"'] & \\ & \Omega^{1,1}_{\Xi/S\backslash X} \end{tikzcd} .$$

Il résulte immédiatement de la définition de ∇ que pour tout ouvert U de X toute section σ de L sur U et toute section λ de O_X sur U, on a

$$2.5. \quad \begin{cases} \nabla(\lambda\sigma) - \lambda\nabla(\sigma) = i(d\lambda \otimes \sigma) \\ j\nabla(\sigma) = \sigma \end{cases} .$$

Il en résulte que α est un isomorphisme permettant d'identifier $\Omega^{1,1}_{\Xi/S\backslash X}$ à $J^1_{X/S}(L)$. Les morphismes i et j ne sont alors autres que les morphismes canoniques.

3. <u>Démonstration du théorème</u> 1.

On reprend les notations du numéro 2. Soit E un fibré de rang r + 1 sur S , r ≥ 1 . Prenons pour X l'espace projectif P de E (spectre homogène de $S^n(E^*)$) , pour L le faisceau inversible $O(1)$. Notons $\rho : P \longrightarrow L$ le morphisme canonique.

PROPOSITION 2.- <u>Il existe un isomorphisme naturel</u>

$$\iota : J^1_{P/S}(O(1)) \simeq \rho^*E^*$$

<u>tel que le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd} J^1_{P/S}(O(1)) \arrow[r, "c'"] \arrow[d, "\iota"', "\iota"] & O(1) \\ \rho^*E^* \arrow[ur, dashed, "c"] & \end{tikzcd}$$

<u>où</u> c <u>et</u> c' <u>sont les surjections canoniques, soit commutatif.</u>

On a $\Xi - \{0\} = \operatorname{spec}\left(\overset{\infty}{\underset{0}{\oplus}} S^n(E^*)\right) - \{0\}$. Par suite $\Omega^1_{\Xi/S} \simeq \pi^*\rho^*E^*$.

Le groupe multiplicatif agit sur l'espace $\Xi - 0$ et sur E^* par homothétie. On a donc

$$\Omega^{1,n}_{\Xi/S\backslash P} \simeq \rho^*E^*(n-1) \quad .$$

La proposition résulte alors de l'identification faite au numéro 2.

COROLLAIRE 1.- <u>Notons</u> $\varphi_q : \rho^*\Lambda^q E^*(-q) \longrightarrow \rho^*\Lambda^{q-1}E^*(-q+1)$ <u>le</u> q-ème <u>homomorphisme du complexe de Koszul construit sur</u> $c(-1) : E^*(-1) \longrightarrow O_P$, <u>de sorte qu'on a un complexe</u>

3.1. $$0 \longrightarrow \rho^*\Lambda^{r+1}E^*(-r-1) \xrightarrow{\varphi_{r+1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} \rho^*E^*(-1) \xrightarrow{c(-1)} O_P \longrightarrow 0 \quad .$$

<u>Le complexe</u> 3.1 <u>est acyclique. Pour tout</u> q , <u>on a</u>

3.2. $$\Omega^q_{P/S} \simeq \ker \varphi_q \quad .$$

La suite exacte 2.3 s'écrit, compte tenu des identifications faites au numéro 2 et à la proposition 2 ,

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{P/S}(1) \xrightarrow{i} \rho^*E^* \xrightarrow{c} O(1) \longrightarrow 0 \quad ,$$

ce qui donne, en tensorisant par $O(-1)$, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{P/S} \xrightarrow{i(-1)} \rho^*E^*(-1) \xrightarrow{c(-1)} O_P \longrightarrow 0 \quad .$$

Comme $c(-1)$ est surjectif, le complexe de Koszul construit sur $c(-1)$ est acyclique et $\Lambda^q i(-q) : \Omega^q_{P/S} \longrightarrow \rho^*\Lambda^q E^*(-q)$ est un isomorphisme sur $\ker\varphi_q$.

COROLLAIRE 2.- <u>Pour tout</u> q <u>et tout entier</u> n , <u>on a une suite exacte</u>

3.3. $$0 \longrightarrow \Omega^q_{P/S} \xrightarrow{\Lambda i(-q)} \rho^*\Lambda^q E^*(n-q) \xrightarrow{c_q} \Omega^{q-1}_{P/S} \longrightarrow 0 \quad .$$

<u>On a</u>

3.4. $$\Lambda^{q-1} i(-q+1)\, c_q = \varphi_q \quad .$$

Résulte immédiatement du corollaire 1 .

Montrons comment ces résultats permettent de démontrer le théorème 1.

Supposons S affine. On a alors $H^{o}(P,\rho^{*}\Lambda^{q}E^{*}(n-q)) = H^{o}(S,\Lambda^{q}E^{*}\otimes S^{n-q}(E^{*}))$, $H^{p}(P,\rho^{*}\Lambda^{q}E^{*}(n-q)) = 0$ si $p\neq 0$ et $p\neq r$, $H^{r}(P,\rho^{*}\Lambda^{q}E^{*}(n-q)) = 0$ si $q\leq n+r$, d'après la formule de projection et le calcul de la cohomologie des $O(n-q)$. On vérifie de plus que $H^{o}(S,\varphi_{q}(n)) = \Phi_{q,n}(E^{*})$ (1.3). Les corollaires 1 et 2 à la proposition 2 permettent alors de démontrer les assertions a) et b) du théorème 1, par récurrence sur q , en écrivant les suites exactes de cohomologie associées aux suites exactes 3.3. La proposition 1 résulte de la proposition 2 et l'assertion c) du théorème 1 résulte du théorème de dualité de Serre que nous ne démontrons pas ici.

4. Cohomologie relative des fibrés projectifs.

Soient X un espace $\underline{\underline{C}}$-analytique, E un fibré holomorphe de rang $r+1$, $r\geq 1$. Notons $P(E)$ ou encore P la grassmanienne des droites de E et $\rho : P\longrightarrow X$ le morphisme canonique.

THEOREME 2.- a) <u>Pour tout entier</u> q <u>on a des isomorphismes canoniques</u>

$$R^{q}\rho_{*}\Omega^{q}_{P}\simeq\Omega^{q-p}_{X}\qquad \underline{\text{pour}}\quad 0\leq p\leq r$$

<u>et on a</u> $R^{p}\rho_{*}\Omega^{q}_{P} = 0$ <u>pour</u> $p>r$.

b) <u>Pour</u> $\inf(q,r)\leq n+r$ <u>et</u> $n\neq 0$, <u>on a</u> $R^{p}\rho_{*}\Omega^{q}_{P}(n) = 0$ <u>pour</u> $p\neq 0$.

c) <u>Pour</u> $\inf(q,r)\geq n$ <u>et</u> $n\neq 0$, <u>on a</u> $R^{p}\rho_{*}\Omega^{q}_{P}(n) = 0$ <u>pour</u> $p\neq r$.

Lorsque X est réduit à un point, le théorème 2 résulte du théorème 1 et du théorème de comparaison entre cohomologie algébrique et analytique. Notons $\Omega^{q}_{P/X}$ le faisceau des différentielles relatives de degré q sur P . Il résulte du théorème de Künneth et de ce qui précède que $R^{p}\rho_{*}\Omega^{q}_{P/X} = 0$ si $p\neq q$ et qu'on a des isomorphismes canoniques $R^{q}\rho_{*}\Omega^{q}_{P/X}\simeq O_{X}$. On a de même $R^{p}\rho_{*}\Omega^{q}_{P/X}(n) = 0$ si $p\neq 0$, $n\neq 0$, $q\leq n+r$ et $R^{p}\rho_{*}\Omega^{q}_{P/X}(n) = 0$ pour $p\neq r$, $n\neq 0$, $n\leq q$. De la suite exacte

$$0\longrightarrow\rho^{*}\Omega^{1}_{X}\longrightarrow\Omega^{1}_{P}\longrightarrow\Omega^{1}_{P/X}\longrightarrow 0 ,$$

on déduit pour tout entier q , une filtration $\mathrm{Filt}^s\Omega_P^q$, $0 \leq s \leq \inf(q,r)$, de Ω_P^q et des suites exactes

4.1. $$0 \longrightarrow \mathrm{Filt}^{s-1}\Omega_P^q \longrightarrow \mathrm{Filt}^s\Omega_P^q \longrightarrow \rho^*\Omega_X^{q-s} \otimes \Omega_{P/X}^s \longrightarrow 0 .$$

D'après la formule de projection, on a $R^p\rho_*(\rho^*\Omega_X^{q-s} \otimes \Omega_{P/X}^s(n))$, $\Omega_X^{q-s} \otimes R^p\rho_*\Omega_{P/X}^s(n)$. On obtient alors le théorème en déroulant les longues suites exactes d'images directes déduites des suites exactes 4.1. En utilisant de plus les descriptions des H^o et H^r données dans le théorème 1, b) et c) on obtient

THEOREME 3.- a) <u>Lorsque</u> $n < 0$, <u>on a</u> $\rho_*\Omega_P^q(n) = 0$. <u>Lorsque</u> $n > 0$, $\rho_*\Omega_P^q(n)$ <u>admet une filtration</u> $\mathrm{Filt}^s\rho_*\Omega_P^q(n)$, $0 \leq s \leq \inf(q,r,n)$ <u>et on a des suites exactes</u> (cf. 1.2)

4.2. $$0 \longrightarrow \mathrm{Filt}^{s-1}\rho_*\Omega_P^q(n) \longrightarrow \mathrm{Filt}^s\Omega_P^q(n) \longrightarrow \Omega_X^{q-s} \otimes \ker \Phi_{s,n}(E^*) \longrightarrow 0$$

b) <u>Pour</u> $n > 0$, $R^r\rho_*\Omega_P^q(n) = 0$. <u>Pour</u> $n < 0$, $R^r\rho_*\Omega_P^q(n)$ <u>admet une filtration</u> $\mathrm{Filt}^sR^r\rho_*\Omega_P^q(n)$, $n + r < s \leq \inf(q,r)$ <u>et on a des suites exactes</u>

4.3. $$0 \longrightarrow \mathrm{Filt}^{s-1}R^r\rho_*\Omega_P^q(n) \longrightarrow \mathrm{Filt}^sR^r\rho_*\Omega_P^q(n) \longrightarrow \Omega_X^{q-s} \otimes (\ker \Phi_{r-s,n}(E^*))^* - 0$$

Lorsque X est lisse, le théorème de dualité relative fournit un isomorphisme canonique

$$R^p\rho_*\Omega_P^q(n) \simeq (R^{r-p}\rho_*\Omega_P^{\dim P - q}(-n))^* \otimes \Omega_X^{\dim X}$$

COROLLAIRE 1.- <u>On a</u> $R^p\rho_*\Omega^q(1) = 0$ <u>pour</u> $p \neq 0$. <u>Le morphisme canonique</u> $\Omega_X^q \otimes E^* \longrightarrow \rho_*\Omega_P^q(1)$ <u>est un isomorphisme</u>.

Résulte du théorème 2 et du théorème 3 a), compte tenu de ce que $\ker \Phi_{n,n}(E^*) = 0$.

COROLLAIRE 2.- <u>Le morphisme canonique</u> $H^p(X,\Omega_X^q \otimes E^*) \longrightarrow H^p(P,\Omega_P^q(1))$ <u>est un isomorphisme pour tout</u> p <u>et tout</u> q .

En effet la suite spectrale de Leray dégénere en vertu du corollaire 1.

THEOREME 4 (Le Potier).- Soient X une variété $\underline{\underline{C}}$-analytique compacte, E un fibré holomorphe de rang >0 sur X tel que le faisceau $O(1)$ sur $P(E^*)$ soit ample (ou positif ce qui revient au même pour les fibrés de rang 1). On a $H^p(X,\Omega_X^q \otimes E) = 0$ pour $p+q \geq \dim X + \mathrm{rg} E$.

Résulte du théorème 3, cor. 2 et du théorème de Kodaira Nakano (exp.5).

Nous verrons au numéro suivant que les fibrés positifs (exp. 5) de rang >0 satisfont aux hypothèses du théorème 4.

5. Fibrés positifs.

Soient X une variété $\underline{\underline{C}}$-analytique et $E \longrightarrow X$ un fibré holomorphe muni d'une forme hermitienne Φ (de classe C^∞). A (E,Φ) on associe une connexion $\nabla : E_\infty \longrightarrow \Omega^1_{X;\infty} \otimes E_\infty$ (exp. 5). Le morphisme C^∞-linéaire $\nabla^2 : E_\infty \longrightarrow \Omega^2_{X,\infty} \otimes E_\infty$ est une section $c_{E,\Phi}$ de $\Omega^2_{X,\infty} \otimes \mathrm{End}(E)_\infty$. Posons $\mathrm{cl}(E,\Phi) = 1/2i\pi\, c_{E,\Phi}$. On sait (loc. cit.) que $\mathrm{cl}(E,\Phi)$ est une section du sous-fibré réel $\Omega^{1,1}_{X,\underline{\underline{R}}} \otimes \mathrm{Herm}(E)$. On dit que (E,Φ) est <u>positif</u> si pour tout vecteur tangent $t \neq 0$ en tout point de X, $\mathrm{cl}(E,\Phi)(it \wedge t)$ est un opérateur hermitien positif inversible. On dit que E est positif s'il possède une structure hermitienne telle que (E,Φ) soit positif.

Il résulte immédiatement des définitions que (E,Φ) est positif si et seulement si pour tout point $x \in X$, toute section s de E définie au voisinage de x et non nulle en x, tout vecteur tangent $t \neq 0$ en x on a

5.1. $\quad i\Phi(\nabla^2 s, s)(t \wedge it) > 0$.

En fait, comme ∇^2 est C^∞-linéaire, il suffit, pour vérifier la positivité, de vérifier 5.1 en tout point x, pour une famille de sections s telles que les $s(x)$ parcourent l'espace $E(x) - \{0\}$.

THEOREME 5.- Soient X une variété $\mathbb{C}$-analytique, (E,Φ) un fibré holomorphe sur X muni d'une forme hermitienne, (E^*,Φ^*) le fibré dual muni de la forme duale. Le fibré (E^*,Φ^*) est positif si et seulement si la fonction $y \longmapsto \Phi(y,y)$ définie sur E est fortement plurisous-harmonique sur $E - \{0\}$ (exp. 4).

Pour toute section s de E notons s^* la section de E^* telle que $\Phi^*(\sigma,s^*) = \sigma(s)$ pour toute section σ de E^*. Si s est holomorphe on a $\nabla' s^* = 0$. En effet, pour toute section holomorphe σ de E^*, la fonction $\sigma(s)$ est holomorphe et par suite $0 = d''\sigma(s) = d''\Phi^*(\sigma,s^*) = \Phi^*(\sigma, \nabla' s^*)$.

Soient $x_o \in X$, $e_o,\ldots,e_r$ un repère holomorphe de E au voisinage de x_o. On a donc au-dessus d'un voisinage U de x_o, une carte $U \times \mathbb{C}^{r+1}$ E donnée par

5.2. $\quad (x,a_o,\ldots,a_r) \longmapsto y = \Sigma a_j e_j(x)$.

Soit $y_o = \Sigma b_j e_j(x_o)$ un point de $E - \{0\}$ au-dessus de x_o et posons

5.3. $\quad s(x) = \Sigma b_j e_j(x)$,

de sorte que $x \longmapsto s(x)$ est une section holomorphe de E sur U non nulle en x_o. Soient $t \neq 0$ un vecteur tangent en y_o à E et t' l'image de t dans l'espace tangent à X en x_o.

LEMME 1.- On a

5.4. $$id'd''\Phi(t\wedge it) = 2\Phi(\Sigma da_j(t)e_j , \Sigma da_j(t)e_j) + 2\Phi^*(\nabla'' s^*(t'), \nabla'' s^*(t')) + i\Phi^*(\nabla^2 s^*, s^*)(t'\wedge it') .$$

On a tout d'abord

5.5. $$\Phi(y,y) = \sum_{j,k} a_j \bar{a}_k \Phi(e_j,e_k) ,$$

de sorte que

5.6. $$\begin{cases} id'd''\Phi(t\wedge it) = i\sum_{j,k} da_j \wedge d\bar{a}_k(t\wedge it)\Phi(e_j,e_k) + A , \\ \text{avec } A = id'_x d''_x \Phi(s,s)(t'\wedge it') . \end{cases}$$

Un calcul immédiat donne

5.7. $\quad i\,da_i \wedge d\bar{a}_k(t \wedge it) = 2\,da_i(t)\overline{da_k(t)}$.

Calculons A . Par définition $\Phi(s,s) = \Phi^*(s^*,s^*)$ compte tenu de $\nabla' s^* = 0$, il vient $d'_x d''_x \Phi(s,s) = \Phi^*(\nabla'\nabla'' s^*, s^*) - \Phi^*(\nabla'' s^*, \nabla'' s^*)$. Utilisant encore $\nabla' s^* = 0$, on obtient $\Phi^*(\nabla''^2 s^*, s^*) = d''^2 \Phi^*(s^*,s^*) = 0$ d'où, en utilisant à nouveau $\nabla' s^* = 0$, on tire

5.8. $\quad d'_x d''_x \Phi(s,s) = \Phi^*(\nabla^2 s^*, s^*) - \Phi^*(\nabla'' s^*, \nabla'' s^*)$.

Un calcul immédiat donne $-\,i\Phi^*(\nabla'' s^*, \nabla'' s^*)(t' \wedge it') = x$, $2\Phi^*(\nabla'' s^*, \nabla'' s^*)$ d'où

5.9. $\quad A = i\Phi^*(\nabla^2 s^*, s^*)(t' \wedge it') + 2\,\Phi^*(\nabla'' s^*(t), \nabla'' s^*(t))$.

L'égalité 5.4 résulte alors de 5.6, 5.7 et 5.9.

Supposons que (E^*, Φ^*) soit positif. Si $t' \neq 0$, il résulte de 5.1 et du lemme 1 que $id'd''\Phi\,(t \wedge it) > 0$. Si $t' = 0$, le vecteur t est vertical et par suite $\Sigma\, da_j(t) e_j \neq 0$, donc $id'd''\Phi(t,it) > 0$. Par suite $y \longmapsto \Phi(y,y)$ est *fortement plurisous-harmonique* sur $E - \{0\}$.

Supposons que $y \longmapsto \Phi(y,y)$ soit fortement plurisous-harmonique sur $E - \{0\}$. On déduit alors du lemme 1 que pour toute section s de E définie au voisinage de x_o , holomorphe et non nulle en x_o et pour tout vecteur tangent $t' \neq 0$ en x à X , on a

5.10. $\quad 2\,\Phi^*(\nabla'' s^*(t'), \nabla'' s^*(t')) + i\Phi^*(\nabla^2 s^*, s^*)(t' \wedge it') > 0$.

Comme ∇^2 est C^∞-linéaire, le théorème 5 résulte du lemme suivant :

LEMME 2.- <u>Pour tout</u> $v \in E^*(x_o)$, <u>il existe une section holomorphe</u> s <u>de</u> E <u>au voisinage de</u> x_o <u>telle que</u> $s^*(x_o) = v$ <u>et</u> $\nabla''_{x_o} s^* = 0$.

Soient $e_o, \ldots, e_r$ un repère holomorphe de E au voisinage de x_o . Cherchons une section du type $s(x) = \Sigma\, a_j(x) e_j$. Comme s doit être holomorphe, les a_j doivent être holomorphes. La première condition détermine uniquement les $a_j(x_o)$. On a $s^*(x) = \Sigma\, \overline{a_j(x)} e^*_j$ et $\nabla'' s^* = \Sigma d\bar{a}_j e^*_j + \Sigma\, \bar{a}_j\, \nabla'' e^*_j$. La seconde condition sur s est donc équivalente à

5.11. $$\Sigma\, \overline{d_{x_o} a_j}\, e^*_j(x_o) + \Sigma\, \overline{a_i(x_o)}\, \nabla''_{x_o} e^*_j = 0 \quad .$$

Comme les $e^*_j(x_o)$ sont linéairement indépendants, 5.11 détermine uniquement les formes $\underline{\underline{C}}$-linéaires $d_{x_o} a_j$ d'où l'existence de la section s.

Notons :

$P(E)$ la grassmanienne des droites de E et

$\rho : P(E) \longrightarrow X$ le morphisme canonique, $O(1)$ le quotient canonique de $\rho^*(E^*)$, Φ^*_1 la forme hermitienne sur $O(1)$ quotient de $\rho^*(\Phi^*)$.

COROLLAIRE 1.- *Si* (E^*,Φ^*) *est positif,* $(O(1),\Phi^*_1)$ *est positif.*

Notons L le dual de $O(1)$ et Φ_1 la forme hermitienne dual de Φ^*_1. L'espace $L - \{0\}$ s'identifie à $E - \{0\}$ et la fonction $y \longmapsto \Phi_1(y,y)$ est alors égale à la fonction $y \longrightarrow \Phi(y,y)$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2.- *Soit* (E,Φ) *un fibré holomorphe positif. Tout fibré quotient de* E *muni de la forme hermitienne quotient de* E *est positif.*

Conséquence immédiate du théorème.