

Astérisque

GABRIEL RUGET

Déformations des germes d'espace analytique I

Astérisque, tome 16 (1974), p. 63-81

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__63_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__63_0)

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEFORMATIONS DES GERMES D'ESPACE ANALYTIQUE I.

par Gabriel RUGET

Les exposés qui suivent, étudient les déformations des espaces analytiques complexes. On exposera d'abord le théorème abstrait de pro-représentabilité de Schlessinger [1] et on montrera qu'il permet de construire une déformation "verselle" pour les déformations (plates) de base un point (avec nilpotents) d'un germe d'espace analytique à singularité isolée, ou d'un espace analytique compact. Puis, dans le cas d'un germe, on fera converger la construction de la déformation verselle, et on montrera enfin que le résultat est versel parmi les déformations de base un germe d'espace analytique.

Voici maintenant un exposé préparatoire où l'on définit précisément les déformations à étudier, et où l'on donne certaines constructions (sommes amalgamées) et interprétations (objets cotangents relatifs) indispensables, le tout dans le cas des germes ; c'est dire qu'il ne sera plus question d'espaces, mais d'Algèbres analytiques : Soit A une $\underline{\underline{C}}$ -algèbre artinienne locale, de corps résiduel $\underline{\underline{C}}$ (A est noéthérienne, donc, si $\mathfrak{m}$ désigne son idéal maximal, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un $\underline{\underline{C}}$ -espace de dimension finie ; $\mathfrak{m}$ est par ailleurs nilpotent ; A apparaît donc comme quotient d'un anneau de développements limités $\underline{\underline{C}}[[X_1, \dots, X_n]]/(\underline{\underline{C}}[X_1, \dots, X_n])^k$, c'est-à-dire comme l'anneau d'un espace analytique complexe dont le réduit est le point - et réciproquement). On appellera A -algèbre analytique toute algèbre B susceptible d'être écrite comme quotient d'une algèbre de séries convergentes à coefficients dans A . Il revient au même que B soit une $\underline{\underline{C}}$ -algèbre analytique, et, de plus, une A -algèbre ; c'est-à-dire que B "est" un germe d'espace, muni d'un morphisme dans le

"jet" d'espace. Nos algèbres analytiques sont locales ; nous appellerons éventuellement algèbre analytique semi-locale tout produit fini d'algèbres analytiques (locales).

Déformations : Soit $A' \longrightarrow A$ un changement de base (il est désormais entendu que toutes les bases sont des $\underline{C}$ -algèbres artiniennes locales, de corps résiduel $\underline{C}$). Supposons que B soit plate sur A . Nous dirons que $A' \longrightarrow B' \longrightarrow B$ est une déformation de $A \longrightarrow B$ ($\ll B$ sur $A \gg$) à A' si

1°) B' est plate sur A' .

2°) $B' \longrightarrow B$ induit un isomorphisme $B' \otimes_{A'} A \xrightarrow{\sim} B$.

D'après [1] (chap. III, § 5, n° 2), la première condition est équivalente à la nullité du $\text{Tor}_1^{A'}(B', A)$.

Ce qu'on appelle déformations isomorphes est clair ; on note $\text{Def}(B/A, A')$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations de B/A à A' . En particulier, si X est une $\underline{C}$ -algèbre analytique donnée une fois pour toutes, on abrègera $\text{Def}(X/\underline{C}, A)$ en $D(A)$.

Si $A'' \longrightarrow A'$ est un changement de base consécutif à $A' \longrightarrow A$, le produit tensoriel $\otimes_{A''} A'$ fournit une opération restriction de $\text{Def}(B/A, A'')$ dans $\text{Def}(B/A, A')$.

$0_X/\underline{C}$ étant donné, voici les propriétés de $D(A)$ que nous convoitons :

1°) Si $A' \longrightarrow A$ et $A'' \longrightarrow A$ sont deux changements de base, le second surjectif, alors l'application naturelle de $D(A' \times_A A'')$ dans $D(A') \times_{D(A)} D(A'')$ est surjective.

2°) Si de plus $A = \underline{C}$, la même est bijective.

3°) D (nombres duaux), qui est naturellement un $\underline{C}$ -espace vectoriel, est de dimension finie.

Pour vérifier 3°), nous devons supposer que le germe associé à X a une singularité isolée.

§ 1. Extensions.

Soient B une A -algèbre analytique, et M un B -module de type fini. On appelle extension de B/A par M toute suite exacte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mu} E \xrightarrow{\epsilon} B \longrightarrow 0 ,$$

où E est une A -algèbre analytique, ϵ un morphisme de A -algèbres dont le noyau est un idéal de carré nul, donc muni d'une structure de B -module, et où μ est un isomorphisme de M sur $\ker \epsilon$ comme B -modules. Deux extensions de B/A par M sont dites isomorphes si on peut les placer dans un diagramme commutatif comme ceci :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

On note $\text{Ex}(B/A, M)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme. L'extension la plus simple est construite sur le modèle des nombres duaux : on la note

$D_B(M)$; c'est le groupe $B \oplus M$ muni de la multiplication $(b, m)(b', m') = (bb', bm' + b'm)$ qui est même une B -algèbre analytique : si M est engendré sur B par

$m_1, \dots, m_n$, $D_B(M)$ est un quotient de $B[[\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]] / (\epsilon_i \epsilon_j)$. Cette extension est l'élément nul d'une structure de B -module sur $\text{Ex}(B/A, M)$, pour la définition de laquelle seule pose un petit problème l'addition : soient E et E' les extensions à ajouter ; on ne peut pas s'empêcher d'écrire

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M \oplus M & \xrightarrow{\mu \oplus \mu'} & E \oplus E' & \xrightarrow{\varepsilon \oplus \varepsilon} & B \oplus B \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \text{addition} & \searrow & \uparrow & & \uparrow \text{diagonale} \\
 & & & & E \times_B E' & & \\
 & & & & \downarrow & \searrow & \\
 M & \longrightarrow & S & \longrightarrow & B & &
 \end{array}$$

où S est la somme amalgamée de $E \times_B E'$ et de M' , c'est-à-dire un quotient de $D_{E \times_B E'}(M)$. Mais $E \times_B E'$ est-elle une algèbre analytique ? Cela résulte immédiatement de la

PROPOSITION 1. — Soient $\mathcal{B}$ une algèbre analytique, et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{B}$ fermée pour la topologie limite de Fréchet usuelle, telle que $\mathcal{B}$ soit de type fini comme $\mathcal{A}$ -module. Alors, $\mathcal{A}$ est une algèbre analytique.

Cette proposition est démontrée dans [2] dans le cas où $\mathcal{B}$ est locale, et se généralise facilement au cas semi-local. Ici, $E \oplus E'$ est engendrée sur $E \times_B E'$ par $(1,0)$ et $(0,1)$.

Voici une traduction de $\text{Ex}(B/A, M)$ qui redonnera l'analyticité de $E \times_B E'$. Plongeons l'espace associé à B dans un lisse sur A , c'est-à-dire écrivons $B = P/I$, où P est une algèbre de séries convergentes à coefficients dans A . Nous allons décrire une suite exacte

$$(*) \quad \text{Der}_A(P, M) \longrightarrow \text{Hom}_B(I/I^2, M) \xrightarrow{h} \text{Ex}(B/A, M) \longrightarrow 0.$$

La première flèche est claire. Soit maintenant $v \in \text{Hom}_B(I/I^2, M)$; on lui associe l'extension $h(v)$ écrite à la deuxième ligne du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & I/I^2 & \longrightarrow & P/I^2 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow v & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & S & \longrightarrow & B \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où S est la somme amalgamée de P/I^2 et M , c'est-à-dire un quotient de $D_{P/I^2}(M)$, donc une algèbre analytique.

Partons réciproquement d'une extension E

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & u & & & & \\ & & \swarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

On peut relever $P \longrightarrow B$ en un homomorphisme de A -algèbres $u : P \longrightarrow E$, qui envoie I dans M , donc I^2 dans 0 , d'où un homomorphisme B -linéaire de I/I^2 dans M , soit v ; il est clair que $h(v)$ n'est autre que E .

(Nous voyons maintenant pourquoi $E \times_B E'$, ou $E + E'$, sont des algèbres analytiques : nous les avons fait apparaître comme quotients de $D_{P/I^2}(M \oplus M)$, ou $D_{P/I^2}(M)$ respectivement).

Si enfin, E étant donnée, on change le relèvement u de $P \longrightarrow B$ en u' , la différence $u - u'$ est une application A -linéaire de P dans M , qui vérifie

$$(u - u')(xy) = u(x)(u - u')(y) + u'(y)(u - u')(x);$$

c'est bien une dérivation.

§ 2. Extensions et déformations.

On va interpréter les déformations à l'aide d'extensions dans le cas d'un petit épaississement de la base, c'est-à-dire le cas où $A' \longrightarrow A$ est surjectif et a un noyau J de carré nul.

1er cas.

$A' = D_A(J)$. Il y a une bijection naturelle $\text{Def}(B/A, A') \longleftrightarrow \text{Ex}(B/A, J \otimes_A B)$

III-06

Partons de $B' \in \text{Def}(B/A, A')$; B' est une A -algèbre via A' .

Tensorisons $0 \rightarrow J \rightarrow A' \rightarrow A \hookrightarrow 0$ par B' au-dessus de A' , nous trouvons

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Tor}_1^{A'}(A, B') & \longrightarrow & J \otimes_{A'} B' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & A \otimes_{A'} B' \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \cong & & \parallel & & \downarrow \cong \\ \text{soit} & & & & 0 & \longrightarrow & J \otimes_A B & \longrightarrow & B' \longrightarrow B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Partons réciproquement d'une extension

$$0 \rightarrow J \otimes_A B \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0 .$$

Faisons du A -module E un $D_A(J)$ -module en envoyant J dans E par $\lambda(\cdot \otimes 1)$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Tor}_1^{A'}(A, E) & \longrightarrow & J \otimes_{A'} E & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A \otimes_{A'} E \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \pi \\ & & & & 0 & \longrightarrow & J \otimes_A B & \xrightarrow{\lambda} & E \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0 \end{array}$$

commute, puisque $\lambda(j \otimes \pi(e)) = \lambda(j \otimes 1)e = je$. Pour voir que $A' \rightarrow E$ est une déformation de $A \rightarrow B$, il suffit de vérifier que π rend isomorphes $J \otimes_{A'} E$ et $J \otimes_A B$, ce qui se fait en construisant un inverse à cette flèche : on prend $j \otimes \pi(e) \mapsto j \otimes e$
 $(\pi(e) = 0 \text{ entraîne } e = \lambda(\sum j' \otimes b) = \lambda(\sum j' \otimes \pi(e')) = \sum j'e' , \text{ donc } j \otimes e = \sum jj' \otimes e' = 0)$.

Les deux correspondances construites sont bien sûr réciproques l'une de l'autre.

2eme cas.

$A' \not\in D_A(J)$. Montrons qu'alors $\text{Def}(B/A, A')$ est seulement un torseur

sous $\text{Ex}(B/A, J \otimes_A B)$.

L'interprétation (*) des déformations permet de construire facilement et naturellement une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Ex}(B/A, J \otimes_A B) &\longrightarrow \text{Ex}(B/A', J \otimes_{A'} B) \longrightarrow \text{Ex}(A/A', J \otimes_A B) \\ &\searrow \varphi \qquad \qquad \qquad = \text{Hom}_A(J, J \otimes_A B) \\ &\qquad \qquad \qquad = \text{Hom}_B(J \otimes_A B, J \otimes_A B) \end{aligned}$$

Si $0 \longrightarrow J \otimes_A B \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$ est une extension de B sur A' par $J \otimes_A B$, on vérifie facilement que $\varphi(E)$ est le composé de $B : J \otimes_A B \rightarrow JE$ qui à $j \otimes \pi(e)$, associe je et de l'injection c de JE dans $J \otimes_A B$ (via λ^{-1}) .

A une déformation B' de B/A à A' , on associe

$$0 \longrightarrow J \otimes_A B \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow 0 ,$$

qui n'est plus ici qu'une extension sur A' . Ceci est une injection ι de $\text{Def}(B/A, A')$ dans $\text{Ex}(B/A, J \otimes_A B)$, et l'assertion préliminaire résulte du

LEMME 1.- L'image de ι est exactement $\varphi^{-1}(1)$.

Si E provient d'une déformation et si t désigne la multiplication $J \otimes_A E \rightarrow JE$, on a $t = bs$, $s = ct$, où s est l'isomorphisme $J \otimes_A E \xrightarrow{\sim} J \otimes_A B$. Alors, t est injectif, donc bijectif, et $\varphi(E) = cb = 1$.

Réciproquement, si $cb = 1$, c et b sont bijectifs ; alors, $E \otimes_A A \rightarrow B$ est un isomorphisme ; $J \otimes_A E \rightarrow JE$ en est un autre, donc $\text{Tor}_1^{A'}(A, E)$ est nul, et E est une déformation.

§ 3. Retour au foncteur $D(A)$.

1°) Existence de sommes amalgamées.— Soient B une A -algèbre analytique, $A' \rightarrow A$ et $A'' \rightarrow A$ deux changements de base, le second supposé surjectif, B' et B'' des déformations de B jusqu'à A' et A'' respectivement. Nous désirons montrer, que $B' \times_B B''$ est une déformation de B jusqu'à $A' \times_A A''$ se restreignant en B' et B'' , ce qui entraînera la propriété de la surjectivité énoncée dans l'introduction. Pour voir que $B' \times_B B$ est une algèbre analytique, on peut utiliser la proposition 1, puisque $B'' \rightarrow B$, donc $B' \times_B B'' \rightarrow B'$ sont surjectifs et que B est de type fini sur B' , et par suite B'' est de type fini sur $B' \times_B B''$. On pourrait aussi se ramener au cas où $A'' \rightarrow A$ a pour noyau un idéal J de carré nul, et utiliser la platitude de B'' sur A'' : on se donnerait un plongement de B' dans un lisse sur A' , d'où $B' = A' \times_A A'' \{ \dots \} / I'$, $B = A'' \{ \dots \} / I$ et un morphisme de I' dans I ; B'' provient d'un $\beta \in \text{Hom}_B(I/I'^2, J \otimes_A B)$, d'où

$$\beta \in \text{Hom}_B(I'/I'^2, J \otimes_A B') , \text{ et } \beta' \text{ donne précisément naissance à } B' \times_B B'' .$$

Utilisant à la fois la platitude de B' sur A' , celle de B'' sur A'' (et la surjectivité de $A'' \rightarrow A$), la platitude de $B' \times_B B''$ sur $A' \times_A A''$ et les isomorphismes relatifs aux restrictions se vérifient facilement grâce au

LEMME 2.— Tout module plat sur un anneau local artinien est libre.

lequel résulte immédiatement du

LEMME 3.— Soient A un anneau, J un idéal nilpotent de A , et $u : M \rightarrow N$ un homomorphisme de A -modules, où N est plat sur A . Si $\bar{u} : M/JM \rightarrow N/JN$ est un isomorphisme, alors u est un isomorphisme.

2°) Dans le cas particulier où $A = \underline{\mathbb{C}}$, on veut voir que toute déformation β de B à $A' \times_{\underline{\mathbb{C}}} A''$ induisant sur A' et A'' des déformations isomorphes à B' et B'' , est-elle même isomorphe à $B' \times_{O_x} B''$. L'hypothèse $A = \underline{\mathbb{C}}$ entraîne l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & B' & \\ \beta \nearrow & & \searrow \\ & B'' & \nearrow \\ & O_x & \end{array}$$

(un B/A pourrait avoir des automorphismes), donc d'un homomorphisme $u : \beta \rightarrow B' \times_B B''$ auquel on applique le lemme 3.

3°) Finitude de D .- Les paragraphes 1 et 2 conjugués interprètent $D(\underline{\mathbb{C}}[s])$ comme $\text{Hom}_{O_x}(I/I^2, O_x) / \text{Der}_{\underline{\mathbb{C}}}(P, O_x)$, où $O_x = P/I$, P étant une algèbre de séries convergentes (à coefficients complexes). Redisons cela géométriquement : soit X le germe d'espace analytique d'anneau O_x et $i : X \hookrightarrow Y$ un plongement dans un lisse, d'anneau $O_y = P$. L'application $f \leftarrow df$ induit un O_x homomorphisme de I/I^2 dans $\Omega_y \otimes_{O_y} O_x$. Nous dirons que

$$0 \rightarrow I/I^2 \rightarrow \Omega_y \otimes_{O_y} O_x \rightarrow 0$$

est le micro complexe cotangent à X ; ce complexe $\mathcal{L}'$ est indépendant du plongement choisi, à quasi isomorphisme près (précisons que $\Omega_y \otimes_{O_y} O_x$ est placé en degré 0). On reconnaît que le groupe d'homologie T_0 est Ω_X , et que T_1 s'annule en un point régulier. Considérons le complexe dual de (complexe de groupes, ou complexe de faisceaux)

$$0 \leftarrow \text{Hom}_{O_x}(I/I^2, O_x) \leftarrow \text{Hom}_{O_x}(\Omega_y \otimes_{O_y} O_x, O_x) \leftarrow 0,$$

c'est-à-dire

III-10

$$0 \longrightarrow N_{X/Y} \longrightarrow i^* \theta_Y \longrightarrow 0$$

où θ_Y est le tangent à Y et $N_{X/Y}$ le normal à X dans Y . Ainsi, $D(\underline{C}[\underline{s}])$ s'interprète comme la fibre du faisceau de cohomologie T' de ce nouveau complexe. Puisque $i^* \Omega_Y$ est libre, T^1 n'est autre que $R^1 \text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ et il est coïncé dans un bout de suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(T_0, \mathcal{O}_X) \longrightarrow T^1 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(T_1, \mathcal{O}_X) \quad .$$

Si X est réduit, T_1 étant concentré aux points singuliers de X , le dernier terme s'annule ; alors T' est isomorphe à $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$. Si de plus, X est à singularité isolée, ce faisceau cohérent sur X est supporté par l'origine du germe, et sa fibre est un espace vectoriel de dimension finie,

§ 4. Singularités rigides.

LEMME 1.- Soit $O_X/\underline{C}$ l'anneau d'un germe d'espace analytique, dont nous supposons le $T^1_{\approx D(O_X/\underline{C}, \underline{C}[\varepsilon])}$ nul. Alors, toute déformation de O_X de base artinienne est triviale (on dit alors que la singularité X est rigide).

Il suffit de voir que, pour tout épaississement $A' \longrightarrow A \longrightarrow 0$ de la base, dont le noyau I est annulé par l'idéal maximal de A' , la restriction $D(A') \longrightarrow D(A)$ est injective. L'hypothèse sur I assure que $A' \times_A A'$ est isomorphe à $A' \times_{\underline{C}} \underline{C}[I]$ (pour être cohérent, nous devrions noter ces nombres duaux $D_{\underline{C}}(I)$ plutôt que $\underline{C}[I]$; l'isomorphisme s'obtient en envoyant (x, y) sur $(x, v(x) + y - x)$, où $v(x)$ est la valeur de x à l'origine). Les propriétés 1° et 2° du foncteur D , démontrées dans l'exposé précédent, entraînent que $D(A' \times_A A')$ s'envoie d'une part surjectivement sur $D(A') \times_{D(A)} D(A')$, d'autre part bijectivement sur $D(A') \times D(\underline{C}[I])$, donc sur $D(A') \times D(\underline{C}[\varepsilon]) \times \dots \times D(\underline{C}[\varepsilon])$, donc sur $D(A')$; d'où une surjection de $D(A')$ sur $D(A') \times_{D(A)} D(A')$ transformant une déformation δ en $(\delta, ?)$; on ne peut qu'avoir $? = \delta$.

Ce lemme nous rend curieux de connaître un critère de nullité du T^1 (autre que la lissité de X !). Voici une proposition qui permet à Schlessinger [4] de prouver la rigidité des singularités suivantes :

X cône affine de base un produit de projectifs complexes $P^n \times P^m$

plongé dans P^{nm+n+m} par le plongement de Segre ($n \geq 1$, $m \geq 2$) ;

X cône affine de base P^n plongé dans un P^{nm+m-1} par le plongement de Veronese ($n \geq 2$) ;

$X = Y/G$, où Y est lisse de dimension ≥ 3 , et où G est un groupe fini opérant sur le germe Y , l'origine du germe étant un point fixe isolé.

PROPOSITION 1.— Si l'origine x est une singularité isolée du germe X , et si la profondeur de X en x est au moins égale à 3, on a

$$T^1 = H^1(X - x, \theta_{X-x})$$

(θ désigne le tangent à X ; à strictement parler, X n'est pas un germe, mais un petit ouvert de Stein).

Nous ne pouvons mieux faire pour la démonstration de cette proposition et de ses conséquences que de renvoyer à [4].

§ 5. Déformations des intersections complètes.

Introduisons d'abord les deux premiers objets cotangents relatifs d'un morphisme local $Y \rightarrow X$ (ce sont des généralisations de T^1), renvoyant pour les démonstrations à [4] (on peut aussi consulter [5]). Partons donc d'une $\mathbb{C}$ -algèbre de base A locale artinienne, et d'une A -algèbre analytique B , dont nous choisissons un plongement dans un lisse sur A , soit

$$B = P/I, \quad \text{avec } P = A\{X_1, \dots, X_p\}.$$

Choisissons de plus un système fini de générateurs de I , c'est-à-dire une présentation de I

$$0 \rightarrow R \rightarrow F \xrightarrow{j} I \rightarrow 0,$$

où F est libre de type fini sur P . Considérons l'application P -linéaire

$$\lambda : \Lambda^2 F \longrightarrow R$$

qui, à $x \wedge y$, associe la relation $j(x)y - j(y)x$. Appelons R_0 l'image de λ . On constate que IR est contenu dans R_0 (si $i \in I$, $r \in R$, $ir = \lambda(x \wedge r)$ pour tout $x \in F$ tel que $j(x) = i$), et que R_0 est contenu dans IF . Donc, R/R_0 est un B -module, muni d'une application B -linéaire dans $F \otimes_P B$. Nous dirons que le complexe

$$L_{B/A} : 0 \longrightarrow R/R_0 \longrightarrow F \otimes_P B \longrightarrow \Omega_{P/A} \otimes_P B \longrightarrow 0$$

est "le" complexe cotangent relatif de B/A (rappelons que, si (F_i) sont les générateurs choisis de I , la dernière flèche est donnée par

$$(a_i) \longmapsto \sum dF_i \otimes a_i ; \text{ elle se factorise par la surjection } F \otimes_P B \longrightarrow I/I^2$$

qui envoie (a_i) sur $\sum b_i F_i$, où les b_i sont des représentants dans P des a_i). Le 0^{ième} objet d'homologie de $L_{B/A}$ est clairement $\Omega_{B/A}$.

Vérifions, pour nous donner confiance, que le premier est T_1 , c'est-à-dire le noyau de $I/I^2 \longrightarrow \Omega_{P/A} \otimes_P B$: il est clair qu'on peut définir une application surjective de $H_1(L_{B/A})$ sur T_1 ; si $(a_i) \in F \otimes_P B$ donne 0 dans I/I^2 , et si les $b_i \in P$ relèvent les a_i , on a $\sum b_i F_i = \sum c_{ij} F_i F_j$, d'où $\sum (b_i - \sum c_{ij} F_j) F_i = 0$, c'est-à-dire que le système (a_i) pourrait se relever en une relation entre les F_i .

Le complexe $L_{B/A}$ dépend de bien d'autres données que B/A . Mais toute son importance vient du

THEOREME 1 ([3]). — Pour tout morphisme d'une paire B'/A' dans une paire B/A , et pour tout choix de P' , F' , P , F , on peut définir un homomorphisme de $L_{B'/A'}$ dans $L_{B/A}$ unique à homotopie près.

Ce théorème permet de définir, pour tout B -module M , des B -modules $T_i(B/A, M) = H_i(L_{B/A} \otimes_B M)$ et $T^i(B/A, M) = H^i \text{Hom}_B(L_{B/A}, M)$, qui varient dans le sens qu'on pense en fonction de B/A et de M . En particulier,

$$T_0(B/A, M) = \Omega_{B/A} \otimes_B M, \quad T^0(B/A, M) = \text{Der}_A(B, M)$$

(au moins si M est de type fini),

$$T_1(B/A, B) = T_1, \quad T^1(B/A, B) = T^1, \quad T^i(B/A, M) = \text{Ext}(B/A, M)$$

(toujours si M est de type fini).

PROPOSITION 2 ([3]). — Soient deux morphismes $A' \rightarrow A \rightarrow B$, où A' et A sont des $\mathbb{C}$ -algèbres locales artiniennes, et où B est une A -algèbre analytique ; soit M un B -module de type fini. On peut définir les deux suites suivantes, qui sont exactes :

$$(1) \quad T_1(A'/A, M) \rightarrow T_2(B/A', M) \rightarrow T_2(B/A, M) \rightarrow T_1(A'/A, M) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B M \rightarrow 0$$

$$(2) \quad 0 \rightarrow \text{Der}_A(B, M) \rightarrow \text{Der}_{A'}(B, M) \rightarrow \text{Der}_{A'}(A, M) \rightarrow \text{Ext}(B/A, M) \rightarrow \\ \text{Ext}(B/A', M) \rightarrow \text{Ext}(A/A', M) \rightarrow T^2(B/A, M) \rightarrow T^2(B/A', M) \rightarrow T^2(A/A', M) .$$

Remarquons enfin que $T^2(\mathcal{O}_X/\mathbb{C}, \mathcal{O}_X)$ s'interprète facilement lorsque X est réduit : si $\mathcal{L}^*$ désigne le complexe $0 \rightarrow R/R_0 \rightarrow F \otimes_P \mathcal{O}_X \rightarrow 0$, $T^2 = H^1 \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}^*, \mathcal{O}_X) = R^1 \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}^*, \mathcal{O}_X)$ s'intercale dans la suite exacte ci-dessous

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(H_0(\mathcal{L}^*), \mathcal{O}_X) \rightarrow T^2 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(T_2, \mathcal{O}_X) .$$

Le conoyau $H_0(\mathcal{L}^*)$ n'est autre que I/I^2 , et T_2 étant concentré aux points singuliers de X , on a la

PROPOSITION 3. — Si X est réduit, et si I/I^2 est le faisceau conormal du

plongement de X dans un espace lisse, on a

$$T^2(\mathcal{O}_X/\underline{C}, \mathcal{O}_X) = \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(I/I^2, \mathcal{O}_X) \quad .$$

En particulier, T^2 s'annule si X est une intersection complète, mais Schlessinger indique dans sa thèse un autre cas d'annulation du T^2 : celui où X est réduit, de Cohen Macaulay, et plongeable dans un espace lisse avec la codimension 2 ; en particulier, le T^2 de toute courbe de $\underline{C}^3$ est nul.

Revenons maintenant aux déformations :

PROPOSITION 4.- Soit $\mathcal{O}_X/\underline{C}$ l'anneau d'un germe d'espace analytique, dont nous supposons le T^2 nul. Soient $A' \rightarrow A \rightarrow 0$ deux bases locales artiniennes. Alors, l'application de restriction $D(A') \rightarrow D(A)$ est surjective.

Il suffit de traiter le cas où $A = A'/J$, J de carré nul, et donc, en vertu de l'exactitude de la suite (2) et du lemme 1 (§2), de montrer que, pour tout $B \in D(A)$, on a $T^2(B/A, J \otimes_A B) = 0$. Ceci va être facile à prouver dans le cas, auquel on peut toujours se ramener, où J est annulé par l'idéal maximal de A' , c'est-à-dire où J est un A -module via $\underline{C}$. Alors $J \otimes_{\underline{C}} \mathcal{O}_X$, comme B -module via $\mathcal{O}_X$, n'est autre que $J \otimes_A B$; B/A étant une déformation (plate) de $\mathcal{O}_X/\underline{C}$, un lemme de changement de base prouvé dans [3] dit que

$$T^2(B/A, J \otimes_A B) = T^2(\mathcal{O}_X/\underline{C}, J \otimes_{\underline{C}} \mathcal{O}_X) = T^2(\mathcal{O}_X/\underline{C}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\underline{C}} J = 0 \quad .$$

Nous pouvons dire maintenant ce que va être la déformation verselle de X lorsque ce germe a une singularité isolée, et lorsque son T^2 est nul : soit $\xi_1, \dots, \xi_n$ une base du $\underline{C}$ -espace vectoriel de dimension finie

$T^1 = \text{Def}(O_X/\underline{C}, \underline{C}[\varepsilon])$. D'après la proposition précédente, il existe une déformation de $O_X/\underline{C}$ de base $\underline{C}[[t_1, \dots, t_n]]$ induisant à l'ordre un la déformation $\pi \xi_1$. Nous disposons de tous les éléments pour montrer qu'une telle déformation est verselle, mais la démonstration en sera donnée dans un cadre plus général au prochain exposé.

Exemple.

Considérons une courbe plane réduite $O_X = \underline{C}\{x, y\}/(F) = O_Y/I$. Son T^1 est le conoyau de $\text{Hom}_{O_Y}(\Omega_Y, O_X) \rightarrow \text{Hom}_{O_Y}(I, O_X)$, soit $O_X/(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$, et son T^2 est nul. Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des représentants dans $\underline{C}\{x, y\}$ d'une base du T^1 . Les déformations correspondantes ont pour anneau $\underline{C}\{x, y, \varepsilon\}/(F - \varepsilon\varphi_1)$, où $\varepsilon^2 = 0$, et la déformation verselle de O_X a pour anneau $\underline{C}\{x, y, t_1, \dots, t_p\}/(F - t_1\varphi_1 - \dots - t_p\varphi_p)$. Par exemple, la déformation verselle de la courbe d'équation $y^2 = x^n$ a pour équation $y^2 = x^n - t_0 x^{n-2} \dots - t_{n-2}$. Il faut prendre garde que les composantes irréductibles de X ne sont bien entendu pas stables dans cette affaire, comme le montre l'exemple $y^2 = x^2$, ou l'exemple plus plaisant $y(y - x^2) = 0$.

§ 6. Un exemple d'obstruction à la déformation.

Voici un exemple, tiré de la thèse de Schlessinger, d'une singularité isolée (ce sera une coube de $\underline{C}^4$) et d'une déformation de celle-ci à $D = \underline{C}[\varepsilon]$ qui refuse de se laisser prolonger à $D' = \underline{C}\{t\}/(t^3)$.

Nous noterons toujours $O_X = P/I$, $P = \underline{C}\{y\}$, l'anneau à déformer. Il est d'abord clair qu'une déformation de $O_X/\underline{C}$ à A peut toujours être

plongée dans $Q = A\{y\}$, sans rajouter de variables y . Une condition nécessaire et suffisante pour que $B = A\{y\}/I'$ vérifiant $B \otimes_A \underline{C} = O_X$ soit plate sur A est que l'on ait simultanément

- 1°) quel que soit le système de générateurs f_i de I , quels que soient les $F_i \in I'$ relevant les f_i , I' est engendré par ces F_i ;
- 2°) toute relation entre les f_i peut être prolongée en une relation entre les F_i .

On peut, par exemple, dire que, $A\{y\}$ étant plat sur A , la platitude de B sur A équivaut à la nullité du $\text{Tor}_1^{A\{y\}}(B, \underline{C}\{y\})$.

Soient donc $C = D\{y\}/J$ une déformation de $O_X/\underline{C}$ aux nombres réels, g_i des générateurs de I et $g_i + \varepsilon \Delta g_i$ des générateurs de J . Toute relation (r_i) entre les g_i peut être relevée en $(r_i + \varepsilon \Delta r_i)$ vérifiant $\sum r_i \Delta g_i + g_i \Delta r_i = 0$; si $r_i + \varepsilon \Delta r_i$ est un autre relèvement possible, on a $\sum g_i (\Delta r_i - \Delta' r_i) = 0$, donc $(\Delta r_i - \Delta' r_i)$ est une relation entre les g_i , qui se prolonge en une relation entre les $g_i + \varepsilon \Delta g_i$, et $\sum \Delta g_i (\Delta r_i - \Delta' r_i) \in I$. Nous avons ainsi défini un homomorphisme de R dans B $((r_i) \rightarrow \sum \Delta r_i \Delta g_i)$ qui se factorise par R/R_0 . Si C peut être déformée en C'/D' ($D' = \underline{C}\{t\}/t^3$), soient $g_i + t \Delta g_i + t^2 \delta g_i$ des générateurs de l'idéal de C' dans $D'\{y\}$. La relation $r_i + \varepsilon \Delta r_i$ se prolonge en $r_i + t \Delta r_i + t^2 \delta r_i$, soit

$$\sum \Delta r_i \Delta g_i + \sum g_i \delta r_i + \sum r_i \delta g_i = 0.$$

Alors l'homomorphisme $h : R/R_0 \rightarrow B$ précédemment défini se factorise même par $F \otimes_P B \rightarrow B$, $((a_i) \rightarrow \sum a_i \delta g_i)$. En résumé, à l'extension $C/\underline{C}[\varepsilon]$ de $O_X/\underline{C}$, nous avons associé une obstruction $\bar{h} \in T^2(O_X/\underline{C}, O_X)$ nulle si et seulement si C veut bien se prolonger à $\underline{C}\{t\}/(t^3)$.

Il ne reste plus qu'à examiner un exemple : considérons la courbe X de $Y = \mathbb{C}^4$ d'équations paramétriques

$$x = t^7, \quad y = t^8, \quad z = t^9, \quad w = t^{10}.$$

C'est-à-dire $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}\{x, y, z, w\}/I$, où I est l'idéal engendré par les six éléments

$$\begin{aligned} f_1 &= y^2 - xz, & f_2 &= xw - yz, & f_3 &= z^2 - yw, \\ f_4 &= x^4 - w^2y, & f_5 &= x^3y - zw^2, & f_6 &= w^3 - x^3z, \end{aligned}$$

Comme X est réduite, une déformation de X à $\mathbb{C}[\varepsilon]$ est donnée par un élément de $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$, donc par un homomorphisme de M dans $\mathcal{O}_X$, où M est l'image de l'application $I/I^2 \longrightarrow \Omega \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. D'autre part, un élément de $T^2 \approx \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(I/I^2, \mathcal{O}_X)$ est donné en fait par un homomorphisme de $R' = R/(IF \cap R)$ dans $\mathcal{O}_X$ (R' reçoit naturellement R/R_0 et s'insère dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow R' \longrightarrow F \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow 0,$$

ce qui montre aussi que, dans notre exemple, R' est de rang 3 sur $\mathcal{O}_X$; voici trois éléments linéairement indépendants de R' :

$$\begin{aligned} a &= (t^9, t^8, t^7, 0, 0, 0) \\ b &= (t^{20}, 0, 0, t^8, -t^7, 0) \\ c &= (0, 0, t^{20}, 0, t^9, t^8) \end{aligned}.$$

Nous nous donnerons donc un homomorphisme de R' dans $\mathcal{O}_X$ par les images de a, b, c . L'image de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ dans $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(R', \mathcal{O}_X)$ est ainsi engendrée par $(0, 0, t^8)$, $(0, -t^7, t^9)$, $(0, t^8, 0)$, $(t^7, 0, t^{20})$, $(t^8, 0, 0)$, $(t^9, t^{20}, 0)$, et on peut vérifier qu'elle ne contient pas $(0, 0, t^{20})$.

Voici enfin une déformation de X à $\mathbb{C}[\epsilon]$ pour laquelle l'obstruction à prolonger à $\mathbb{C}\{\tau\}/(\tau^3)$, ainsi écrite, vaut $(0, 0, -t^{20})$: c'est celle associée à l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X &\supset M \longrightarrow \mathcal{O}_X \\ (-t^9, 2t^8, -t^7, 0) &= (-z, 2y, -x, 0) = df_1 \longrightarrow \Delta f_1 = 0 \\ (t^{10}, -t^7, -t^8, t^7) &= (w, -x, -y, x) = df_2 \longrightarrow \Delta f_2 = 0 \\ (0, -t^{10}, 2t^9, -t^8) &= (0, -w, 2z, -y) = df_3 \longrightarrow \Delta f_3 = 0 \\ (4t^{21}, -t^{20}, 0, -2t^{18}) &= (4x^3, -w^2, 0, -2wy) = df_4 \longrightarrow \Delta f_4 = zw = t^{19} \\ (3t^{22}, t^{21}, -t^{20}, -2t^{19}) &= (3x^2y, x^3, -w^2, -2wz) = df_5 \longrightarrow \Delta f_5 = w^2 = t^{20} \\ (-3t^{23}, 0, -t^{21}, 3t^{20}) &= (-3x^2z, 0, -x^3, 3w^2) = df_6 \longrightarrow \Delta f_6 = -x^3 = -t^{21} \end{aligned}$$

-
- [1] BOURBAKI - Algèbre commutative.
- [2] GRAUERT et REMMERT - Analytische Stellen algebren, Springer 1971.
- [3] S. LICHTENBAUM et M. SCHLESSINGER - The cotangent complex of a morphism, Trans. A.M.S. 128, pp. 41-70 (1967).
- [4] M. SCHLESSINGER - Rigidity of quotient singularities, Inventiones Math. 14, pp. 17-26 (1971).
- [5] TIOURINA - Locally semi-universal flat deformations of isolated singularities of complex spaces, Mathematics of the USSR Izvestija, vol.3, n°5, pp. 967-999.